Corrado Mencuccini

Vittorio Silvestrini

FISICA I
MECCANICA
TERMODINAMICA

Corso di fisica per le facoltà tecnico-scientifiche
corredato di esempi ed esercizi

Liguori Editore

INDICE

VI. Le leggi della dinamica dei sistemi

VII. Sistemi rigidi

VIII. Problemi d'urto

IX. Meccanica dei fluidi

X. Onde in mezzi elastici

XI. Teoria della relatività ristretta

PARTE II - TERMODINAMICA

I. Calore e temperatura

II. Il primo principio della termodinamica

III. Trasmissione del calore

IV. Secondo principio della termodinamica

V. Funzioni termodinamiche

VI. Interpretazione microscopica delle grandezze termodinamiche

PARTE TERZA - RICHIAMI DI MATEMATICA

Prefazione

Questo testo di Meccanica e Termodinamica è indirizzato agli studenti delle facoltà di Ingegneria e di Scienze: esso copre il programma del corso di Fisica impartito al primo anno nelle Università italiane.

Poiché lo svolgimento dei corsi del primo anno non è tale, in generale, da fornire in tempo agli studenti le conoscenze di matematica che servono per il corso di fisica, abbiamo preferito rendere questo libro per quanto possibile autosufficiente da questo punto di vista, includendo in esso, via via che servono, le necessarie nozioni di matematica (completate dal prontuario di formule riportate nella parte terza del volume). Questi elementi di matematica, sviluppati nel corso di fisica in termini assai meno generali rispetto ai corsi di Analisi, sono propedeutici, a nostro avviso, non solo al corso di fisica, ma anche agli stessi corsi di analisi, poiché introducono agli studenti la motivazione storica e applicativa di concetti che nei corsi di matematica vengono poi svolti con una generalità che ne incrementa l'efficacia, ma anche l'astrattezza. Tuttavia la veste tipografica dei paragrafi dedicati alla matematica è tale da evidenziarli visivamente rispetto a quelli di fisica, cosicché lo studente che non ne senta la necessità possa saltarli agevolmente.

Quanto agli argomenti di fisica, abbiamo posto particolare cura nel far procedere il ragionamento lungo la logica induttivo-deduttiva caratteristica del metodo scientifico, in modo che lo studente acquisisca non solo le necessarie nozioni di meccanica, ma anche e soprattutto quella base metodologica che è indispensabile bagaglio culturale per un professionista delle discipline tecnico-scientifiche. Per raggiungere questo obiettivo, è però necessario non solo studiare il testo, ma anche svolgere gli esempi e gli esercizi che ne sono irrinunciabile parte integrante. Per facilitare questo compito, abbiamo fornito in fondo a ogni capitolo dei suggerimenti alla soluzione degli esercizi, in modo che lo studente in difficoltà possa trovare comunque degli spunti per procedere, prima di rinunciare e guardare la soluzione completa riportata nelle Appendici.

L'insieme degli argomenti presentati nel testo – comprensivi di un ampio capitolo dedicato ai sistemi rigidi; di un intero capitolo su problemi d'urto; di un capitolo sulla meccanica dei fluidi; di un capitolo sui fenomeni ondulatori e di uno sulla relatività ristretta – è in certa misura ridondante rispetto al tempo destinato alla fisica nei corsi di laurea diversi da quello in Fisica.

Pertanto questi argomenti sono stati presentati in modo che il docente possa, volendo, saltare gli ultimi paragrafi di ogni capitolo o uno qualunque degli ultimi quattro capitoli di meccanica senza che ne risulti minimamente compromessa la concatenazione logica del ragionamento.

Parte prima

Meccanica

Capitolo primo

Il metodo scientifico

1.1. Introduzione

La *fisica* si occupa di descrivere e interpretare i fenomeni naturali usando il *metodo scientifico*.

Metodo scientifico

Il metodo scientifico, le cui basi furono poste da Galileo Galilei, procede sostanzialmente attraverso i seguenti passi:

Schematizzazione

a) la *schematizzazione*. Ogni fenomeno naturale, anche il più semplice, è in generale notevolmente complesso, perché al suo svolgimento concorrono molte cause, non sempre riproducibili. Ad esempio dopo che abbiamo lanciato un sasso, il moto di questo, determinato principalmente dalla forza peso, è condizionato però anche dall'azione di frenamento esercitata dall'aria, da eventuali colpi di vento, da possibili sfarfallamenti dovuti alla sua forma irregolare, ecc.
La schematizzazione mira ad analizzare il fenomeno per gradi, concentrando in prima istanza l'attenzione sulla causa dominante (nel caso in esame, la forza peso) eliminando invece tutte le cause accessorie e segnatamente quelle aleatorie e non riproducibili. Tutte queste complicazioni potranno eventualmente essere prese in considerazione in un secondo tempo, e potranno essere trattate di solito come *perturbazioni* del fenomeno più semplice.

Perturbazioni

La schematizzazione comporta la sostituzione del fenomeno naturale con un *modello* semplificato di esso (nel caso in esame, il modello potrà essere rappresentato da un sasso sferico che si muove in una regione di spazio il più possibile liberata dall'aria). Lo studio del modello consente di stabilire correlazioni qualitative tra enti fisici essenziali (per esempio tra periodo di oscillazioni e lunghezza di un pendolo, oppure tra pendenza di una discesa e velocità di arrivo ecc.) in una descrizione semplificata suscettibile di essere successivamente modificata introducendo via via le varie complicazioni accessorie (per esempio attriti).

Modello

Misura

b) *La misura*, che costituisce un insieme di procedure e convenzioni, che permettono di associare un numero seguito da un'unità di misura ad

ogni ente fisico individuato come essenziale nel processo di schematizzazione (per esempio, una grandezza fisica detta lunghezza, in metri, relativa al filo che sostiene la massa oscillante nel pendolo, oppure una grandezza fisica, detta velocità, in metri al secondo, relativa alla rapidità con cui il corpo, che scivola sul piano inclinato, cambia la sua posizione al passare del tempo ecc.). Una grandezza fisica può giocare un ruolo nell'ambito del metodo scientifico solo se *definita in modo operativo*, cioè, se per essa sono date delle regole precise ed universali che consentano di misurarla.

Osservazione sperimentale

c) L'*osservazione sperimentale* di correlazioni quantitative tra i valori numerici delle misure delle grandezze fisiche che sono coinvolte nel fenomeno. Queste correlazioni quantitative vengono, di solito, presentate in forma di tabelle, grafici o formule matematiche.

Leggi

d) La organizzazione dei risultati delle osservazioni nella forma di *leggi* che governano il fenomeno. Queste leggi saranno rappresentate di norma da relazioni matematiche fra i valori delle grandezze coinvolte nel fenomeno stesso. Ad esempio si troverà nel caso del lancio di un sasso che, a parità di ogni altra condizione, la distanza d a cui il sasso cade è quattro volte più grande se raddoppia la velocità v_0 con cui esso è stato lanciato; ecc.

Previsione

e) La *previsione* di nuovi fenomeni. Usando cioè le leggi ricavate da osservazioni eseguite in certe condizioni, si *calcola* il risultato che ci si attende quando il fenomeno si svolge in condizioni diverse: ad esempio si calcola dove ci si aspetta che il sasso debba cadere quando venga lanciato ad un angolo diverso, oppure se esso ha una massa diversa, ecc.

Verifica sperimentale

f) La *verifica sperimentale* delle previsioni: cioè il controllo, mediante misurazione dei risultati, che nelle nuove condizioni il fenomeno si svolge effettivamente così come le leggi hanno consentito di calcolare e prevedere.

Questo metodo si è rivelato un formidabile strumento per allargare e approfondire la conoscenza di vastissime categorie di fenomeni naturali.

Molto spesso, i *modelli* dei fenomeni naturali realizzati a puro scopo conoscitivo hanno mostrato anche una loro utilità pratica, e hanno avuto poi una loro autonoma vita: si pensi, ad esempio, ai motori termici, o a innumerevoli apparecchi elettrici.

Tutto ciò ha consentito alla civiltà occidentale, che ha adottato sistematicamente il metodo scientifico, di acquisire straordinaria floridità e potenza. Ciononondimeno, il metodo scientifico incontra notevoli difficoltà quando si tratti di studiare fenomeni in cui non sia semplice individuare [illegible]tà fra moltissime cause concorrenti a determinarne l'evoluzione. [illegible] è semplice, ad esempio, trattare scientificamente i fenomeni biologici oppure quelli connessi con la patologia o con la pratica dell'agopuntura. In questi casi, altri approcci conoscitivi (ad esempio basati sulla *analogia*) possono risultare più efficaci. Noi tuttavia limiteremo la nostra attenzione al metodo scientifico.

I.2. Definizione operativa delle grandezze fisiche

Induzione

Quel momento del metodo scientifico che tende a organizzare i risultati delle osservazioni nella forma di leggi generali viene detto *induttivo*; il momento invece in cui le leggi generali vengono usate per calcolare e prevedere i risultati relativi ai casi particolari che via via interessano viene

detto *deduttivo*. Entrambe queste fasi si basano sulla condizione che le grandezze coinvolte nel fenomeno possano essere *quantificate*, cioè espresse tramite numeri.

Deduzione

In effetti, una grandezza fisica la si ritiene definita («*definizione operativa*») quando sia stato specificato il modo in cui essa può essere *misurata*, cioè espressa tramite un numero (ricavato dalla osservazione) che la caratterizza. Una condizione essenziale è che il risultato della misura sia *riproducibile*, cioè che la misurazione eseguita sulla stessa grandezza (nelle stesse condizioni) fornisca lo stesso numero indipendentemente dal soggetto che esegue la misura o, come si dice, indipendentemente dallo sperimentatore.

Definizione operativa
Misura
Riproducibilità della misura

In questo libro verrà data, via via che ne sentiremo l'esigenza, la definizione operativa di molte grandezze fisiche, e ciò servirà anche a meglio approfondire il concetto di *misura*: processo che a volte viene eseguito in maniera *diretta* (cioè mediante confronto fra grandezze omogenee, ad esempio fra lunghezze se di lunghezze stiamo parlando) ma che spesso è più comodo o addirittura necessario compiere in maniera *indiretta* (cioè misurando grandezze diverse da quella in esame, il cui valore sia però legato, tramite leggi note, alla grandezza che si vuole misurare). In questo paragrafo e nel prossimo discutiamo la definizione operativa di due grandezze fisiche di carattere geometrico, cioè la *lunghezza* (ad esempio la lunghezza di uno spigolo di una lastra metallica rettangolare) e l'*area* (ad esempio l'area della superficie della stessa lastra).

Misura diretta
Misura indiretta

Per giungere alla definizione di misura diretta, i passi da compiere sono sostanzialmente i seguenti:

a) Si stabilisce un *criterio di confronto* fra due grandezze qualunque appartenenti alla categoria in esame, in base al quale sia possibile definire il *concetto di uguaglianza* fra grandezze omogenee.
Nel caso della grandezza fisica *lunghezza* ci limitiamo a considerare, per semplicità, segmenti rettilinei. Il criterio di confronto tra due segmenti si basa sulla capacità di accertare la sovrapposizione geometrica degli estremi dei segmenti a confronto. In base a questo criterio di confronto, due segmenti si dicono avere la stessa lunghezza se i due estremi del primo possono essere simultaneamente portati a coincidere con i due estremi del secondo.
Nel caso di linee curve il concetto di lunghezza può essere facilmente esteso a partire dalla lunghezza di segmenti rettilinei. Basterà pensare spezzata la linea curva in una serie di corde tanto numerose, e quindi tanto piccole, da avvicinarsi quanto si vuole alla configurazione geometrica della linea curva considerata. In pratica si usano dei campioni deformabili (ad esempio uno spago o un «metro da sarto») per i quali si ammetta che, al variare della forma, non cambi la lunghezza.
In pratica, i due segmenti, le cui lunghezze si vogliono confrontare, vengono disposti uno di fianco all'altro con un estremo coincidente. Se anche l'altro estremo coincide, le lunghezze dei due segmenti (dei due spigoli) sono uguali per definizione; in caso contrario è maggiore la lunghezza di quel segmento che copre completamente l'altro.

Uguaglianza di grandezze omogenee

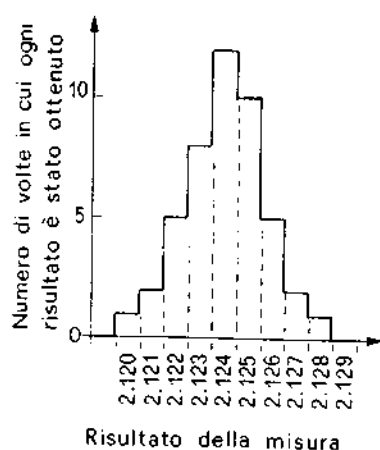
b) Il secondo passo per la misura consiste nel definire il criterio di *somma* di due grandezze fisiche omogenee.
Nel caso delle lunghezze, la lunghezza a è per definizione pari alla somma delle due lunghezze b e c, se disponendo uno di seguito all'altro sulla stessa retta i segmenti b e c (il primo estremo di c coincidente con il secondo estremo di b), quando il primo estremo di a coincide con il primo estremo di b il secondo estremo di a coincide con il secondo estremo di c.

Criterio di somma

Una volta definita la somma, risultano definiti i multipli e i sottomultipli di una certa lunghezza a. Un segmento b ha lunghezza pari ad na (con n intero), quando la sua lunghezza è pari alla somma delle lunghezze di n segmenti di lunghezza a; un segmento b ha lunghezza $a : n = a/n$ quando, sommandolo ad altri $(n - 1)$ segmenti di pari lunghezza, si ottiene una lunghezza pari ad a.

Unità di misura

c) Come terzo passo, occorre operare la scelta dell'*unità di misura* o *campione* per la grandezza fisica considerata. Nel caso di lunghezze si sceglie un *regolo campione*, la cui lunghezza viene convenzionalmente assunta aver valore 1 (*unità di misura delle lunghezze*). Secondo una convenzione internazionale ormai universalmente adottata, l'unità di misura delle lunghezze è la lunghezza di un regolo di platino-iridio depositato al Bureau des Standards di Parigi (*metro campione*). Il campione di lunghezza è dato anche, in modo più universale, in termini di lunghezza d'onda di una determinata radiazione luminosa. Dal 1960 il metro campione è definito come una lunghezza 1.650.763,7 volte la lunghezza d'onda nel vuoto della riga spettrale rosso-arancio dell'atomo di cripton.

Metro campione

Ciò fatto, siamo finalmente in grado di definire operativamente la grandezza fisica lunghezza, specificando l'operazione che va compiuta per misurarla; operazione consistente nel confrontare la lunghezza incognita coi multipli e sottomultipli dell'unità di misura. La misura del lato della nostra lastra di lamiera vale ad esempio (in cifre decimali) 2,124 metri, se esso ha lunghezza pari a quella della somma di due regoli di lunghezza 1 metro, più un regolo di lunghezza 1/10 di metro (decimetro), più due regoli di lunghezza 1/100 di metro (centimetro), più 4 regoli di lunghezza 1/1000 di metro (millimetro). Per facilitare l'operazione di misura, vengono costruiti dei regoli su cui sono direttamente indicati, mediante tacche numerate, i multipli e sottomultipli della unità di misura.

Se di una certa lunghezza incognita si esegue la misura ripetutamente (n volte) cercando di raggiungere il livello di precisione massimo consentito dagli strumenti in nostro possesso, si riscontra in generale che i risultati non sono tutti fra di loro uguali, ma fluttuano leggermente intorno a un certo valore. Nel caso in esame, si potrà ottenere ad esempio una sequenza del tipo: 2,124; 2,123; 2,124; 2,125; 2,126; 2,124; ecc. Queste fluttuazioni sono dovute a *errori casuali* di varia natura (allineamento non perfetto; variazioni di lunghezza del regolo; ecc.).

Istogramma

Un modo conveniente per rappresentare gli errori è quello di riportare le misure in un grafico (detto istogramma) del tipo di quello mostrato in figura. Questa distribuzione dei risultati delle misure consente immediatamente di ricavare una stima dell'errore tipico da cui è affetta ogni singola misura.

Nell'esempio riportato, vediamo che circa il 70% dei risultati giacciono in un intervallo di ampiezza Δl = 4 mm. Si usa allora dire che la misura l ha un errore standard σ pari a $\sigma = \frac{\Delta l}{2} = 2$ mm, e si scrive:

$$l \pm \sigma \quad (\text{nell'esempio in esame, } l = 2{,}124 \pm 0{,}002 \text{ m})$$

Induzione

Il significato di σ è che vi è una probabilità di circa il 30% che il risultato di una misura capiti all'esterno di un intervallo di ampiezza 2σ.

Una volta effettuato un certo numero n di misure (siano $l_i = l_1, l_2, ..., l_n$ i risultati ottenuti), è conveniente prendere come valore rappresentativo della grandezza misurata il valore medio $\bar{l}$ degli n risultati ottenuti $\left(\bar{l} = \frac{l_1 + l_2 ... + l_n}{n} = \left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)/n\right)$.

Approfondimenti su questo tema sono argomento della teoria degli errori che qui non sarà sviluppata.

I.3. Sistemi di unità di misura ed equazioni dimensionali

Area di una superficie

Pensiamo ora di voler dare, analogamente al caso della lunghezza L, la definizione operativa dell'area A. Per misurare l'area A di una superficie (ad esempio quella della lamiera rettangolare di cui al precedente paragrafo) procederemo secondo una semplice estensione di quanto visto nel caso della lunghezza.

Il criterio di confronto fra due superfici è basato sulla loro sovrapposizione: quella delle due che ricopre completamente l'altra ha per definizione area maggiore. Le difficoltà connesse con eventuali differenze nelle forme, che possono dare problemi nel giudicare la sovrapponibilità, possono essere risolte immaginando che una delle due superfici (che, a titolo di esempio possiamo per semplicità immaginare realizzata in carta) possa essere ritagliata in un numero qualsiasi di parti. Altrettanto immediato è definire il criterio di somma.

Scelta ora un'unità (potremo scegliere ad esempio l'area di un foglio rettangolare di carta), possiamo misurare l'area della nostra superficie, che risulterà espressa da quel numero A che rappresenta il numero di volte che la superficie incognita contiene l'unità di misura (cioè il numero di superfici unitarie che vanno poste una vicina all'altra per ricoprire completamente la superficie da misurare).

Se ora effettuiamo, su diverse superfici rettangolari, la misura delle lunghezze a e b dei lati e la misura A dell'area, si riscontra che esiste una legge che lega fra di loro queste grandezze. Precisamente, si riscontra che vale una relazione di proporzionalità fra l'area e il prodotto delle lunghezze dei lati:

$$A = Kab \qquad \text{[I.1]}$$

Se, ad esempio, si raddoppia la lunghezza di uno dei due lati lasciando invariato l'altro, si trova che la misura dell'area fornisce un numero doppio.

È evidente che il valore numerico del coefficiente di proporzionalità K dipende dalle unità di misura che sono state (arbitrariamente) scelte per misurare le lunghezze e le aree. Se ad esempio, lasciando invariata l'unità di misura delle lunghezze (cosicché il prodotto ab resta espresso dallo stesso numero) si prendesse come unità di misura delle aree un foglio di carta dimezzato rispetto al caso precedente, l'area A sarebbe espressa da un numero doppio: e ciò comporterebbe per la costante K della [I.1] un valore doppio rispetto al caso precedente.

Per rendere la legge [I.1] più semplice possibile, conviene scegliere, come unità di misura dell'area, l'area del rettangolo di lati $a = b = 1$, cioè l'area del quadrato di lato unitario: se l'unità di misura delle lunghezze è il metro, quella delle aree sarà il metro quadrato. La [I.1] diviene così:

$$A = ab \qquad \text{[I.2]}$$

È questa una procedura che viene adottata sistematicamente in fisica. Ogni volta che si sente l'esigenza di introdurre una nuova grandezza, la scelta della sua unità di misura viene fatta in un primo momento in maniera del tutto arbitraria. Se tuttavia, in seguito, sperimentando su tale grandezza si trova che essa è legata da una legge generale (rappresentata da una equazione matematica) ad altre grandezze fisiche, la sua unità di misura viene scelta in modo da rendere l'equazione la più semplice possibile dal punto di vista numerico. Si costruisce così quello che si chiama un *sistema di unità di misura.*

Sistema di unità di misura

Grandezze fondamentali

Una grandezza, come la lunghezza, per la quale l'unità di misura sia scelta arbitrariamente (come è per il metro) viene detta *fondamentale*; una grandezza invece, come l'area, la cui unità di misura sia legata all'unità di misura di altre grandezze (metro quadrato) al fine di semplificare la struttura numerica di una legge, viene detta grandezza *derivata.* La legge che lega la grandezza derivata alle grandezze fondamentali fornisce in generale anche un modo per eseguirne la misura in maniera indiretta: ad esempio l'area del rettangolo può essere ricavata misurando i lati, e poi calcolando l'area stessa tramite la [I.2].

Grandezze derivate

Va notato che una volta scelto il metro quadrato come unità di misura delle aree, mentre l'area del rettangolo è espressa dalla [I.2], l'area di altre figure geometriche è espressa da una legge del tipo

$$A = f\,a\,b \qquad \text{[I.3]}$$

Fattore di forma

dove a e b sono due lunghezze caratteristiche della figura, ed f è un numero caratteristico della forma della figura (*fattore di forma*). Ad esempio per i triangoli a e b sono base ed altezza, ed f vale 1/2; per i cerchi sia a che b sono pari al raggio r, mentre f vale π; ecc.

Questa constatazione si presta a due osservazioni. La prima è che per una grandezza derivata la scelta dell'unità di misura presenta comunque un certo grado di arbitrarietà. Ad esempio si potrebbe scegliere – se lo si ritenesse più comodo – come unità di misura delle aree l'area del cerchio di raggio 1 metro; in tal caso per l'area A del cerchio varrebbe la semplice legge $A = r^2$, mentre per i rettangoli la [I.2] diverrebbe $A = ab/\pi$. L'altra osservazione è che l'area A di *qualunque* figura è proporzionale tramite il coefficiente puramente numerico f («numero puro») al prodotto di due lunghezze. Ciò si esprime scrivendo

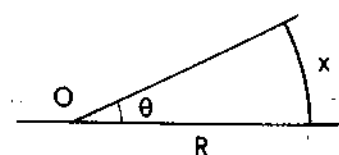
$$[A] = [L] \cdot [L] = [L^2] \qquad \text{[I.4]}$$

Equazione dimensionale

La [I.4] viene detta l'*equazione dimensionale* dell'area, e si legge dicendo che l'*area ha le dimensioni fisiche del prodotto di due lunghezze* o *di una lunghezza al quadrato.*

Un'altra grandezza fisica derivata dalla grandezza fondamentale lunghezza è l'*angolo*, cioè la porzione di piano compresa tra due semirette con origine comune. L'angolo θ è misurato come rapporto tra la lunghezza x dell'arco di cerchio di raggio R e la lunghezza del raggio stesso:

Angolo

$$\theta = \frac{x}{R}$$

Le dimensioni fisiche di un angolo corrispondono al rapporto tra due lunghezze. L'angolo, dunque, è una grandezza fisica adimensionale (numero puro) e la sua unità di misura è il *radiante*. In radianti un angolo può andare dal valore minimo $\theta = 0$ (quando $x = 0$) al valore massimo $\theta = 2\pi$ (quando $x = 2\pi R$, cioè l'intera circonferenza).

Grandezze adimensionali
Radiante

La relazione tra la misura in radianti e la misura in gradi di un angolo, deriva dalla proporzione:

$$\theta_{(RAD)} : 2\pi = \theta_{(GRADI)} : 360°$$

da cui

$$\theta_{(RAD)} = \frac{2\pi}{360} \cdot \theta_{(GRADI)}$$

Per esempio:

$\theta_{(GRADI)}$	$\theta_{(RAD)}$
0°	0
30°	$\frac{2\pi}{360°} \cdot 30° = \frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π

Per come sono state definite le dimensioni fisiche, le dimensioni dei due membri di una qualunque equazione fisica devono essere fra di loro uguali (ad esempio le dimensioni di entrambi i membri della I.3 sono quelle di una lunghezza al quadrato); o, come si dice, *qualunque equazione fisica è dimensionalmente omogenea*, sia essa una legge ricavata direttamente dagli esperimenti, ovvero mediante elaborazioni matematiche di una tale legge.

Omogeneità dimensionale

Ovviamente, anche la scelta su quali grandezze considerare fondamentali e quali derivate è arbitraria, e subordinata a considerazioni di comodità: in linea di principio, si potrebbe considerare l'area A come grandezza fondamentale e la lunghezza L come grandezza derivata di dimensioni $[L] = [\sqrt{A}] = [A^{1/2}]$.

In meccanica, introdurremo molte grandezze fisiche dandone la definizione operativa; e di solito sarà possibile trovare una legge che lega la grandezza introdotta ad altre grandezze fisiche. A conti fatti resteranno tre sole grandezze fondamentali. Nel sistema metrico internazionale SI (il sistema di unità di misura convenzionalmente adottato a livello internazionale, che anche noi useremo) le grandezze fondamentali, oltre alla lunghezza L, sono la massa M e il tempo T (che definiremo più avanti); e le relative unità di misura sono *metro* m, *kilogrammo* kg e *secondo* s. Qualunque altra grandezza fisica potrà essere dimensionalmente espressa tramite le tre grandezze fondamentali: vedremo ad esempio che un'accelerazione ha dimensioni $[L][T^{-2}]$; una forza $[M][L][T^{-2}]$; una densità $[M][L^{-3}]$; ecc. ecc.

Sistema metrico internazionale

Esempio

E.I.1. *Un pendolo è costituito da una pallina di piombo di massa $m = 30$ grammi, appesa a un filo di cotone di lunghezza $l = 1$ metro. Misurando con un cronometro, si trova che esso oscilla con un periodo T di circa 2 secondi, cioè esso impiega circa 2 secondi a compiere ogni oscillazione. Calcolare, in base a considerazioni dimensionali, il valore T' del periodo quando la lunghezza del pendolo viene portata a $l' = 25$ cm e la massa ad $m' = 50$ grammi.*

Il pendolo è caratterizzato da due sole grandezze fisiche, la sua lunghezza l e la sua massa m; le sue oscillazioni sono determinate dalla forza peso, caratterizzata dalla accelerazione di gravità g (la massa m e l'accelerazione di gravità g verranno definite in seguito; ci basta però qui far riferimento alle nozioni generali che certamente il lettore possiede al riguardo). Il periodo T dovrà dunque essere espresso tramite le tre grandezze l, m e g; il modo più semplice è che sia:

$$T = K\, l^{\alpha}\, m^{\beta}\, g^{\gamma} \qquad [I.5]$$

dove K è un numero puro, e α β e γ sono tre esponenti da determinarsi. Per la condizione della omogeneità delle equazioni fisiche, il secondo membro della [I.5] deve avere, così come il primo membro, le dimensioni di un tempo. Deve cioè essere

$$[L^{\alpha}] \cdot [M^{\beta}] \cdot [(L\, T^{-2})^{\gamma}] = [T] \qquad [I.6]$$

dove si è usato il fatto che lunghezza e massa sono grandezze fondamentali (di dimensioni $[L]$ ed $[M]$ rispettivamente), mentre g ha dimensioni $[L\, T^{-2}]$. La [I.6] può anche essere scritta

$$[L^{\alpha+\gamma}] \cdot [M^{\beta}] \cdot [T^{-2\gamma}] = [T] \qquad [I.7]$$

Uguagliando gli esponenti delle grandezze che compaiono nei due membri della [I.7] si ha:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0 \\ \beta &= 0 \\ -2\gamma &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{da cui: } \beta = 0; \quad \gamma = -\frac{1}{2}; \quad \alpha = -\gamma = \frac{1}{2} \qquad [I.8]$$

La [I.5] diviene dunque

$$T = K\, l^{1/2}\, g^{-1/2} = K\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad [I.9]$$

Vedremo in effetti a suo tempo, risolvendo l'equazione dinamica del pendolo, che il suo periodo vale $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Dalla [I.9] risulta che il periodo T è proporzionale alla radice quadrata della lunghezza l ed è indipendente dalla massa m del pendolo. Se dunque la lunghezza si riduce a un quarto, il periodo si dimezza, e vale dunque circa 1 secondo (indipendentemente da quanto sia la massa m).

I.4. La grandezza fisica «tempo»

In fisica, il concetto di intervallo di tempo deriva dal concetto intuitivo di tempo come sequenza di diversi stati mentali. Una definizione di tempo, da questo punto di vista, è difficile. Si potrebbe dire, con il linguaggio comune, che l'intervallo di tempo è quanto dobbiamo aspettare perché una

cosa succeda. Fortunatamente, per quello che serve in fisica, la cosa più importante è misurare il tempo, più che definirlo in modo più o meno filosofico.

Coerentemente con lo schema generale di definizione operativa di qualunque grandezza fisica, occorre stabilire prima di tutto un *criterio di confronto* tra intervalli di tempo. In questo caso ci si basa sulla capacità di accertare la contemporaneità di due eventi (per esempio, tra lo sparo di start e lo scatto dei concorrenti in una gara di corsa).

Contemporaneità

Il concetto di uguaglianza di due intervalli di tempo è facilmente legato alla coincidenza temporale tra gli istanti iniziali (start) e finali (stop) dei due intervalli confrontati.

Un intervallo di tempo si dice *somma* di due intervalli successivi di tempo, se il suo inizio coincide con l'inizio del primo intervallo e la sua fine coincide con l'istante di fine del secondo intervallo.

Lo strumento che misura gli intervalli di tempo è detto contasecondi od orologio.

Orologio

Un orologio è uno strumento basato su un fenomeno che si ripete con regolarità: un pendolo che oscilla per azione della forza peso, un bilancere che oscilla per azione di una molla, un cristallo (per esempio di quarzo) che vibra, ecc. Per verificare che l'orologio sia riproducibile (cioè che il fenomeno su cui esso si basa si «ripete effettivamente con regolarità») si assume *per ipotesi* che qualche categoria di fenomeni sia rigorosamente ripetitiva. Per lungo tempo si è fatto riferimento ai fenomeni astronomici (il moto dei pianeti, e in particolare della Terra, intorno al Sole; la stessa rotazione della Terra sul suo asse; ecc.). Oggi si sa che non esiste fenomeno astronomico rigorosamente ripetitivo: gli orologi concettualmente più soddisfacenti sono quelli basati sulla oscillazione di un raggio di luce avanti e indietro fra due traguardi fissi; e quelli più precisi sono basati su fenomeni atomici. Tuttavia per tutti gli sviluppi che noi faremo in meccanica classica (escludendo cioè le considerazioni di Teoria della Relatività, cui dedicheremo uno spazio piuttosto modesto) sarà sufficiente far riferimento alla precisione propria degli orologi classici, basati su fenomeni meccanici e tarati in rapporto a fenomeni astronomici.

Considerato dunque un fenomeno ripetitivo (ad esempio l'oscillazione di un bilancere), diremo che esso avviene in un *secondo* se esso si ripete 86400 volte nel corso del giorno solare medio (diremo anche che l'orologio basato su quel fenomeno batte il secondo). Noi faremo l'ipotesi che tutti gli orologi battano rigorosamente il secondo.

Secondo

Considerati ora due qualunque *eventi*, rappresentati ad esempio dall'inizio e dalla fine di un certo fenomeno, diremo che fra i due eventi sono *passati* $\bar{T}$ *secondi* (o che i due eventi sono separati da $\bar{T}$ secondi; o che il fenomeno è durato $\bar{T}$ secondi) se nel frattempo l'orologio ha compiuto $\bar{T}$ oscillazioni; se $\bar{T}$ vale zero, i due eventi si dicono in *sincronismo*

Sincronismo

Si dice anche che un certo evento è *avvenuto all'istante* $\bar{T}$, se quell'evento è separato $\bar{T}$ secondi da un evento di riferimento (detto *origine dei tempi*): $\bar{T}$ è positivo se l'evento è accaduto dopo l'evento di riferimento, negativo nel caso contrario. Come noto, l'origine dei tempi del nostro calendario è posta alle ore zero del primo gennaio del primo anno dell'era cristiana. Tuttavia spesso, per descrivere l'evoluzione di un certo fenomeno, si preferisce scegliere come origine dei tempi l'istante di inizio del fenomeno stesso. Un orologio che possa essere fatto partire in sincronismo con un certo evento viene detto un *cronometro*

Cronometro

Sincronizzazione degli orologi

Orologi diversi vengono *sincronizzati* quando essi vengono regolati in modo da segnare tutti lo stesso tempo in corrispondenza di un determinato

evento. Per sincronizzare gli orologi si usa trasmettere, via radio, un segnale orario sincronizzato con un orologio di riferimento: si tratta di un metodo approssimato, perché il segnale orario impiega un certo tempo per percorrere la distanza che separa l'orologio da sincronizzare dall'orologio di riferimento; tuttavia questo effetto è trascurabile per la maggior parte degli scopi pratici.

I.5. Relazioni funzionali

Molto spesso, le grandezze fisiche che compaiono nella descrizione di un fenomeno non sono costanti, ma il loro valore può cambiare sia spontaneamente che a seguito di un nostro intervento: il tempo, la temperatura dell'ambiente, l'angolo θ che un pendolo forma con la verticale, sono esempi esplicativi di questa circostanza.

Variabili

Queste grandezze vengono dette *variabili*.

Funzioni

Capita spesso che una variabile cambi di valore in conseguenza - o in relazione - al cambiare del valore di un'altra variabile: si dice allora che *una variabile è funzione dell'altra*. Più precisamente si dice che una variabile y è funzione di un'altra variabile x quando esiste una legge di corrispondenza tra il valore di y ed il valore di x. Si può considerare la variabile x come *variabile indipendente* e la y come *variabile dipendente*. Si usa scrivere:

$$y = f(x) \quad \text{ovvero} \quad y = y(x) \quad (\text{«}y \text{ funzione di } x\text{»}).$$

Funzioni a un sol valore

Se per ogni valore di x il valore di y risulta univocamente determinato, la funzione si dice *univoca*; se, inoltre, a ogni valore di y corrisponde un solo valore di x, la funzione si dice *biunivoca* (o funzione a un sol valore).

Esempi

E.I.2. La temperatura T dell'ambiente è, in ogni località, funzione del tempo t: $T = T(t)$. Un termometro con registratore a carta, ad esempio, consente di registrare tale funzione. Ad ogni valore del tempo corrisponde un preciso e unico valore della temperatura: la funzione $T(t)$ è univoca. Viceversa, un determinato valore della temperatura può presentarsi molte volte, per diversi valori della variabile tempo: la funzione non è biunivoca.

E.I.3. La pressione atmosferica p si misura col barometro. Supponiamo che un barometro sia installato su un pallone aerostatico. Via via che aumenta la quota z del pallone, si troverà che la pressione p diminuisce. Fissate le condizioni atmosferiche, ad ogni valore della quota z corrisponde un preciso valore di p. La pressione di p è dunque funzione della quota z: $p = p(z)$. Se la quota è diversa, la pressione p è diversa: la funzione $p(z)$ è una funzione a un sol valore.

Esistono molti modi diversi per esprimere una funzione, cioè per rappresentare la legge che lega fra di loro due variabili.

I.5.1. *Rappresentazione tabulare*

Rappresentazione tabulare

Consiste nello scrivere una tabellina, nella quale su due colonne parallele vengono rappresentati, uno vicino all'altro, valori corrispondenti delle due variabili.

Esempio

E.I.4. In una certa località, la temperatura ambiente T viene misurata ogni tre ore, a partire dalle tre di mattina fino alla mezzanotte. Il giorno 1 gennaio sono stati rilevati i seguenti valori della temperatura (espressi in gradi centigradi): $-0{,}1$; $-1{,}0$; $+2{,}9$; $+7{,}1$; $+9{,}3$; $+6{,}1$; $+3{,}8$; $+0{,}8$. Esprimete la funzione T (funzione del tempo t) in forma tabulare.

La funzione $T(t)$ è espressa dalla seguente tabella:

tempo t (data e ora)	temperatura T (gradi centigradi)
1/1 ore 3	− 0,1
1/1 » 6	− 1,0
1/1 » 9	+ 2,9
1/1 » 12	+ 7,1
1/1 » 15	+ 9,3
1/1 » 18	+ 6,1
1/1 » 21	+ 3,8
1/1 » 24	+ 0,8

La forma tabulare è quella in cui, spesso, vengono posti i risultati sperimentali via via che li si ricava dalle misure. Alla semplicità di questa rappresentazione si contrappone la scarsa efficacia e maneggevolezza. In particolare, la tabella esprime solo i valori che la variabile dipendente (nel nostro esempio la temperatura) assume in corrispondenza di alcuni particolari valori della variabile indipendente (tempo). È chiaro invece che la temperatura aveva dei precisi valori anche in corrispondenza di ogni altro valore del tempo, ed è solo per colpa di manchevolezze nel dispositivo di misura (che registra il valore della temperatura solo a certe ore) e/o della tecnica di rappresentazione della funzione, che noi conosciamo la temperatura solo a certe ore.

I.5.2. *Rappresentazione grafica*

I valori di una variabile x possono essere rappresentati graficamente su una retta orientata (asse). A tal fine si prende convenzionalmente sulla retta una *origine* O, corrispondente allo zero della variabile x; si sceglie un orientamento come positivo (di solito si sceglie come positivo il verso da sinistra verso destra, e noi ci atterremo a questa convenzione); si sceglie una *unità di misura* per le lunghezze. Un valore $\bar{x}$ della variabile x è rappresentato dal punto $\bar{P}$ che si trova alla distanza (misurata nelle unità di misura scelte) pari a $\bar{x}$ dall'origine, a destra o a sinistra a seconda che $\bar{x}$ sia positivo o negativo (corrispondenza biunivoca fra i punti della retta e i numeri reali).

Rappresentazione grafica

L'asse rappresentativo della variabile viene detto *asse coordinato*, e il numero $\bar{x}$ viene detto la *coordinata* di $\bar{P}$.

Coordinata, ascisse e ordinata

Per comodità, sull'asse coordinato vengono spesso indicati con opportune tacche i multipli ed eventuali sottomultipli dell'unità di misura.

Se si scelgono due assi coordinati fra loro ortogonali, con l'origine nel loro punto di incontro, viene a stabilirsi una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano individuato dai due assi e le coppie ordinate di numeri reali assunti da due variabili x e y (sistema di assi cartesiani). Sull'asse orizzontale (detto asse delle

ascisse o delle x) si rappresenta usualmente la variabile indipendente; sull'asse verticale (asse delle *ordinate* o delle y) la variabile dipendente. La coppia ordinata di numeri reali $\bar{x}$, $\bar{y}$ corrispondente al punto $\bar{P}$ è data dalle coordinate, sui due assi, delle proiezioni $\bar{P}_x$ e $\bar{P}_y$ del punto $\bar{P}$ sull'asse x e y rispettivamente.

Esempio

E.I.5. La rappresentazione grafica della funzione tabulata nell'esempio I.3 è quella mostrata in questa figura, in cui l'asse delle ascisse si riferisce alla variabile t (tempo) e l'asse delle ordinate alla variabile dipendente temperatura T.

Rispetto alla rappresentaziona tabulare (nella quale non vi sono difficoltà a scrivere ogni numero con tutte le cifre significative che ci sono state fornite dalla misura o dal calcolo), la rappresentazione grafica ha lo svantaggio di essere meno precisa. Tuttavia, come si vede dalla figura, essa ha il vantaggio di rendere evidente a un solo sguardo l'andamento della funzione: nel caso in esame, è evidente il minimo di temperatura intorno alle sei di mattina, il graduale aumento fino a raggiungere il massimo intorno alle 14, e poi la progressiva diminuzione andando verso le ore della sera e della notte.

La rappresentazione grafica «dei punti» che abbiamo visto nell'esempio I.5 ha, come la rappresentazione tabulare, il difetto di fornire il valore della variabile dipendente solo in corrispondenza di particolari valori della variabile indipendente. Tuttavia questo limite – che è intrinseco della rappresentazione tabulare – può invece essere superato nella rappresentazione grafica, che consente di indicare la funzione con una linea continua che ci presenta i valori $y(\bar{x})$ che la variabile dipendente assume in corrispondenza di ogni possibile valore $\bar{x}$ della variabile indipendente. In linea di principio, tale linea continua potrebbe essere tracciata solo conoscendo a priori il valore di y corrispondente a ogni valore di x.

Tuttavia, anche quando il punto di partenza sia rappresentato solo da un numero limitato di coppie di valori x, y, la rappresentazione grafica si presta facilmente a un processo di interpolazione consistente nel far passare una linea regolare attraverso i punti che ci sono noti, e di stimare così il valore di y anche in corrispondenza di valori della x intermedi fra quelli forniti dalla misura.

Evidentemente, il processo di interpolazione non è univoco. Ad esempio, tanto la curva (1) che la curva (2) sono compatibili con i punti a noi noti, pur fornendo valori della y diversi in corrispondenza di valori intermedi della variabile.

Esistono però dei criteri che ci consentono di scegliere la più plausibile fra le varie curve interpolanti un certo numero di punti noti. Questi criteri appartengono a due principali categorie: *a) criteri di natura fisica*, derivanti da nostre conoscenze di origine sperimentale o teorica sul fenomeno in oggetto. Ad esempio considerazioni sulla *inerzia termica* dell'ambiente (cioè sulla sua resistenza a subire brusche variazioni di temperatura) possono indicarci come poco probabile una funzione che rappresenta (come la curva (2)) repentini cambiamenti di temperatura nel giro di pochi minuti, ecc; *b) criteri di natura statistica o probabilistica*. Nell'esempio della figura, è abbastanza intuitivo comprendere che, qualora la funzione $T(t)$ fosse la curva (2), sarebbe stato estremamente improbabile che le misure sperimentali venissero casualmente eseguite proprio per quei valori del tempo cui corrispondono valori della temperatura così regolarmente allineati.

Questi criteri fisici e statistici sono organizzati in forma sistematica nella teoria delle misure e degli errori, che noi non tratteremo in questo libro, limitandoci qui a presentare un semplice esempio.

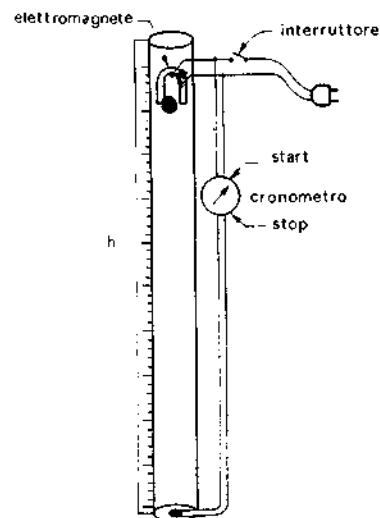
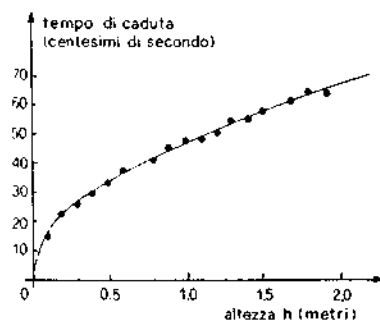
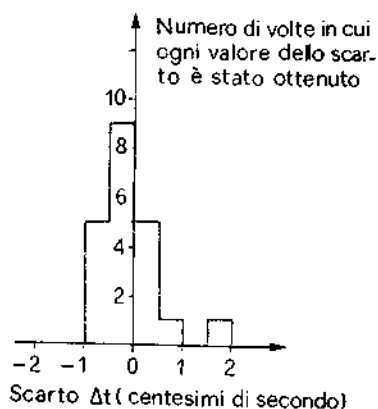
Esempio

E.I.6. *Se da una certa altezza h si lascia cadere, partendo da fermo, un piccolo oggetto pesante (ad esempio una pallina di ferro), il tempo t che esso impiega per arrivare a terra dipende dalla altezza h. Si vuole determinare la legge che lega t ad h: cioè si vuole determinare la funzione $t = t(h)$.*

Prendiamo un tubo di vetro, dentro cui si realizza il vuoto pneumatico in modo da rendere trascurabile la resistenza che l'aria offre alla caduta. La pallina di ferro viene sostenuta da un elettromagnete, che può essere posto inizialmente a qualunque altezza h nota all'interno del tubo. Interrompendo la corrente nell'elettromagnete, la pallina inizia da ferma la sua caduta. Contemporaneamente, viene fatto partire un cronometro elettronico (supponiamo che la sua sensibilità sia il centesimo di secondo); cronometro che si arresta automaticamente quando la pallina raggiunge il fondo del tubo.

Misurando così il tempo t di caduta corrispondente a diverse altezze h di caduta, si trovano i risultati riportati nelle colonne 2 e 3 della tabella.

Riportando questi risultati in un grafico, si ottengono i punti mostrati nella figura. Se si disegna una curva regolare che mediamente interpoli i punti sperimentali (così come mostrato nella stessa figura), si riscontra che questi ultimi fluttuano leggermente intorno alla curva stessa; tuttavia è legittimo sospettare che queste fluttuazioni siano dovute ad errori sperimentali casuali.

Vedremo in seguito che, in base a varie considerazioni, ci si aspetta che il tempo t di caduta sia legato all'altezza h da una legge del tipo $t = k\sqrt{\frac{h}{g}}$.

misura numero	altezza h (mm)	tempo t (centesimi secondo)	$k = t\sqrt{\frac{g}{h}}$	$\bar{t} = \bar{k}\sqrt{\frac{h}{g}}$ (10^{-2} sec)	$\Delta t = t - \bar{t}$ (10^{-2} sec)
1	100	15	1,45	14,3	0,7
2	200	22	1,54	20,3	1,7
3	300	25	1,43	24,8	0,2
4	400	29	1,44	28,3	0,7
5	500	32	1,42	32,0	0,0
6	600	35	1,42	35,1	− 0,1
7	700	38	1,42	37,9	0,1
8	800	40	1,40	40,5	− 0,5
9	900	43	1,42	43,0	0,0
10	1000	45	1,41	45,3	− 0,3
11	1100	47	1,40	47,5	− 0,5
12	1200	49	1,40	49,6	− 0,6
13	1300	51	1,40	51,7	− 0,7
14	1400	53	1,40	53,6	− 0,6
15	1500	55	1,41	55,5	− 0,5
16	1600	57	1,41	57,3	− 0,3
17	1700	59	1,42	59,1	− 0,1
18	1800	61	1,42	60,8	0,2
19	1900	62	1,40	62,4	− 0,4
20	2000	64	1,41	64,1	− 0,1

Che i punti sperimentali obbediscano abbastanza bene a questa legge, può essere verificato calcolando, coi risultati per t ed h ottenuti in ogni singola misura, il relativo valore di $k = t\sqrt{\frac{g}{h}}$. Si ottengono i valori di k riportati nella colonna 4 della tabella. Ancora una volta, è ragionevole imputare le fluttuazioni che k presenta ad errori sperimentali casuali. Il valore medio fra tutti i valori di k così trovati è $\bar{k} = 1{,}419$.

Errori casuali

[Vedremo più avanti, risolvendo l'equazione dinamica della caduta di un grave, che in queste condizioni la legge con cui la pallina cade è $t = k\sqrt{\frac{h}{g}}$, con $k = \sqrt{2} = 1{,}414$. Dunque i risultati del nostro esperimento sono in buon accordo con la teoria].

Usando questo valore $\bar{k}$ per k, in base alla legge $t = t(h) = 1{,}419\sqrt{\frac{h}{g}}$ possiamo ora calcolare il valore di t corrispondente ad ogni possibile valore di h. Si ottiene una curva che è praticamente indistinguibile da quella che avevamo tracciato interpolando i punti sperimentali: una curva $t(h)$ che possiamo ritenere rappresentare la realtà meglio dei risultati di ogni singola misura, considerato che nel suo calcolo abbiamo mediato e quindi in qualche modo realizzato una compensazione fra gli errori casuali da cui ogni singola misura è affetta. Il valore del tempo $\bar{t}$ di caduta corrispondente alle altezze h utilizzate nell'esperimento, calcolato usando la curva $t = \bar{k}\sqrt{\frac{h}{g}}$, è riportato nella colonna 5 della tabella. Le differenze $\Delta t = t - \bar{t}$ (dette «scarti») fra la curva e i valori sperimentali (colonna 6 della tabella) possono essere considerate rappresentative degli errori casuali. Riportando tali scarti in un istogramma analogo a quello del par. I.2, otteniamo il grafico mostrato in figura. La larghezza di questa distribuzione ci dice che ogni valore di t è affetto da un errore standard $\pm\,\sigma \simeq \pm\,0{,}5$ centesimi di secondo; e meglio di così non potevamo aspettarci di ottenere considerato che la sensibilità del cronometro che noi abbiamo usato per misurare il tempo era pari a un centesimo di secondo.

Scarti

I.5.3. *Rappresentazione analitica*

Rappresentazione analitica

Nell'esempio I.6 siamo partiti da una rappresentazione tabulare di una funzione; e siamo approdati non solo a una rappresentazione grafica mediante una linea continua, ma anche alla legge espressa in forma matematica $t(h) = k\sqrt{\frac{h}{g}}$, con k e g a rappresentare delle grandezze costanti e note. In questa formulazione, la funzione è espressa indicando quali operazioni matematiche vanno eseguite sulla variabile indipendente h per ottenere la variabile dipendente t: si dice allora che la funzione è espressa in *forma analitica*. È questo il modo più potente ed efficace di esprimere una funzione: esso consente infatti di ricavare il valore della variabile dipendente in corrispondenza di qualunque possibile valore assunto dalla variabile indipendente nel problema considerato, e di ricavarlo con tutta la precisione compatibile con la nostra conoscenza delle grandezze in gioco.

Nel seguito, ogni qualvolta diremo che è nota una grandezza fisica y in funzione di un'altra grandezza fisica x, intenderemo che della funzione $y = y(x)$ ci è nota la forma analitica. Non discuteremo invece attraverso quali procedure tale forma analitica sia stata dedotta a partire dai risultati diretti delle misure.

A proposito della relazione funzionale, espressa in forma analitica, fra due grandezze fisiche x e y, è opportuno fare le seguenti osservazioni:

Campo di definizione

a) In matematica, accanto alla espressione analitica di una funzione $y = y(x)$, si usa specificare quello che si chiama il «campo di definizione» della funzione considerata: si specifica cioè per quali valori della variabile x ha senso eseguire le operazioni indicate dalla espressione $y = y(x)$. Ad esempio, se la funzione

$y = y(x)$ è $y = \sqrt{x}$, il campo di definizione è rappresentato da $0 \leq x < +\infty$: l'operazione di radice quadrata può infatti essere eseguita per qualunque valore positivo della variabile reale x, ma non è definita (nell'ambito dei numeri reali) per valori negativi della variabile x.

Questa esigenza - di specificare il campo di definizione delle funzioni - vale a maggior ragione in fisica. Può capitare infatti - ed è anzi la norma - che il campo di validità di una relazione fisica sia meno ampio di quanto indicato dalle mere relazioni matematiche. Ad esempio, vedremo che la relazione che lega l'altezza h di un grave (cioè di un corpo sottoposto alla sola forza peso) lanciato verso l'alto, al tempo t che passa, è del tipo $h = a + b\,t + c\,t^2$, con a, b e c parametri costanti. Questa funzione è definita, dal punto di vista matematico, per qualunque valore di t; tuttavia essa descrive correttamente il fenomeno fisico solo per valori di t compresi fra t_0 e t_1 ($t_0 \leq t \leq t_1$), dove t_0 e t_1 rappresentano rispettivamente l'istante in cui il sasso viene lanciato e quello in cui esso cade a terra.

b) Le funzioni analitiche sono, dal punto di vista matematico, relazioni esatte. Ciò non accade invece in generale per le leggi fisiche, ricavate dall'esperimento. Infatti, i valori dei parametri che compaiono nella funzione sono di regola conosciuti con un certo errore. Ad esempio, nella legge $t = k\sqrt{\dfrac{h}{g}}$ discussa nell'esempio I.6, sia il parametro k che il parametro g sono noti (almeno allo stadio sperimentale descritto nell'esempio) a meno di un certo errore.

Solo per leggi di carattere generale, inquadrate in una consolidata teoria, si ammette per estrapolazione induttiva che esse siano rappresentate da relazioni esatte. Ad esempio la legge di conservazione dell'energia è espressa da una relazione di uguaglianza dalla quale non sono mai state riscontrate deviazioni per quanto precisi siano stati gli esperimenti di verifica: cosicché si ammette - salvo che un giorno non capiti di trovarne improbabile smentita in qualche categoria di fenomeni per ora sconosciuti - che essa rappresenti una legge esatta.

I.6. Alcune proprietà delle funzioni

Una funzione, cioè la legge che lega fra di loro due variabili, può essere caratterizzata da diverse sue proprietà. Ad esempio può capitare che una funzione goda della proprietà che, dai due qualunque valori x_1 ed x_2 della variabile indipendente da $x_2 > x_1$, segue sempre $y(x_2) > y(x_1)$. In questo caso la funzione si dice *monotona crescente* (monotona *non decrescente* qualora sia $y(x_2) \geq y(x_1)$ per ogni $x_2 > x_1$). Viceversa se per ogni $x_2 > x_1$ è $y(x_2) < y(x_1)$ ($y(x_2) \leq y(x_1)$) la funzione si dice *monotona decrescente* (non crescente).

Funzioni monotone

La differenza $\Delta x = x_2 - x_1$ viene detta anche *incremento* della variabile indipendente x; e la differenza $\Delta y = y(x_2) - y(x_1)$ è detta incremento della funzione relativo al fissato $\Delta x \neq 0$. Il rapporto $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ viene detto *rapporto incrementale* della funzione relativamente all'incremento Δx della variabile indipendente.

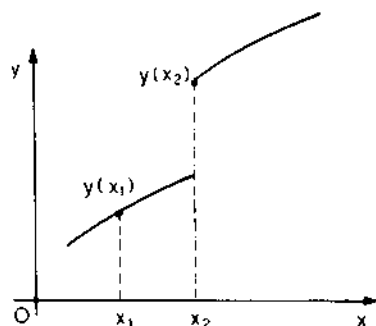
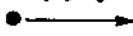
Incremento

Rapporto incrementale

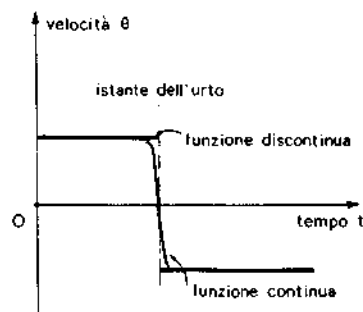
La definizione delle funzioni monotone risulta particolarmente compatta usando il rapporto:

Se $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0\ (\geq 0)$ per ogni $x_1 \neq x_2$ la funzione è monotona crescente (non decrescente).

Se $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0\ (\leq 0)$ per ogni $x_1 \neq x_2$ la funzione è monotona decrescente (non crescente).

Se quando x_1 si avvicina a x_2 (cioè quando Δx si avvicina a zero), $y(x_1)$ si avvicina indefinitamente a $y(x_2)$ (cioè Δy si avvicina indefinitamente a zero), la funzione si dice *continua*. Questo concetto verrà ulteriormente precisato nel secondo

Funzione continua

capitolo. Dal punto di vista grafico, una funzione il cui diagramma sia una linea senza interruzioni è una funzione continua. Ad esempio la funzione espressa dal diagramma della figura *non* è continua: quando x_1 si avvicina a x_2, $y(x_1)$ non si avvicina indefinitamente ad $y(x_2)$.

Le leggi macroscopiche della fisica (cioè le leggi relative al comportamento di oggetti abbastanza grandi da essere direttamente accessibili alla osservazione da parte dei nostri sensi) sono rappresentate da funzioni continue. Ciò non toglie che in alcuni particolari casi non sia conveniente schematizzare il comportamento di oggetti fisici mediante funzioni *non* continue. Ad esempio, supponiamo che una pallina rigida (ad esempio di vetro) venga lanciata contro una lastra anch'essa rigida. Prima dell'urto, la velocità v della pallina è diretta verso la lastra (possiamo assumere, convenzionalmente, che essa sia positiva, $v > 0$); subito dopo l'urto, il suo verso si è invertito (essa è negativa, $v < 0$). In realtà, nel brevissimo tempo in cui è avvenuto l'urto, la pallina è stata rallentata, si è fermata ($v = 0$), e poi ha acquistato velocità di segno opposto (linea sottile in figura); tuttavia può essere conveniente, per molti scopi, schematizzare l'andamento della velocità con una funzione discontinua (linea in grassetto).

Capitolo secondo

Cinematica del punto materiale

La cinematica è quel capitolo della fisica che si occupa di *descrivere* il moto degli oggetti, senza porsi il problema di collegare il moto alle cause che lo determinano.

Cinematica

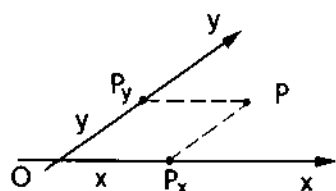
Nell'ambito della cinematica (e più in generale della meccanica) il più semplice fra i sistemi fisici è quello schematizzabile come un *punto materiale*; lo studio della cinematica del punto materiale ci consentirà di introdurre una quantità di concetti la cui utilità si estende al caso di sistemi fisici più complessi.

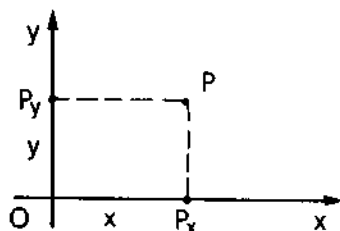
Punto materiale

Si dice che *un sistema fisico è schematizzabile come punto materiale* (ovvero che esso *si comporta* come un punto materiale) *se le sue dimensioni lineari sono piccole rispetto alla precisione con cui ci interessa determinarne la posizione.*

Ad esempio se si vuole individuare la posizione di una nave in navigazione nell'oceano, si usa dare le sue coordinate geografiche: valore di latitudine e valore di longitudine rispetto a un parallelo e a un meridiano di riferimento. Non ci chiederemo se quelle coordinate individuano la prua o la poppa della nave: la precisione che ci interessa non arriva a questo livello di dettaglio. La nave si comporta allora, per definizione, come un punto materiale. Quando la stessa nave entra in porto (e si sta muovendo entro uno spazio di dimensioni confrontabili con quelle sue proprie) la schematizzazione di punto materiale non è più adeguata a descrivere il moto. Non ci basta più conoscere *dove si trova la nave*, ma dove passa con precisione, la sua prua, la sua poppa, la sua fiancata destra o sinistra: ciascuno di questi suoi punti potrebbe, ad esempio, urtare un ostacolo che pure è stato evitato dalle altre parti della nave.

Da un punto di vista grafico, un punto materiale può essere rappresentato come un punto geometrico.

Abbiamo detto che la cinematica si occupa di descrivere il moto degli oggetti; la cinematica del punto materiale si occupa dunque di descrivere come varia la posizione di un punto materiale via via che passa il tempo. Per fare ciò è necessario in primo luogo dare la definizione operativa della grandezza fisica *posizione*. L'obiettivo della cinematica sarà poi quello di esprimere la posizione in funzione del tempo.

II.1. La posizione

Sistema di assi coordinati nel piano

La posizione di un corpo è nota quando sappiamo *dove* si trova. In uno spazio completamente vuoto (omogeneo ed isotropo) tutte le posizioni sarebbero fra di loro equivalenti. Perciò la posizione è un concetto relativo: ha senso parlare della posizione di un corpo solo rispetto alla posizione di altri corpi (o di entità geometriche) che vengono presi come riferimento.

L'insieme dei riferimenti scelti per individuare la posizione dei corpi che si trovano in una certa porzione di spazio viene detto un *sistema di riferimento*.

Sistema di assi coordinati ortogonali nel piano

Consideriamo prima il caso in cui un punto materiale sia vincolato a muoversi lungo una retta. Il sistema di riferimento può essere allora dato semplicemente da un asse coordinato assunto lungo quella retta: scelto un punto della retta come *origine*, scelto un *verso* come positivo, scelta una *unità di misura* per misurare le distanze, la posizione del punto è individuata da un *unico numero reale* (detto *coordinata* del punto); cioè da quel numero che rappresenta, nelle unità scelte, la distanza del punto dall'origine, positivo se il punto è a valle dell'origine (negativo se a monte) rispetto al verso assunto come positivo. Se un punto è vincolato a muoversi su un piano, allora il sistema di riferimento può essere costituito da due assi coordinati (detti assi x e y rispettivamente) appartenenti al piano e intersecantisi in un punto assunto come origine per entrambi: la posizione di un punto materiale P è in corrispondenza biunivoca con le coppie ordinate di numeri reali (x, y) che rappresentano le coordinate lungo i due assi delle proiezioni del punto P parallelamente agli assi. Se gli assi sono fra di loro ortogonali il sistema si dice un sistema di assi ortogonali o un sistema cartesiano. Noi useremo sempre sistemi di assi ortogonali.

Sistema di assi coordinati ortogonali nello spazio

Se un punto si muove nello spazio, il sistema di riferimento può essere rappresentato da tre assi x, y, z non coplanari (noi li prenderemo fra di loro ortogonali) intersecantisi in un punto assunto come origine comune. La posizione di un punto P è allora in corrispondenza biunivoca con le terne x, y, z ordinate di numeri reali che rappresentano le coordinate lungo i tre assi delle rispettive proiezioni del punto P.

A volte, può essere comodo *non* assumere le stesse unità di misura per le distanze misurate lungo i tre assi: ad esempio, nel caso di un aereo, la quota può essere misurata in metri; mentre la sua posizione a terra può essere piú convenientemente individuata da distanze misurate in chilometri.

Sistema levogiro

Nel sistema di riferimento indicato in figura, il verso positivo degli assi è stato scelto in modo che, personificandosi con l'asse z, si deve ruotare in senso antiorario l'asse x perché vada a sovrapporsi (girando di 90°) con l'asse y. È questa la convenzione normalmente usata per i versi positivi degli assi: il sistema si dice un sistema «levogiro».

Spazio a tre dimensioni

Poiché i punti dello spazio sono in corrispondenza biunivoca con una *terna* ordinata di numeri reali (che rappresentano le coordinate delle proiezioni del punto su tre assi rettilinei), si usa dire che lo spazio ha *tre* dimensioni. Analogamente, si dice che il piano ha due dimensioni (si dice anche che i punti del piano costituiscono uno *spazio a due dimensioni*); i punti di una retta costituiscono uno spazio a una dimensione.

Gradi di libertà

Il numero di parametri fra di loro indipendenti che servono per individuare la posizione di un sistema fisico viene detto numero di *gradi di libertà* di quel sistema fisico.

Così ad esempio un punto materiale che si muove liberamente nello spazio, ha tre gradi di libertà; un punto materiale che si muove liberamente su un piano ha due gradi di libertà. Tuttavia in generale il numero di gradi di libertà di un sistema *non* coincide con il numero di dimensioni dello spazio in cui il sistema si muove. Se un sistema fisico non è puntiforme, non è sufficiente stabilire la posizione di un punto appartenente al sistema per stabilire la posizione del sistema. Il numero di gradi di libertà di un sistema non puntiforme liberamente mobile è più grande del numero di dimensioni dello spazio in cui il sistema si muove. Se il sistema non si muove liberamente, ma è *vincolato*, il numero dei suoi gradi di libertà diminuisce.

Sistemi vincolati

Esempi

E.II.1. *Un sistema fisico è formato da N punti materiali che possono muoversi liberamente nello spazio, l'uno indipendentemente dagli altri. Quanti gradi di libertà ha il sistema?*

Indichiamo con P_i il generico fra i punti del sistema; l'indice i può essere un qualunque numero compreso fra 1 ed N ($i = 1, ..., N$). La posizione del punto P_i è specificata dalle tre coordinate x_i, y_i, z_i. Poichè i può assumere N valori, il numero totale di coordinate degli N punti materiali è $3N$. I punti si possono muovere tutti indipendentemente, e dunque, i $3N$ parametri sono tutti fra di loro indipendenti: il sistema materiale ha $3N$ gradi di libertà.

E.II.2. *Un sistema materiale è costituito da una sbarretta rigida (cioè indeformabile) di sezione trascurabile e lunghezza l, liberamente mobile nello spazio. Quanti gradi di liberà possiede?*

Se si specifica la posizione di un qualunque punto appartenente al sistema (ad esempio l'estremo A) fornendone le tre coordinate x_A, y_A, z_A la posizione del sistema *non* è completamente determinata. Essa risulta invece completamente determinata assegnando anche le tre coordinate di un altro punto, ad esempio dell'estremo B. Tuttavia questi sei parametri *non* sono fra di loro indipendenti: essendo la sbarretta rigida, la distanza fra A e B deve valere necessariamente l. La condizione perché ciò accada è (come si ricava per semplice applicazione del teorema di Pitagora):

5 G.d.L. —▷

$$l = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Questa relazione consente di esprimere uno qualunque dei sei parametri in funzione degli altri cinque. La sbarretta rigida ha cinque gradi di libertà.

Un altro modo normalmente adottato per specificare la posizione di un segmento AB è quello di dare, oltre alle coordinate dell'estremo A, i coseni $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ degli angoli che il segmento $\overline{AB}$ forma con gli assi coordinati («coseni direttori» del segmento). Poiché dalla geometria si ha la condizione $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, i sei parametri y_A, y_A, z_A, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ non sono fra di loro indipendenti; cinque numeri bastano per stabilire la posizione del sistema, a conferma del fatto che esso ha cinque gradi di libertà.

E.II.3. *Quale è il numero di gradi di libertà di un sistema rigido liberamente mobile nello spazio?*

Specificando la posizione di un segmento qualunque AB appartenente al sistema (il che richiede, come risulta dall'esempio E.II.2, cinque parametri) la posizione del sistema *non* è completamente definita: esso può infatti assumere posizioni diverse ruotando intorno al segmento AB. La rotazione del sistema intorno al

segmento *AB* può essere definita specificando un solo angolo (come per esempio per una porta che ruota sul suo asse, per cui basta dare l'angolo tra il piano della porta ed un piano di riferimento). In totale servono dunque sei parametri: il sistema ha sei gradi di libertà.

E.II.4. *Un punto materiale che si muove su un piano è vincolato a percorrere una traiettoria circolare di raggio R. Quanti sono i suoi gradi di libertà?*

La posizione del punto può essere specificata dalle sue coordinate x, y: per comodità, abbiamo supposto che l'origine del sistema di riferimento sia posta al centro della circonferenza su cui il punto si muove. Poiché sappiamo che il punto si muove sulla circonferenza, le coordinate x, y non sono fra di loro indipendenti: infatti, come risulta dal disegno, deve essere $x^2 + y^2 = R^2$. Il punto materiale ha un solo grado di libertà.

Traiettoria

Ascissa curvilinea

Facciamo a questo punto due osservazioni: *a*) con la parola *traiettoria* abbiamo inteso (coerentemente con il linguaggio comune) il luogo dei punti che il punto materiale va ad occupare durante il suo moto; *b*) qualunque punto materiale mobile su una traiettoria prestabilita (nel piano o nello spazio) ha un solo grado di libertà. Per definirne la posizione basta fissare sulla traiettoria una origine, un verso e una unità di misura per le lunghezze: la posizione è definita dalla distanza con segno *misurata lungo la traiettoria* a partire dall'origine («ascissa curvilinea»). Un esempio di ascissa curvilinea è la distanza misurata dalle pietre miliari su una strada.

II.2. I vettori: definizioni

Rappresentazione grafica di un vettore

Grandezze scalari e vettoriali

L'istante di tempo in cui ha luogo un evento, o la lunghezza del lato di una figura geometrica, sono grandezze fisiche la cui misura è espressa da un numero. La posizione di un punto materiale nello spazio può essere espressa invece solo specificando *tre* numeri che, se il punto si muove liberamente, sono fra di loro indipendenti. Nella fisica, e in particolare nella meccanica, si incontrano molte grandezze che hanno proprietà analoghe a quelle della posizione di un punto materiale: tanto che conviene introdurre un formalismo adatto a trattare queste grandezze in maniera più compatta. Queste grandezze vengono dette *grandezze vettoriali*; mentre le grandezze espresse da un solo numero sono dette grandezze *scalari*. L'esistenza di grandezze vettoriali richiede un'estensione, per altro banale, della definizione operativa delle grandezze fisiche: una grandezza fisica, in effetti, la si ritiene definita quando sia stata specificata la procedura per determinare tutti i numeri che servono per caratterizzarla.

Intensità, direzione e verso

Un *vettore* è una grandezza che può essere rappresentata da un segmento orientato: essa è dunque caratterizzata, oltre che dalla sua *intensità* o *modulo* (rappresentato, in unità convenzionali, dalla lunghezza del segmento) anche da una *direzione con verso* (rappresentata dalla direzione e verso del segmento).

Per indicare che una grandezza fisica è una grandezza vettoriale, la indicheremo con una lettera con sovrapposta una freccia: ad esempio $\vec{v}$.

Punto di applicazione
Estremo libero

Di solito, per rendere graficamente più evidente il verso del segmento rappresentativo di un vettore, esso viene indicato con una freccia. Il punto *O* da cui il vettore parte viene detto *punto di applicazione*; il punto *P* in cui il vettore termina è detto *estremo libero*. Due segmenti che abbiano la stessa lunghezza, la stessa direzione e verso (ma diverso punto di applicazione) vengono detti fra di loro *equipollenti*: essi rappresentano lo stesso vettore (vettore libero).

Vettore libero

Vettore applicato

Talvolta è comodo specificare anche le coordinate del punto *O* di applicazione del vettore: quando ciò sia stato fatto si parla di *vettore applicato* (con *vettore* senza aggettivi si intende il vettore libero).

Fissato un sistema di riferimento, un vettore libero nello spazio può essere rappresentato da tre numeri: ad esempio la sua intensità, e due suoi coseni direttori (il terzo coseno direttore è ricavabile dagli altri due); oppure dalle lunghezze delle tre proiezioni del vettore lungo gli assi (queste lunghezze vengono dette *componenti* del vettore). Un vettore applicato è specificato da sei numeri. Consideriamo un certo vettore $\vec{v}$. Indichiamo con v il suo modulo; con v_x, v_y, v_z le sue componenti; con $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i suoi coseni direttori. Sussistono evidentemente (come segue da semplici considerazioni geometriche) le seguenti relazioni:

Componenti

$$\begin{cases} v_x = v\cos\alpha \\ v_y = v\cos\beta \\ v_z = v\cos\gamma \end{cases} \qquad [II.1]$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \qquad [II.2]$$

Nella figura, per semplicità, riportiamo un vettore che giaccia sul piano (x, y). La sua componente z è nulla.

Per indicare che un vettore $\vec{v}$ ha componenti v_x, v_y e v_z scriveremo $\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$.

Un vettore di modulo pari ad uno viene detto un *versore*, ed indicato con un accento circonflesso sopra la lettera rappresentativa, ad esempio con $\hat{v}$. Le componenti di un versore sono semplicemente i suoi coseni direttori. I versori degli assi coordinati x, y, z (vettori unitari orientati come gli assi coordinati) verranno da noi indicati rispettivamente con $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$. Si ha evidentemente:

Versore

$$\hat{\imath} \equiv (1,\ 0,\ 0); \quad \hat{\jmath} \equiv (0,\ 1,\ 0); \quad \hat{k} \equiv (0,\ 0,\ 1) \qquad [II.3]$$

Consideriamo un vettore $\vec{v}$; e, scelto un sistema di riferimento (x, y, z), siano v_x, v_y, v_z le componenti del vettore.

Consideriamo ora un secondo sistema di riferimento (x', y', z') con la stessa origine $(0' \equiv 0)$, ma ruotato rispetto al sistema (x, y, z). Per semplicità supponiamo che la rotazione sia stata di un angolo α intorno all'asse z, cosicché sia $z' \equiv z$.

Ci chiediamo che relazioni ci siano fra le componenti v'_x, v'_y, v'_z di $\vec{v}$ nel sistema x', y', z' e le componenti v_x, v_y, v_z di $\vec{v}$ nel sistema x, y, z. Si ha intanto $v'_z = v_z$, per cui ci resta solo da determinare le relazioni fra v'_x, v'_y e v_x, v_y.

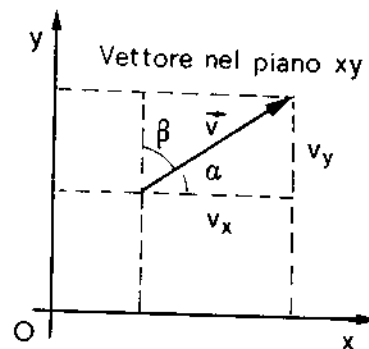
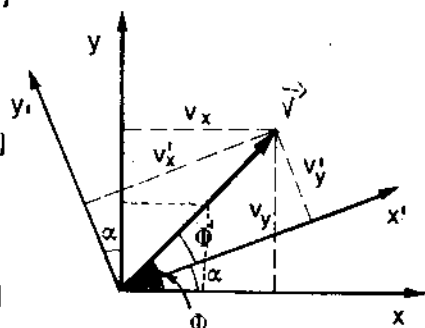
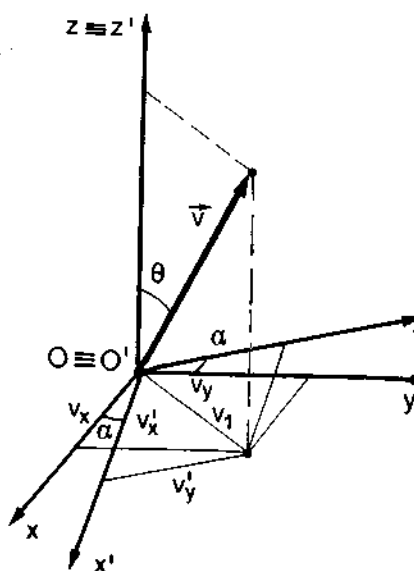
Per maggiore chiarezza grafica, riportiamo di fianco la proiezione del disegno precedente sul piano xy. Sia $v_\perp$ la proiezione di $\vec{v}$ sul piano (x, y). Si ha:

$$\begin{cases} v'_x = v_\perp \cos\Phi' \\ v'_y = v_\perp \sin\Phi' \end{cases} \qquad [II.4]$$

Poiché $\Phi' = \Phi - \alpha$, la [II.4] può essere scritta come

$$\begin{cases} v'_x = v_\perp (\cos(\Phi - \alpha) = v_\perp (\cos\Phi\cos\alpha + \sin\Phi\sin\alpha) \\ v'_y = v_\perp \sin(\Phi - \alpha) = v_\perp (\sin\Phi\cos\alpha - \cos\Phi\sin\alpha) \end{cases} \qquad [II.5]$$

E poiché $v_\perp \cos\Phi = v_x$ e $v_\perp \sin\Phi = v_y$, le [II.5] divengono:

$$\begin{cases} v'_x = v_x\cos\alpha + v_y\sin\alpha \\ v'_y = -v_x\sin\alpha + v_y\cos\alpha \end{cases} \qquad [II.6]$$

Le [II.6], insieme a $v'_z = v_z$, possono essere scritte in forma compatta usando il formalismo delle matrici (vedi par. II.3):

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \qquad \text{[II.7]}$$

La [II.7] rappresenta la legge di trasformazione delle componenti v_x, v_y, v_z di un vettore per rotazione del sistema di riferimento di un angolo α intorno all'asse z.

Viceversa tre numeri (v_x, v_y, v_z) rappresentano le componenti di un vettore se (e solo se) essi si trasformano secondo l'equazione [II.7] per rotazione del sistema di riferimento di un angolo α intorno all'asse z.

II.3. Alcune definizioni relative alle matrici

Matrici

La equazione [II.7] è stata scritta usando il formalismo delle matrici. Questo formalismo viene trattato in maniera approfondita nei corsi di matematica; noi ci limitiamo a richiamare in questo paragrafo le poche definizioni che ci saranno utili in questo libro.

Una matrice A è una tabella di numeri ordinati per righe e per colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1} & a_{M2} & a_{M3} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix}$$

Elemento di matrice

Matrice quadrata

Come si vede, l'elemento generico della matrice viene indicato da una lettera con due indici: a_{ij}. Il primo indice i ($i = 1 \dots M$) è l'indice di riga; il secondo indice j ($j = 1 \dots N$) è l'indice di colonna: ad esempio l'elemento a_{23} è quello situato sulla seconda riga alla terza colonna. Se il numero M di righe è uguale al numero N di colonne la matrice si dice *quadrata*.

Somma di matrici

Date due matrici, A e B, con lo stesso numero di righe e di colonne, si definisce la matrice somma $S = A + B$, come quella matrice i cui elementi S_{ij} sono pari alla somma degli elementi omologhi delle matrici A e B: $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Prodotto di matrici

Date due matrici A e B, tali che il numero di colonne di A sia pari al numero di righe di B, si definisce la matrice prodotto $P = A \cdot B$ come quella matrice il cui elemento P_{ij} è dato da:

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}\, b_{kj}$$

Ad esempio l'elemento P_{23} del prodotto è dato da:

$$P_{23} = a_{21}\, b_{13} + a_{22}\, b_{23} + a_{23}\, b_{33} + \dots a_{2N}\, b_{N3}$$

È questa la definizione che è stata usata, in particolare, per scrivere la [II.7]: in essa la matrice P è una matrice a una sola riga e tre colonne; e la matrice B è una matrice a una sola colonna e tre righe; la matrice A è una matrice a tre righe e tre colonne.

Minori di una matrice

Di ogni elemento a_{ij} di una matrice si definisce il *minore* A_{ij} come quella matrice che si ottiene sopprimendo in A la riga i-sima e la colonna j-sima. Così ad esempio il minore A_{23} della matrice A è dato da:

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & \dots & a_{1N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \dots & a_{3N} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & \dots & a_{4N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1} & a_{M2} & a_{M4} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix}$$

Determinante di una matrice quadrata

Per ogni matrice quadrata A si definisce un numero, detto *determinante* di A, che noi indicheremo col simbolo *det A* o $\|A\|$. Del determinante di una matrice ci limitiamo qui a dare una definizione ricorrente: definiamo cioè direttamente il determinante di una matrice quadrata 2×2 (2 righe e 2 colonne); per una matrice 3×3 la definizione di determinante è basata sulla definizione del determinante della matrice 2×2; e così via.

Matrice 2 × 2 $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \|A\| = \det A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

Matrice 3 × 3 $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \|A\| = \det A &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{1+k} a_{1k} \|A_{1k}\| = \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \|A_{11}\| + \\ &+ (-1)^{1+2} a_{12} \|A_{12}\| + \\ &+ (-1)^{1+3} a_{13} \|A_{13}\| = \\ &= a_{11} (a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}) - \\ &- a_{12} (a_{12}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31}) + \\ &+ a_{13} (a_{21}\, a_{32} - a_{22}\, a_{31}) \end{aligned}$$

Matrice 4 × 4 $\quad \|A\| = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{1+k} a_{1k} \|A_{1k}\|$

e così via.

Si verifica facilmente che il determinante di una matrice è nullo se in esso una riga è proporzionale a un'altra (o una colonna è proporzionale a un'altra colonna); e più in generale se una riga (colonna) è esprimibile come combinazione di altre righe (colonne). La definizione di determinante di una matrice (e questa sua proprietà) verrà da noi usata nel prossimo paragrafo.

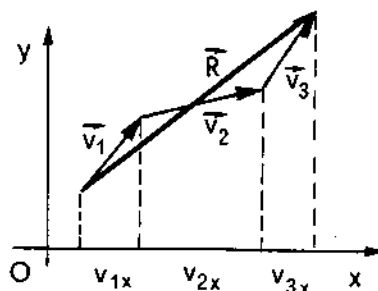
II.4. Operazioni sui vettori

II.4.1. *Prodotto di un vettore* $\vec{v}$ *per un numero* k

Si definisce prodotto $k\,\vec{v}$ ($k\,\vec{v} = \vec{v}\,k$) fra un numero reale k e un vettore $\vec{v}$ come quel vettore che ha modulo pari a k v (cioè k volte il modulo di $\vec{v}$); direzione uguale a quella di $\vec{v}$; e verso uguale a quello di $\vec{v}$, o verso opposto, a seconda che k sia positivo o negativo. In particolare, il prodotto fra $\vec{v}$ e l'inverso del suo modulo, $\frac{1}{v}$, rappresenta il versore di $\vec{v}$: $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$; e il prodotto di $\vec{v}$ per -1 ($-1 \cdot \vec{v} = -\vec{v}$) rappresenta quel vettore che ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $\vec{v}$, ma verso opposto. Evidentemente, il vettore $k\,\vec{v}$ ha come componenti $k\,v_x$, $k\,v_y$, $k\,v_z$.

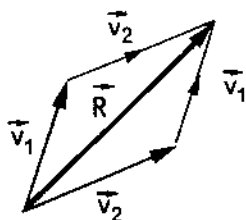
II.4.2. *Somma di vettori* (o *risultante*)

Risultante

Dati più vettori $\vec{v}_i$ ($i = 1 \dots N$) si definisce come loro somma $\vec{R}$ (detta anche *risultante* di quei vettori) il vettore ottenuto nel seguente modo: si dispongono i vettori uno dopo l'altro (il punto di applicazione dell'uno

coincidente con l'estremo libero del precedente), e si congiunge il punto di applicazione del primo con l'estremo libero dell'ultimo (vedi figura). Si verificano immediatamente le seguenti proprietà del risultante $\vec{R}$:

a) Il risultante $\vec{R}$ è indipendente dall'ordine in cui vengono presi gli addendi (proprietà commutativa della somma di vettori).

b) Le componenti del risultante sono pari alla somma delle componenti omologhe dei vettori addendi:

$$\begin{cases} R_x = \sum v_{ix} \\ R_y = \sum v_{iy} \\ R_z = \sum v_{iz} \end{cases} \qquad \text{[II.8]}$$

Nel caso particolare di due soli addendi, il risultante $\vec{R}$ è dato dalla diagonale del parallelogramma costruito coi due vettori (più precisamente dalla diagonale che congiunge il punto di applicazione di un vettore con l'estremo libero dell'altro).

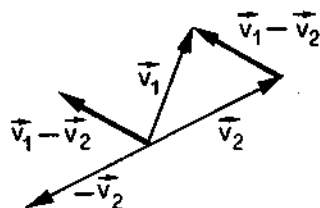
Qualunque vettore $\vec{v}$ può essere scritto come somma di tre vettori diretti secondo gli assi coordinati, secondo l'espressione:

$$\vec{v} = \hat{\imath}\, v_x + \hat{\jmath}\, v_y + \hat{k}\, v_z \qquad \text{[II.9]}$$

Vettori componenti

I vettori $\hat{\imath}\, v_x$, $\hat{\jmath}\, v_y$, $\hat{k}\, v_z$ vengono detti i *vettori componenti* del vettore $\vec{v}$.

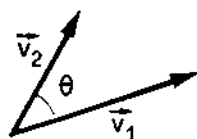
II.4.3. *Differenza di due vettori*

Differenza di vettori

La differenza $\vec{D}$ fra due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ ($\vec{D} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$) è definita come la somma del vettore $\vec{v}_1$ e del vettore $-\vec{v}_2$.

La differenza $\vec{D}$ è rappresentata geometricamente (vedi figura) dall'altra diagonale del parallelogramma costruito coi due vettori (dalla diagonale che congiunge l'estremo libero di $\vec{v}_2$ con l'estremo libero di $\vec{v}_1$). Si verifica facilmente che il vettore differenza ha come componenti le differenze delle componenti omologhe dei vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$:

$$\begin{cases} D_x = v_{1x} - v_{2x} \\ D_y = v_{1y} - v_{2y} \\ D_z = v_{1z} - v_{2z} \end{cases} \qquad \text{[II.10]}$$

II.4.4. *Prodotto scalare fra due vettori*

Prodotto scalare

Dati due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ si definisce il loro prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ come quel numero (quantità «scalare») dato dal prodotto dei due moduli v_1 e v_2 per il coseno dell'angolo compreso

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = v_1\, v_2 \cos\theta \qquad \text{[II.11]}$$

La [II.11] può essere interpretata anche come il prodotto del modulo di $\vec{v}_1$ per la proiezione di $\vec{v}_2$ su $\vec{v}_1$ (o viceversa, come prodotto del modulo di $\vec{v}_2$ per la proiezione di $\vec{v}_1$ su $\vec{v}_2$).

Dalla [II.11] segue che se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono fra di loro ortogonali, allora $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$; mentre se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono paralleli, allora $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2$. In particolare, per un qualunque vettore $\vec{v}$ si ha:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 \qquad \text{[III.12]}$$

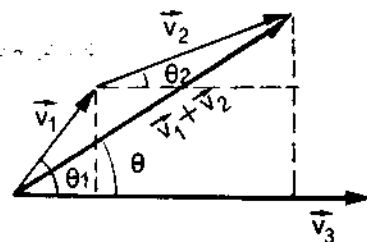
Con semplici considerazioni geometriche (vedi figura), si conclude facilmente che vale la proprietà

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 \qquad \text{[II.13]}$$

(proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma).

Usando la [II.9] e la [II.13] è facile esprimere il prodotto scalare fra due vettori in funzione delle componenti cartesiane dei due vettori

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= (\hat{\imath}\, v_{1x} + \hat{\jmath}\, v_{1y} + \hat{k}\, v_{1z}) \cdot (\hat{\imath}\, v_{2x} + \hat{\jmath}\, v_{2y} + \hat{k}\, v_{2z}) = \\ &= v_{1x} v_{2x} + v_{1y} v_{2y} + v_{1z} v_{2z} \end{aligned} \qquad \text{[II.14]}$$

(Abbiamo usato le proprietà che il prodotto scalare di un versore per sé stesso vale 1, e il prodotto scalare di due versori fra di loro ortogonali è nullo). La [II.14] ci dice che *il prodotto scalare fra due vettori può essere espresso come somma dei prodotti delle componenti omologhe dei due vettori.*

II.4.5. *Prodotto vettoriale fra due vettori*

Prodotto vettoriale

Si definisce il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ come quel *vettore* che ha come *modulo* la quantità $v_1 v_2 \sin\theta$ (pari all'area del parallelogramma individuato dai due vettori), come *direzione* quella ortogonale al piano individuato da $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, come *verso* quello da cui si vede ruotare il vettore $\vec{v}_1$ verso $\vec{v}_2$ (per un angolo minore di π) in senso antiorario. Se $\vec{v}_1$ è parallelo a $\vec{v}_2$, il prodotto vettoriale è nullo; in particolare, è nullo il prodotto vettoriale di un vettore per sé stesso. Segue dalla definizione del verso di $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, che il prodotto vettoriale *non* gode della proprietà commutativa; infatti:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\,\vec{v}_2 \times \vec{v}_1 \qquad \text{[II.15]}$$

Si dimostra invece facilmente, con considerazioni geometriche analoghe a quelle fatte nel caso del prodotto scalare, che il prodotto vettoriale gode della proprietà distributiva rispetto alla somma:

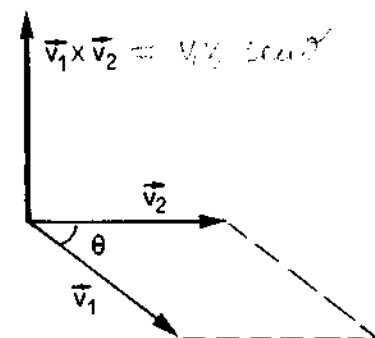
$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \qquad \text{[II.16]}$$

È facile verificare che valgono le seguenti relazioni fra i versori degli assi coordinati

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}; \quad \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}; \quad \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \qquad \text{[II.17]}$$

(oltre all'ovvia proprietà che il prodotto vettoriale di ogni versore per sé stesso è nullo).

Usando la [II.9], la [II.16] e le [II.17] il prodotto vettoriale di due vettori può essere scritto in termini delle componenti dei due vettori. Si ha:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 &= (\hat{\imath}\, v_{1x} + \hat{\jmath}\, v_{1y} + \hat{k}\, v_{1z}) \times (\hat{\imath}\, v_{2x} + \hat{\jmath}\, v_{2y} + \hat{k}\, v_{2z}) = \\ &= \hat{\imath}\,(v_{1y} v_{2z} - v_{1z} v_{2y}) + \hat{\jmath}\,(v_{1z} v_{2x} - v_{1x} v_{2z}) + \hat{k}\,(v_{1x} v_{2y} - v_{1y} v_{2x}) \quad , \end{aligned}$$

Ovvero in forma compatta (usando il formalismo delle matrici):

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{pmatrix} \qquad [II.17]$$

Si chiama *prodotto misto* fra tre vettori lo scalare $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3$. Il prodotto misto può essere indicato anche senza parentesi: infatti non è possibile eseguire le operazioni in senso inverso $[\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3)]$ perché non ha senso fare il prodotto vettoriale fra un vettore $(\vec{v}_1)$ e uno scalare $(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3)$. Il prodotto misto può essere scritto compattamente in forma di matrice:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \det \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{pmatrix} \qquad [II.18]$$

È facile verificare che $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1$. Il prodotto misto è nullo se due qualunque dei vettori sono fra loro paralleli.

Infatti, se ad esempio $\vec{v}_2$ è parallelo a $\vec{v}_1$, ciò significa che v_{2x}, v_{2y}, v_{2z} sono proporzionali a v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}; e dunque il determinante è nullo perché la matrice ha due righe proporzionali.

II.5. La legge oraria di un punto materiale

Consideriamo un punto materiale che si muove nello spazio. Il suo moto ci è noto se conosciamo la sua posizione in funzione del tempo: se cioè conosciamo la legge che ci consente di calcolare, per ogni valore del tempo t, dove il punto si trova. Stabilito un sistema di riferimento cartesiano, la posizione può essere determinata specificando le coordinate x, y, z del punto; per cui il moto ci è noto se conosciamo come variano le coordinate in funzione del tempo (equazioni parametriche del moto):

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad [II.19]$$

Un modo più compatto, rispetto alle [II.19], per specificare il moto, è di scrivere

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad [II.20]$$

Vettore posizione

Il vettore $\vec{r}$, che ha per componenti le coordinate cartesiane x, y, z, è detto *vettore posizione*: è quel vettore che, se applicato nell'origine, ha come estremo libero la posizione P del punto.

Rappresentazione cartesiana

Le [II.19] sono uno dei modi in cui la [II.20] può essere rappresentata (cioè per proiezione sugli assi): le [II.19] costituiscono, in effetti, la cosiddetta *rappresentazione cartesiana* della [II.20]. Un altro modo di rappresentare la [II.20] può essere quello di specificare, come funzione del tempo, il modulo r di $\vec{r}$ e due angoli per individuarne l'orientamento (compreso il verso). In ogni caso la relazione vettoriale [II.20] equivale a tre relazioni

scalari. La [II.20], o una qualunque sua rappresentazione in termini di tre relazioni scalari, viene detta la *legge oraria* del punto materiale considerato.

Legge oraria

È da osservare che le equazioni [II.19] contengono anche l'informazione geometrica sulla equazione cartesiana della traiettoria. Basta eliminare il parametro tempo per avere l'equazione della traiettoria in forma esplicita.

Esempi

E.II.5. *Un punto materiale si muove secondo una legge oraria la cui rappresentazione cartesiana è*

$$\begin{cases} x = o \\ y = b\,t + c \\ z = o \end{cases} \qquad (t \geq o) \qquad [II.21]$$

dove b e c sono due parametri costanti. Discutere il moto.

Per ogni valore del tempo t, x e z sono nulli. Il punto si trova dunque sempre sull'asse delle y, che rappresenta la sua traiettoria. Poiché il punto si muove lungo una retta, il moto si dice *rettilineo*. Per $t = o$, $y = c$: il parametro c (che ha le dimensioni di una lunghezza, e si misurerà dunque, ad esempio, in metri) rappresenta la coordinata che il punto ha sull'asse y all'istante $t = o$. In effetti, la posizione definita da $\vec{r}_0 = \vec{r}(o)$ (nel nostro esempio $r_{ox} = x(o) = o$; $r_{oy} = y(o) = c$; $r_{oz} = z(o) = o$) viene detta la *posizione iniziale* del punto materiale. A partire da $t = o$, la coordinata y aumenta linearmente col passare del tempo. Consideriamo due istanti diversi, t_1 e $t_2 > t_1$. Per $t = t_1$ il punto si trova in $y_1 = b\,t_1 + c$; per $t = t_2$ esso si trova in $y_2 = b\,t_2 + c$. Lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ è dato da $\Delta y = y_2 - y_1 = b\,(t_2 - t_1) = b\,\Delta t$. Δy aumenta dunque proporzionalmente all'intervallo di tempo Δt trascorso: in questo caso il moto si dice, per definizione, *uniforme*. Il moto del nostro punto materiale è dunque *rettilineo* e *uniforme*. Il parametro $b = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ ha le dimensioni di una lunghezza divisa un tempo (si misurerà ad esempio in *metri al secondo*): esso rappresenta lo spazio percorso nell'unità di tempo; infatti, moltiplicato per l'intervallo Δt di tempo, esso fornisce lo spazio Δy percorso in quell'intervallo di tempo. Il parametro b rappresenta in questo esempio quella che, per definizione, si chiama *velocità* del punto.

Moto rettilineo

Posizione iniziale

Moto rettilineo uniforme

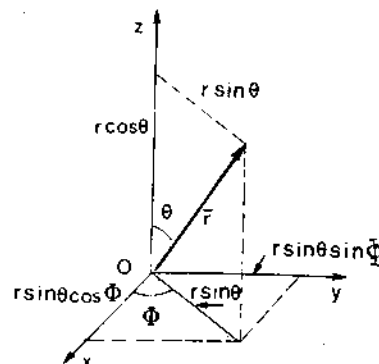
Velocità

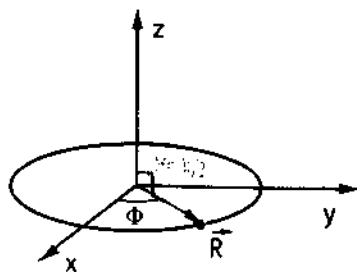
E.II.6. *Un modo spesso conveniente per rappresentare un vettore è quello di usare coordinate cosiddette polari: in coordinate polari il vettore $\vec{r}$ è specificato dal suo modulo r, dell'angolo θ che esso forma con l'asse z ($0 < \theta < \pi$), e dall'angolo Φ che il piano individuato da $\vec{r}$ e dall'asse z forma con il piano $z\,x$ ($0 < \Phi < 2\pi$). Trovare la relazione fra le coordinate polari e quelle cartesiane del vettore $\vec{r}$.*

Rappresentazione polare

Dalla figura, con evidenti considerazioni geometriche si ricava

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\Phi \\ y = r \sin\theta \sin\Phi \\ z = r \cos\theta \end{cases} \qquad [II.22]$$

che rappresentano le espressioni delle coordinate cartesiane x, y, z in funzione delle coordinate polari r, θ, Φ del vettore $\vec{r}$.

E.II.7. *Un punto materiale è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R che giace sul piano $x\,y$ con centro nell'origine. Esso percorre archi uguali in tempi uguali (moto circolare uniforme).*

Scrivere la legge oraria in coordinate polari e in coordinate cartesiane.

Moto circolare uniforme

Poiché la traiettoria giace sul piano xy, si ha $\theta = \pi/2$; e trattandosi di una circonferenza, è r = costante = R. Considerato che il punto percorre archi s proporzionali al tempo, si ha $\Phi = \frac{s}{R} = \frac{vt}{R}$, con v costante (l'origine dei tempi è stata scelta in modo che sia $t = 0$ quando il punto passa per l'asse x, cioè quando $s = \Phi R = 0$).

L'equazione oraria in coordinate polari è pertanto

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \frac{\pi}{2} \\ \Phi = \frac{vt}{R} \end{cases} \qquad \text{[II.23]}$$

v rappresenta l'arco percorso nell'unità di tempo; e poiché v è costante il moto circolare si dice uniforme. La quantità $\frac{v}{R} = \omega$ (anch'essa costante), rappresenta *l'angolo Φ percorso nell'unità di tempo*; ω è detto *velocità angolare*: $\omega = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

Velocità angolare

Sostituendo le [II.23] nelle [II.22] si ricava l'equazione oraria del moto circolare uniforme in coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{[II.24]}$$

Va notato che, essendo il punto materiale vincolato a percorrere una traiettoria fissa, esso ha un solo grado di libertà. I tre parametri della sua legge oraria non possono infatti cambiare col tempo in maniera fra di loro indipendente: ciò è evidente nella rappresentazione polare (due dei tre parametri sono costanti); mentre nella rappresentazione cartesiana, benché sia x che y siano variabili nel tempo, essi soddisfano però la relazione $x^2 + y^2 = R^2$.

Come abbiamo detto, le equazioni parametriche del moto [II.24] individuano l'equazione cartesiana della traiettoria. Per eliminare il parametro tempo fra le prime due equazioni [II.24] basta elevarle al quadrato

$$x^2 = R^2\cos^2\omega t$$
$$y^2 = R^2\,\text{sen}^2\,\omega t$$

e sommarle

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2\omega t + \text{sen}^2\,\omega t) = R^2$$

Si ottiene una relazione $y = y(x)$ che è proprio l'equazione di una circonferenza di raggio R e centro nell'origine.

Moto periodico

Un moto circolare uniforme è un esempio di *moto periodico*, nel senso che il punto mobile, percorsa una circonferenza completa, si ritrova a percorrere di nuovo la stessa traiettoria con le stesse modalità cinematiche; e così indefinitamente. Il tempo necessario a completare uno dei cicli uguali di moto, si dice *periodo T*. In altre parole, agli istanti $t, t+T, t+2T, ..., t+nT$, il punto si trova a passare dalla stessa posizione con le stesse caratteristiche cinematiche (velocità, accelerazione, ecc.). Nel caso di moto circolare uniforme esiste un preciso legame tra velocità angolare ω e periodo temporale T. Nel tempo T l'angolo Φ deve essere variato di 2π (1 giro completo); dunque:

Periodo

$$\omega = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ovvero} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

II.6. La velocità media

Nel precedente paragrafo abbiamo introdotto, seppure solo in un semplice esempio particolare, il concetto di velocità. La velocità è la grandezza fisica che indica *quanto rapidamente* un punto si muove. Probabilmente, la velocità è stata una delle prime grandezze fisiche che, storicamente, l'uomo ha sentito l'esigenza di quantificare. Il confronto fra le velocità proprie dei contendenti è determinante nello stabilire l'esito di una battaglia, o di una partita di caccia: è perciò plausibile che il concetto di velocità sia stato approfondito prima ancora dei concetti di spazio e di tempo. In effetti, la definizione operativa di velocità potrebbe essere basata sul confronto diretto con un *campione*, la cui velocità fosse ritenuta convenzionalmente come unitaria. Tuttavia è chiaro che la velocità è legata alle grandezze fisiche lunghezza e tempo: ha velocità maggiore quel punto che, a parità di tempo, percorre uno spazio più lungo; o che, fissata una distanza, percorre quella distanza in minor tempo.

In effetti, la definizione operativa di velocità viene di solito data riferendosi ad una sua misura indiretta, come rapporto fra spazio percorso e tempo impiegato a percorrere tale spazio. Per conseguenza, la velocità può essere *calcolata* una volta nota la legge oraria: e ciò è coerente con la considerazione che le caratteristiche del moto devono essere tutte note una volta che si conosca la posizione istante per istante.

Consideriamo dunque un punto materiale che si muova con legge oraria nota:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad [II.20]$$

o, nella rappresentazione cartesiana:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad [II.19]$$

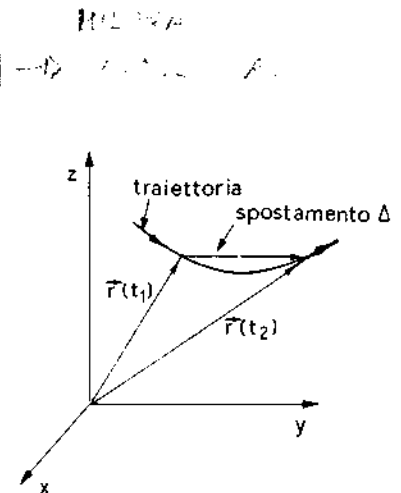
Considerati due istanti diversi t_1 e t_2, si definisce come *velocità media del punto nell'intervallo di tempo* $[t_1, t_2]$ la quantità

Velocità media

$$\bar{\vec{v}}(t_1, t_2) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad [II.25]$$

La velocità media, essendo il rapporto fra il vettore $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ e lo scalare $\Delta t = t_2 - t_1$, è essa stessa un vettore. Il vettore $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ viene detto *spostamento* del punto materiale relativo all'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$. Per una proprietà della differenza fra vettori (vedi par. II.4.3), lo spostamento $\Delta\vec{r}$ ha come componenti le differenze fra le componenti omologhe di $\vec{r}(t_2)$ e di $\vec{r}(t_1)$. Per conseguenza, le componenti della velocità media, ottenute proiettando la [II.25] sugli assi, possono essere scritte come

Spostamento

$$\begin{cases} \bar{v}_x = \dfrac{\Delta r_x}{\Delta t} = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \\ \bar{v}_y = \dfrac{\Delta r_y}{\Delta t} = \dfrac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} \\ \bar{v}_z = \dfrac{\Delta r_z}{\Delta t} = \dfrac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} \end{cases} \qquad [II.25.a]$$

Legge di composizione dei movimenti

Dunque le componenti della velocità media rappresentano anche le velocità con cui si muovono lungo gli assi le proiezioni del punto materiale sugli assi stessi (legge di composizione dei movimenti).

Esempi

E.II.8. *Un punto materiale si muove seguendo una legge oraria la cui rappresentazione cartesiana è*

$$\begin{cases} x = 2\,t \\ y = 2\,t + 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

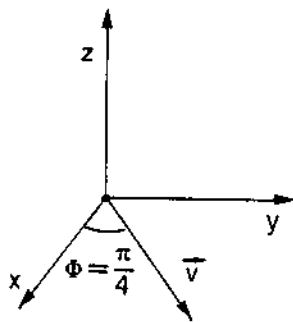
Calcolare la velocità media relativa all'intervallo di tempo compreso tra $t_1 = 0$ e $t_2 = 5$ (tutti i numeri si intendono espressi nel sistema SI).

Le componenti della velocità sono:

$$\begin{cases} \bar{v}_x = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{2\,t_2 - 2\,t_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{2\,(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)} = 2 \text{ m/s} \\ \bar{v}_y = \dfrac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{(2\,t_2 + 1) - (2\,t_1 + 1)}{t_2 - t_1} = 2 \text{ m/s} \\ \bar{v}_z = \dfrac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{4 - 4}{t_2 - t_1} = 0 \text{ m/s} \end{cases}$$

Va notato che la velocità media è costante come modulo e direzione (le sue tre componenti non dipendono da t_1 né da t_2): il moto è pertanto *rettilineo* e *uniforme*. La velocità giace sul piano xy (essendo $v_z = 0$); e poiché $\bar{v}_x = \bar{v}_y > 0$, essa forma con l'asse delle x un angolo $\Phi = 45° = \dfrac{\pi}{4}$.

Il modulo della velocità media è

$$\bar{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{4 + 4 + 0} \simeq 2{,}82 \text{ m/s}$$

E.II.9. *Un punto materiale si muove seguendo una legge oraria la cui rappresentazione cartesiana è:*

$$\begin{cases} x = 2\,t^2 \\ y = 2\,t + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Calcolare la velocità media relativa all'intervallo di tempo compreso tra $t_1 = 1$ e $t_2 = 5$ (tutti i numeri si intendono espressi nel sistema SI).

Si ha:

$$\begin{cases} \bar{v}_x = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{2\,t_2^2 - 2\,t_1^2}{t_2 - t_1} = \dfrac{2\,(25 - 1)}{4} = 12 \text{ m/s} \\ \bar{v}_y = \dfrac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{(2\,t_2 + 1) - (2\,t_1 + 1)}{(t_2 - t_1)} = \dfrac{2\,(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 2 \text{ m/s} \\ \bar{v}_z = \dfrac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} = 0 \text{ m/s} \end{cases}$$

Come si vede, mentre $\bar{v}_y$ e $\bar{v}_z$ hanno anche in questo esempio un valore indipendente da t_1 e da t_2, $\bar{v}_x$ dipende ora da t_1 e da t_2: ad esempio, se $t_1 = 1$ s e

$t_2 = 4$ s, sarebbe $\bar{v}_x = \dfrac{2\,(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} = \dfrac{2\,(16-1)}{3} = 10$ m/s. La velocità media cambia dunque (sia come modulo che come direzione) a seconda di quale sia l'intervallo di tempo su cui viene calcolata.

Questi esempi mostrano come la velocità media $\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ possa essere facilmente calcolata, per qualunque intervallo di tempo $[t_1 - t_2]$, quando sia nota la legge oraria $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (espressa, ad esempio, nella sua rappresentazione cartesiana). Il risultato è un vettore che, benché in qualche caso particolare possa essere costante, è in generale variabile: la velocità media è in generale diversa, come modulo e come direzione, a seconda di quale sia l'intervallo di tempo su cui la si calcola.

La definizione [II.25] consente di calcolare la velocità media relativa a qualunque *intervallo* di tempo. È però chiaro che un punto che si muove ha anche una sua velocità istantanea. Ha evidentemente senso chiedersi quale sia la *rapidità del movimento in ogni* preciso istante: ad esempio, se una automobile ha uno scontro, ha senso chiedersi quale fosse la sua velocità nell'istante preciso in cui lo scontro è avvenuto. Tuttavia, se per definire (calcolare) la velocità istantanea ci riferiamo alla [II.25], si presenta una difficoltà: la velocità istantanea dovrebbe essere la velocità calcolata su un intervallo Δt pari a zero; ma per $\Delta t = 0$ il rapporto $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ non è definito (non è definito il rapporto se il denominatore è zero). Il superamento di questa difficoltà richiede qualche approfondimento di carattere matematico cui dedicheremo i prossimi due paragrafi.

Esempio

E.II.10. *Un'automobile compie un percorso di andata di 50 km in un'ora e poi, senza sostare, torna al punto di partenza, lungo la stessa strada dell'andata, in 2 ore.*

Si vuole conoscere (in modulo):

a) la velocità media nell'intervallo di tempo compreso tra $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$ h;

b) la velocità media nell'intervallo di tempo compreso tra $t_1 = 0$ e $t_2 = 3$ h;

c) la velocità istantanea dell'auto durante l'intero percorso.

a) $\bar{v}\,(0-1) = \dfrac{50\ \text{km}}{(1-0)\ \text{h}} = 50\ \text{km/h}.$

b) $\bar{v}\,(0-3) = \dfrac{100\ \text{km}}{(3-0)\ \text{h}} = 33.3\ \text{km/h}$

c) occore guardare continuamente il tachimetro.

N.B. Essendo $\Delta \vec{r} = 0$, la velocità media vettoriale sul percorso andata-ritorno è nulla.

Prima di chiudere questo paragrafo vogliamo fare ancora qualche considerazione critica sul concetto di velocità media e di velocità istantanea, facendo riferimento all'esempio E.II.9.

Consideriamo prima la componente $\bar{v}_y$ della velocità media. Per $t_2 = t_1$, la quantità $\bar{v}_y = \dfrac{2\,(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)}$ non può essere calcolata, essendo nullo il denominatore. Tuttavia, per qualunque valore di $\Delta t = t_2 - t_1$ diverso da

zero (comunque piccolo sia $\Delta t \neq 0$), si ha sempre $\bar{v}_y = \frac{2\,(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)} = 2$; è quindi ragionevole assumere che anche la velocità istantanea sia pari a 2 m/s.

Vediamo ora la componente $\bar{v}_y = \frac{2\,(t_2^2 - t_1^2)}{(t_2 - t_1)}$. Ancora una volta, per $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$, il calcolo non può essere fatto. Per $t_2 - t_1 \neq 0$ (comunque piccolo sia $\Delta t \neq 0$), si può scrivere:

$$\bar{v}_y = \frac{2\,(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} = \frac{2\,(t_2 + t_1)\,(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 2\,(t_2 + t_1).$$

Quando t_2 si avvicina a t_1, $\bar{v}_y = 2\,(t_2 + t_1)$ si avvicina a $4\,t_1$; e viene dunque naturale assumere questo come valore della velocità istantanea. Questi ragionamenti verranno meglio precisati nei prossimi paragrafi, in modo da sviluppare dei metodi analitici utili al calcolo della velocità istantanea (e di altre analoghe grandezze fisiche) in tutti i casi di interesse.

II.7. Il limite di una funzione

Modulo o valore assoluto di un numero reale

Dato un numero reale b, si definisce il suo modulo (indicandolo con $|b|$) come quel numero che coincide con b se $b \geq 0$, ed è pari a $-b$ se $b < 0$.

$$\left.\begin{array}{ll} |b| = b & \text{per } b \geq 0 \\ |b| = -b & \text{per } b < 0 \end{array}\right\}$$

Si verificano immediatamente, a partire dalla definizione, le seguenti proprietà del modulo:

$\left\lvert\frac{1}{b}\right\rvert = \frac{1}{\lvert b\rvert}$	il modulo del reciproco di un numero è pari all'inverso del suo modulo
$\lvert -b\rvert = \lvert b\rvert$	un numero e il suo opposto hanno lo stesso modulo
$\lvert a\,b\rvert = \lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$	il modulo del prodotto di due numeri è pari al prodotto dei moduli
$\big\lvert\lvert a\rvert - \lvert b\rvert\big\rvert \leq \lvert a \pm b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	il modulo della somma (o della differenza) di due numeri è maggiore o uguale della differenza dei moduli e minore uguale della loro somma.

Limite

Ciò premesso, definiamo il *limite* di una funzione.

Consideriamo un numero reale y funzione del numero reale x: $y = f(x)$. Supponiamo che la funzione sia definita per tutti i punti dell'intervallo $[a, b]$, escluso al più il punto x_o ($a \leq x_o \leq b$). Si dice che *la funzione ha come limite il numero reale l quando x tende a x_o* se è verificata la seguente condizione: prefissato un numero reale positivo ϵ arbitrario (arbitrariamente piccolo) è possibile determinare in corrispondenza di ϵ un numero positivo σ tale che, purché sia $|x - x_o| < \sigma$ (con $x \neq x_o$), risulti $|f(x) - l| < \epsilon$:

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

purché

$$|x - x_o| < \sigma \quad (\text{per ogni } x \neq x_o).$$

Se ciò accade si scrive

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = l\,.$$

Esempio

E.II.11. *Consideriamo la funzione* $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. *Essa è definita per ogni valore di x reale, escluso x = 2. Mostrare che per x = 2 essa ha come limite l = 4*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Dobbiamo dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$ prefissato, esiste un numero $\sigma > 0$ tale che, se $|x - 2| < \sigma$ (ma $x \neq 2$), risulti

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$$

La $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ non è definita per $x = 2$; ma per ogni $x \neq 2$ possiamo scrivere:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)} = x + 2$$

Dunque la condizione $\left| \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$ equivale, per $x \neq 2$, alla condizione $|x + 2 - 4| < \varepsilon$; ovvero a $|x - 2| < \varepsilon$. Questa condizione è verificata, ovviamente, se $|x - 2| < \sigma$, con $\sigma = \varepsilon$.

Nel caso di funzioni particolarmente semplici, il limite può essere calcolato (se esiste) ricorrendo direttamente alla definizione. Il calcolo nel caso di funzioni più complesse è facilitato dall'esistenza di alcuni fondamentali teoremi.

Teoremi sui limiti

Teorema della somma - Se due funzioni hanno limite in $x = x_0$, la funzione somma (differenza) ha come limite la somma (differenza) dei limiti.

Teorema del prodotto - Se due funzioni hanno limite in $x = x_0$, la funzione prodotto ha come limite il prodotto dei limiti.

Teorema del quoziente - Se due funzioni hanno limite in $x = x_0$, la funzione quoziente ha come limite il rapporto fra i limiti (purché la funzione al denominatore abbia limite $\neq 0$).

Teorema del limite comune - Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ (con $f(x) \leq g(x)$) hanno lo stesso limite in $x = x_0$, allora una terza funzione $h(x)$ compresa fra di esse ($f(x) \leq h(x) \leq g(x)$) ha necessariamente lo stesso limite.

Per meglio chiarire il significato di questi teoremi, dimostriamo a titolo di esempio il teorema della somma; la dimostrazione degli altri procede in maniera sostanzialmente analoga.

Esempi

E.II.12. *Teorema della somma dei limiti* - Siano due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ non necessariamente definite in x_0, ma aventi un intervallo comune di definizione intorno a x_0. Se la funzione $f(x)$ ha in x_0 limite l_1, e se la $g(x)$ ha limite l_2, allora la funzione $F(x) = f(x) + g(x)$ ha come limite $l_1 + l_2$.

Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2 .$$

Preso un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario, si tratta di mostrare che è possibile trovare in corrispondenza un numero positivo σ tale che, se $|x - x_0| < \sigma$ ($x \neq x_0$), risulti

$$|f(x) + g(x) - l_1 - l_2| < \varepsilon .$$

Fissato ε, prendiamo la quantità $\varepsilon/2$.

Essendo per ipotesi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$, è possibile determinare un numero σ_1 tale che

$$|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se } |x - x_0| < \sigma_1 \qquad x \neq x_0$$

Analogamente, essendo per ipotesi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, è possibile in corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{2}$ determinare un numero σ_2 tale che

$$|g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se } |x - x_0| < \sigma_2 \qquad x \neq x_0$$

Detto σ il più piccolo fra σ_1 e σ_2, per $|x - x_0| < \sigma$ varranno entrambe le due suddette disuguaglianze; che sommate membro a membro danno

$$|f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \varepsilon \quad \text{se } |x - x_0| < \sigma \qquad x \neq x_0$$

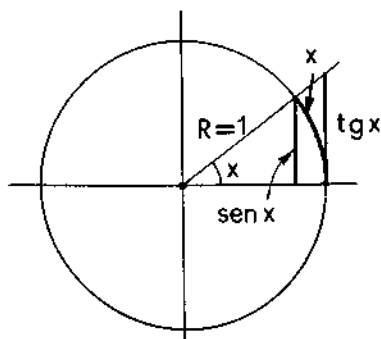
Ma poiché il valore assoluto di una somma è minore o uguale della somma dei valori assoluti:

$$|f(x) - l_1 + g(x) - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \varepsilon$$

purché $\qquad |x - x_0| < \sigma \quad x \neq x_0$

relazione che dimostra il teorema.

Come abbiamo detto, i teoremi sui limiti facilitano notevolmente il loro calcolo: oltre che dall'esempio E.II.13 che segue, cioè verrà illustrato anche dagli esempi discussi nei prossimi paragrafi.

E.II.13. *Calcolare il* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ *(x espresso in radianti).*

Per x che tende a zero, sia $\sin x$ che l'arco x tendono a zero: per il calcolo del limite del loro rapporto non può dunque essere usato il teorema del quoziente. Il calcolo può essere fatto ricorrendo al teorema del limite comune.

Cominciamo con l'osservare che, da considerazioni geometriche relative al cerchio trigonometrico, segue che per ogni $0 < x < \frac{\pi}{2}$ è

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \qquad \text{[II.27}$$

(si intende che x sia misurato in radianti).

Questa relazione discende dal fatto che ogni poligono circoscritto a una circonferenza ha perimetro maggiore della lunghezza della circonferenza; e ogni poligono iscritto ha perimetro minore della lunghezza della circonferenza.

Dividendo la [II.27] per $\sin x$ ($\sin x > 0$), si ha:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} . \qquad \text{[II.28}$$

Se fosse $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, il verso della disuguaglianza [II.27] si inverte; ma la [II.28] continua a valere. Per $x \to 0$, sia la funzione costante $f(x) = 1$ che la funzione $g(x) = \frac{1}{\cos x}$ tendono a 1; per il teorema del limite comune deve dunque essere

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Per il teorema del quoziente, anche la funzione $\frac{\sin x}{x}$ tende a 1.

Prima di chiudere questo paragrafo dedicato al limite delle funzioni, diamo qualche altra definizione.

Funzione continua

Una funzione $f(x)$ si dice *continua nel punto* x_0 se essa è definita in x_0 (esiste cioè la $f(x_0)$), se esiste il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$, e se queste due quantità coincidono: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Una funzione si dice *continua nell'intervallo* $[a, b]$ se essa è continua in tutti i punti dell'intervallo. Questa definizione precisa quanto avevamo anticipato qualitativamente nel par. I.5.

Come abbiamo già anticipato, la maggior parte delle funzioni che useremo sono funzioni continue; può tuttavia capitare che una funzione tra quelle che useremo non sia continua in qualche punto (ad esempio la funzione tg x non è continua, né è definita, per $x = \pi/2$).

Infinitesimo

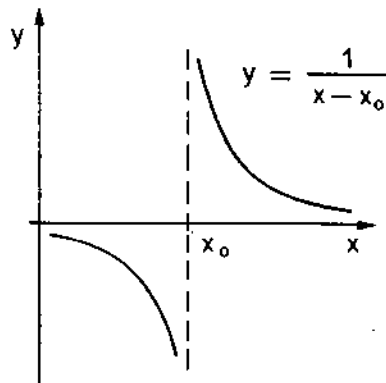
Se una funzione $f(x)$ ha in x_0 limite uguale a zero ($\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$), si dice che $f(x)$ è *infinitesima* (o che è *un infinitesimo*) in $x = x_0$.

Limite infinito

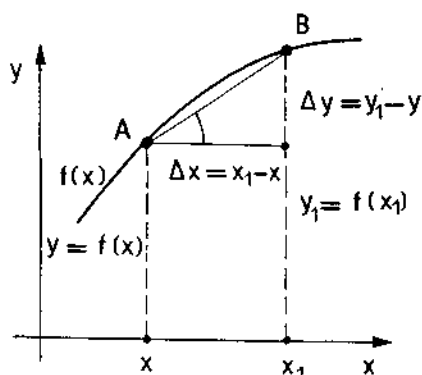
Si dice che una funzione reale ha limite $+\infty$ (più infinito) in $x = x_0$, se essa gode della seguente proprietà: prefissato un numero positivo k arbitrario (arbitrariamente grande), è possibile determinare in corrispondenza un numero σ tale che, quando $|x - x_0| < \sigma$ $(x \neq x_0)$, risulta $f(x) > k$. Si dice che una funzione ha limite $-\infty$ (meno infinito) in $x = x_0$, se essa gode della seguente proprietà: prefissato un numero positivo k arbitrario, è possibile determinare in corrispondenza un numero σ tale che, quando $|x - x_0| < \sigma$ $(x \neq x_0)$, risulta $-f(x) > k$.

È facile dimostrare che se una funzione tende a $+\infty$ in x_0 (o se essa tende a $-\infty$), il suo reciproco è infinitesimo; se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (o se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$), allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Viceversa, se una funzione è infinitesima in x_0, non è detto che il suo reciproco tenda a $+\infty$ (o a $-\infty$). Ad esempio la funzione $x - x_0$ è infinitesima in x_0 ($\lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$); ma il suo reciproco $\frac{1}{x - x_0}$ non tende in x_0 né a $+\infty$ né a $-\infty$: in effetti essa si avvicina a $+\infty$ quando x si avvicina a x_0 *da destra* $(x > x_0)$; e si avvicina invece a $-\infty$ quando x si avvicina a x_0 *da sinistra* $(x < x_0)$.

Tuttavia se una funzione è infinitesima in x_0, il *modulo* del suo reciproco tende necessariamente a $+\infty$.

II.8. La derivata

Siano x e y due variabili reali, e sia $f(x)$ una funzione che lega la variabile dipendente y alla variabile indipendente x

$$y = f(x).$$

Consideriamo due valori, x e x_1, della variabile indipendente appartenenti all'intervallo di definizione; e siano y e y_1 i corrispondenti valori della variabile dipendente:

$$y = f(x)\,; \quad y_1 = f(x_1)$$

chiamiamo anche Δx e Δy gli incrementi, rispettivamente, della variabile indipendente e della variabile dipendente:

$$\Delta x = x_1 - x\,; \quad \Delta y = y_1 - y$$

Calcoliamo ora il rapporto incrementale $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ che può essere scritto indifferentemente nei seguenti modi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

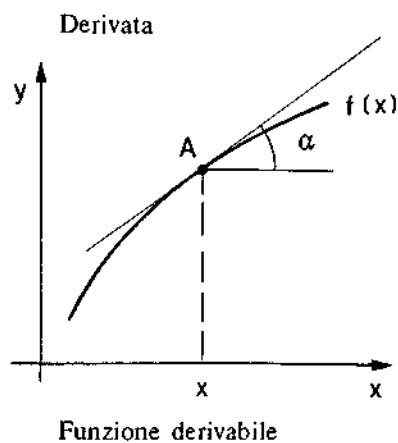
Il significato geometrico del rapporto incrementale appare evidente dalla figura: se le unità di misura delle lunghezze sull'asse x e y sono fra di loro uguali, il rapporto incrementale rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo che la corda AB forma con l'asse delle x.

Evidentemente, il rapporto incrementale è funzione sia di x che di x_1; ovvero, esso è funzione sia della variabile x che dell'incremento Δx. Per ogni fissato valore di x, il rapporto incrementale può essere calcolato per qualunque valore di Δx, escluso che per $\Delta x = 0$: in corrispondenza di $\Delta x = 0$ il rapporto incrementale non è definito.

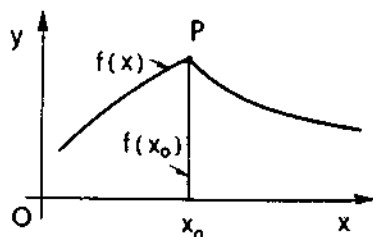
Derivata

Tuttavia si può cercare il limite del rapporto incrementale per Δx che tende a zero; tale limite, *se esiste* finito, è detto *derivata* della funzione $f(x)$ e viene indicato come $f'(x)$ o come $\dfrac{df}{dx}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) \equiv \frac{df}{dx} \qquad \text{[II.29]}$$

Funzione derivabile

Il significato geometrico della derivata segue facilmente dal significato geometrico del rapporto incrementale: quando $\Delta x \to 0$, il punto B tende ad A, e la corda AB diviene la tangente geometrica alla curva nel punto A: se le lunghezze sui due assi vengono misurate nelle stesse unità, la derivata rappresenta la tangente trigonometrica $\operatorname{tg} \alpha$ dell'angolo α che la tangente geometrica alla curva forma con la direzione dell'asse delle x.

Il significato fisico della derivata è ovviamente diverso a seconda del significato fisico delle variabili: se ad esempio la $y = f(x)$ è una legge oraria (la y è una coordinata; la x è il tempo), allora la derivata $f'(x)$ non è altro che una velocità istantanea.

Se una funzione $f(x)$ ammette derivata in x_0 (il limite del rapporto incrementale esiste finito in x_0), la $f(x)$ si dice *derivabile* in x_0; se è derivabile in ogni punto dell'intervallo, si dice derivabile nell'intervallo. Va notato che quando $\Delta x \to 0$, il denominatore del rapporto incrementale tende a zero; affinché il limite esista e sia finito, è necessario che anche il numeratore tenda a zero: e cioè che $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Condizione necessaria affinché una funzione sia derivabile è che essa sia continua. La condizione non è invece sufficiente. Una funzione il cui grafico presenti una angolosità (vedi figura) è continua in quel punto, ma non è derivabile (non è definita la tangente geometrica alla curva in quel punto).

Esempi

E.II.14. *Calcolare la derivata della funzione $y = 2x^2 + 1$.*

Per definizione si tratta di calcolare, se esiste, il limite:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(x+\Delta x)^2 + 1] - [2x^2 + 1]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2x^2 + 4x\,\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 1 - 2x^2 - 1]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[4x\,\Delta x + 2(\Delta x)^2]}{\Delta x} = \text{(per il teorema della somma)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x\,\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4x) + \lim_{\Delta x \to 0} 2\,\Delta x = 4x\,.$$

Infatti il primo limite, $\lim_{\Delta x \to 0} (4x)$, assume il valore $4x$, che è indipendente da Δx; il secondo, al tendere di Δx a zero, tende a zero.

E.II.15. *Calcolare la derivata della funzione $y = sen\, x$.*

Si tratta di calcolare

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

Usando le formule di prostaferesi $\left(\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$:

$$\sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\,;$$

dunque:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right].$$

Ma il limite di un prodotto è pari al prodotto dei limiti:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\Delta x/2}{\Delta x/2}$$

Ora il ha:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x\,; \qquad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\Delta x/2}{\Delta x/2} = 1 \quad \text{(vedi Esempio E.II.13)}$$

per cui in definitiva

Derivata del seno

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \qquad (\text{se } y = \sin x)\,.$$

(Scrivendo che $\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$ abbiamo usato il fatto che la funzione $\cos x$ è continua).

Nei casi semplici, la derivata può essere calcolata ricorrendo direttamente alla definizione; si trova così la derivata di funzioni notevoli. Nel caso di funzioni più complesse, alcuni teoremi consentono di calcolare la derivata riconducendo il calcolo al caso di funzioni notevoli più semplici. Valgono infatti i seguenti teoremi:

Derivata della somma

– *Derivata della somma* - Se una funzione $F(x)$ è somma (algebrica) di funzioni derivabili, la sua derivata $F'(x)$ è pari alla somma (algebrica) delle derivate delle funzioni addende:

Se $\quad F(x) = f(x) \pm g(x) \qquad$ allora $\quad F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Derivata del prodotto

– *Derivata del prodotto* - Se $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ ($f(x)$ e $g(x)$ derivabili), la derivata $F'(x)$ è data dall'espressione

$$F'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)\,.$$

Derivata del reciproco

– *Derivata del reciproco* - Se $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ (con $f(x) \neq 0$), se la $f(x)$ è derivabile, si ha

$$F'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}\,.$$

Derivata del quoziente

– *Derivata del quoziente* - Combinando i due precedenti teoremi, si ricava facilmente che: Se $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$; $f(x)$ e $g(x)$ derivabili) si ha

$$F'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}\,.$$

Derivata di funzione di funzione

– *Derivata di «funzione di funzione»* - Sia una funzione $F(x)$, esprimibile nel seguente modo: $y = F(x) = f(z)$ con $z = z(x)$ [la y si dice allora una «funzione di funzione»: essa è funzione di z, dove z è a sua volta funzione di x]. La derivata $F'(x)$ può allora essere espressa come prodotto delle derivate $f'(z)$ e $z'(x)$

Se $\quad F(x) = f(z)\,;\; z = z(x) \qquad$ allora $\quad F'(x) = f'(z) \cdot z'(x)\,.$

Per meglio chiarire e precisare il significato di questi teoremi, dimostriamo nell'esempio E.II.16 il teorema del prodotto; e nei tre esempi successivi mostriamo l'applicazione di tali teoremi al calcolo della derivata di alcune funzioni.

Esempi

E.II.16. *Dimostriamo il teorema relativo alla derivata del prodotto.*

Sia $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, dove $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni derivabili. Si tratta di calcolare:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}\,.$$

Sommando e sottraendo al numeratore del rapporto incrementale la quantità $f(x) \cdot g(x+\Delta x)$, si ha:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Eseguendo il limite per $\Delta x \to 0$, utilizzando i teoremi sui limiti (limite della somma uguale alla somma dei limiti; limite del prodotto uguale al prodotto sui limiti) e tenuto conto che $g(x)$ essendo derivabile è in particolare continua ($\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$) si ottiene:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

E ciò è quanto volevamo dimostrare.

E.II.17. *Trovare la derivata della funzione $y = b\,x^2$.*

Cominciamo con osservare che se $f(x) = b\,x$, la derivata $f'(x)$ vale b (infatti il rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x} = b \frac{\Delta x}{\Delta x} = b$ è costante, e il suo limite vale dunque b).

Ciò premesso, la funzione $y = b\,x^2$ può essere scritta come $y = b\,x \cdot x$; ed applicando la regola di derivazione del prodotto $y' = b \cdot x + b\,x \cdot 1 = 2\,b\,x$.

E.II.18. *Trovare la derivata della funzione $y = (2\,x^2 + 1) \cdot \sin x$.*

La funzione può essere scritta come prodotto delle funzioni $f(x) = (2\,x^2 + 1)$ e $g(x) = \sin x$, delle quali abbiamo calcolato le derivate negli esempi E.II.14 ed E.II.15 ($f'(x) = 4x$; $g'(x) = \cos x$). Applicando la regola di derivazione del prodotto si ha $y' = 4\,x \cdot \sin x + (2\,x^2 + 1) \cos x$.

E.II.19. *Trovare la derivata della funzione $y = \sin^2 x$.*

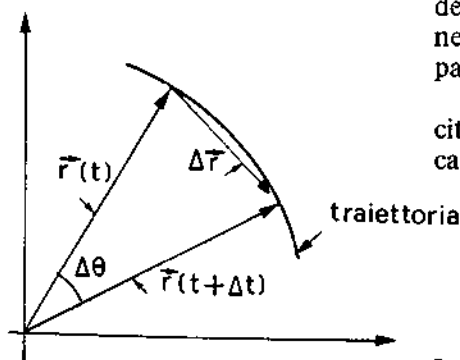
La funzione $y = \sin^2 x$ può essere scritta nella forma di «funzione di funzione»: $y = z^2$, con $z = \sin x$. E poiché la derivata di z^2 è $2\,z$ mentre la derivata di $z = \sin x$ è $z' = \cos x$, si ha $y'(x) = 2\,z \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x$.

Nella tabella II.1 che segue riportiamo la derivata di un certo numero di funzioni notevoli; un elenco più completo è riportato in appendice. Usando queste derivate notevoli in combinazione coi teoremi enunciati in questo paragrafo, possono essere calcolate le derivate di tutte le principali funzioni di uso comune; e in particolare di tutte le funzioni che verranno utilizzate in questo libro.

Tabella II.1.
Derivata di funzioni notevoli

$y = f(x)$	$y' = f'(x) = \frac{df}{dx}$
$y = k =$ costante	$y' = 0$
$y = b\,x$	$y' = b$
$y = x^{\alpha}$ (α reale qualunque)	$y' = \alpha\, x^{\alpha - 1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$

II.9. Derivata dei vettori. Velocità ed accelerazione istantanee

Derivata dei vettori

L'operazione matematica di derivata, che abbiamo definito nel precedente paragrafo, si ricollega chiaramente con il concetto di velocità istantanea che avevamo introdotto, seppure in termini qualitativi, alla fine del par. II.6.

Da quanto abbiamo visto, diviene infatti naturale definire come velocità istantanea il limite, per Δt che tende a zero, della velocità media [II.25] calcolata sull'intervallo di tempo Δt:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{[II.30]}$$

In altri termini, la velocità *istantanea di un punto è quel vettore che si ottiene derivando il vettore posizione di quel punto.*

L'incremento $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ è rappresentato dalla corda della traiettoria.

Al tendere di Δt a zero l'angolo $\Delta\theta$ tende a zero e la direzione della corda corrispondente tende alla direzione della tangente alla traiettoria nel punto P.

Dunque il vettore velocità istantanea è tangente alla traiettoria.

Poiché nel precedente paragrafo abbiamo introdotto solo la derivata di funzioni scalari, la definizione [II.30] di velocità istantanea richiede una generalizzazione dell'operazione di derivata al caso di funzioni vettoriali.

Questa generalizzazione è tuttavia immediata se si tiene conto che le componenti del rapporto incrementale di un vettore altro non sono se non i rapporti incrementali delle componenti del vettore (vedi la [II.26]); per cui passando al limite si ha che la velocità istantanea è quel vettore che ha come componenti le derivate delle coordinate del punto.

Se cioè $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ha per componenti $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$, allora la velocità $\vec{v}(t)$ ha per componenti le derivate $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$:

$$\text{se} \qquad \vec{r}(t) \equiv (x(t),\ y(t),\ z(t))$$
$$\vec{v}(t) \equiv (x'(t),\ y'(t),\ z'(t))\,.$$

Derivazione per componenti

Questa relazione riconduce immediatamente il calcolo della derivata di una funzione vettoriale al calcolo della derivata di funzioni scalari.

Esempi

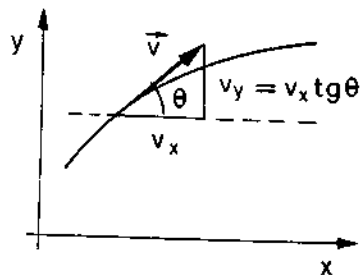
E.II.20. *Calcolare la velocità istantanea $\vec{v}(t)$ del punto materiale di cui all'esempio E.II.10.*

La legge oraria, nella rappresentazione cartesiana, è data dalle equazioni:

$$\begin{cases} x = 2\,t^2 \\ y = 2\,t + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

E dunque la velocità $\vec{v}(t)$ ha per componenti

$$\begin{cases} v_x(t) = x'(t) = 4\,t \\ v_y(t) = y'(t) = 2 \\ v_z(t) = z'(t) = 0 \end{cases}$$

Va notato che la velocità istantanea (che, essendo $v_z = 0$, giace nel piano $x\,y$) non è costante né in modulo, né in direzione. Il suo modulo $v(t)$ vale infatti $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{16\,t^2 + 4} = 2\sqrt{4\,t^2 + 1}$; mentre la tangente θ dell'angolo che la velocità forma con l'asse delle x vale $\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{1}{2\,t}$.

E.II.21. *Trovare la velocità istantanea di un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme (velocità angolare costante pari a ω; vedi esempio E.II.7).*

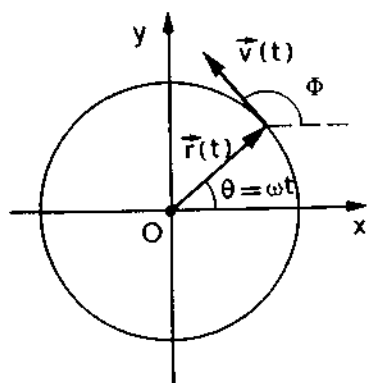
MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Sia R il raggio del cerchio. La legge oraria è allora data dalle equazioni [II.24], nell'ipotesi che il sistema di riferimento e l'origine dei tempi siano scelti come nell'esempio E.II.7.

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = 0\,. \end{cases}$$

Le componenti della velocità sono allora

$$\begin{cases} v_x = -\,\omega R\sin\omega t \\ v_y = \omega R\cos\omega t \\ v_z = 0\,. \end{cases}$$

Il calcolo della derivata di $x = R\cos\omega t$ (e analogamente per $y = R\sin\omega t$) è stato eseguito usando il teorema di «funzione di funzione»: $x = R\cos z$, con $z = \omega t$; per cui $x'(t) = -R\sin z\cdot z' = -(R\sin\omega t)\cdot\omega = -\,\omega R\sin\omega t$.

Osserviamo quanto segue:

a) Il modulo della velocità

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 \sin^2 \omega t + \omega^2 R^2 \cos^2 \omega t} =$$
$$= \omega R \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = \omega R$$

è costante, come ci si aspetta nel caso di moto circolare uniforme. Il modulo della velocità rappresenta in effetti l'arco percorso nell'unità di tempo.

b) La velocità $\vec{v}$ è diretta secondo la tangente alla circonferenza. È infatti nullo il prodotto scalare $(\vec{r} \cdot \vec{v})$:

$$x v_x + y v_y = r \cos \omega t (- \omega r \operatorname{sen} \omega t) + r \operatorname{sen} \omega t (\omega r \cos \omega t) = 0 .$$

Questa condizione equivale a dire che $\vec{v}$ è ortogonale a $\vec{r}$.

c) Il vettore $\vec{r}(t)$ ha modulo costante pari ad R; la sua derivata non è però nulla. In effetti, la derivata di un vettore è nulla quando è costante il vettore (cioè sono costanti tutte le sue componenti) e non quando è costante solo il suo modulo.

La velocità istantanea $\vec{v}(t)$ è essa stessa una funzione del tempo (funzione costante solo nel caso di moto rettilineo uniforme) ed ha dunque senso chiedersi quanto rapidamente essa cambi nel tempo. La rapidità con cui cambia la velocità è descritta dall'*accelerazione* $\vec{a}(t)$, definita come la derivata della velocità $\vec{v}(t)$. Poiché anche la $\vec{a}(t)$ è una funzione del tempo (costante, o nulla, solo in casi particolari) anche essa potrebbe essere derivata: la grandezza così ottenuta non è però particolarmente utile nella maggior parte dei casi; e non dedicheremo ad essa alcuna attenzione in questo volume.

Analogamente a quanto abbiamo già visto nel caso della velocità, le componenti della accelerazione possono essere ottenute per derivazione delle componenti omologhe della velocità

$$a_x(t) = v'_x(t) = x''(t)$$
$$a_y(t) = v'_y(t) = y''(t)$$
$$a_z(t) = v'_z(t) = z''(t) .$$

Con $f''(x)$ abbiamo indicato, come è usuale, la derivata della derivata $f'(x)$ di una funzione $f(x)$; un altro simbolo comunemente usato è $f''(x) = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Riassumendo dunque

se $\quad \vec{r}(t) \equiv (x(t),\ y(t),\ z(t))$

allora $\quad \vec{v}(t) \equiv (x'(t),\ y'(t),\ z'(t))$ [II.31]

$\quad \vec{a}(t) \equiv (v'_x(t),\ v'_y(t),\ v'_z(t)) \equiv (x''(t),\ y''(t),\ z''(t))$.

Esempi

E.II.22. *Calcolare l'accelerazione del punto materiale di cui all'esempio E.II.20.*

Poiché $\begin{cases} x'(t) = 4t \\ y'(t) = 2, \\ z'(t) = 0 \end{cases}$ si ha $\begin{cases} a_x = x''(t) = 4 \\ a_y = y''(t) = 0 \\ a_z = z''(t) = 0 . \end{cases}$

E.II.23. *Calcolare l'accelerazione del punto materiale di cui all'esempio E.II.21.*

Poiché $\begin{cases} x'(t) = v_x = -\omega R \sin \omega t \\ y'(t) = v_y = \omega R \cos \omega t, \\ z'(t) = v_z = 0 \end{cases}$ si ha $\begin{cases} a_x = x''(t) = -\omega^2 R \cos \omega t \\ a_y = y''(t) = -\omega^2 R \sin \omega t \\ a_z = z''(t) = 0 . \end{cases}$

Notiamo che il modulo della accelerazione $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \omega^2 R$ è costante; e poiché le componenti della accelerazione $\vec{a}$ sono proporzionali alle componenti del vettore posizione $\vec{r}(t)$ (e opposte in segno) l'accelerazione è parallela a $\vec{r}$ ma opposta in verso. In un moto circolare uniforme l'accelerazione è *centripeta*, e il suo modulo è costante: $a = \omega^2 R = \omega v = \dfrac{v^2}{R}$ (abbiamo usato il fatto che il modulo di $\vec{v}$ è $v = \omega R$).

Accelerazione centripeta

Le [II.31], secondo cui le componenti del vettore derivata sono pari alle derivate rispettive delle componenti del vettore da derivare, consentono di calcolare la derivata di un vettore quando il vettore (e in particolare la sua rappresentazione cartesiana) sia noto in funzione del tempo.

Tuttavia in molti casi il calcolo e l'interpretazione fisica del risultato sono più immediati, se la derivata viene calcolata facendo ricorso direttamente alla definizione [II.30]: $\vec{v} = d\vec{r}/dt$.

Cominciamo con l'analizzare il caso il cui il vettore che si vuole derivare abbia modulo costante: è questo il caso, ad esempio, del vettore $\vec{r}(t)$ nel caso del moto circolare; o il caso della velocità $\vec{v}(t)$ nel caso del moto circolare uniforme. Per fissare le idee, concentriamo la nostra attenzione sulla velocità in un moto su traiettoria circolare. Se il modulo del vettore $\vec{v}$ resta costante, passando dall'istante t all'istante $t + \Delta t$ cambia solo la sua direzione: sia $\Delta\theta$ l'angolo che $\vec{v}(t + \Delta t)$ forma con $\vec{v}(t)$; esso è evidentemente uguale all'angolo $\Delta\theta$ che $\vec{r}(t + \Delta t)$ forma con $\vec{r}(t)$: a parità di tempo Δt, $\vec{r}$ e $\vec{v}$ ruotano dello stesso angolo $\Delta\theta$ (dal momento che $\vec{v}$ si mantiene tangente alla circonferenza e quindi perpendicolare ad $\vec{r}(t)$).

Ciò che vogliamo calcolare è:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} .$$

Da semplici considerazioni geometriche ricaviamo subito che, per $\Delta t \to 0$, la direzione di $\Delta\vec{v}$ è perpendicolare a $\vec{v}$. Infatti il triangolo delle velocità è isoscele, dato che il modulo di $\vec{v}$ non cambia nel tempo, e gli angoli alla base α e β sono uguali. Al tendere di Δt a zero, $\Delta\theta \to 0$ e la somma degli angoli alla base tende a π $(\alpha + \beta + \Delta\theta = \pi)$. Ciò implica che, per $\Delta t \to 0$, $\alpha = \beta \to \pi/2$. Dunque la direzione di $\Delta\vec{v}$ e dell'accelerazione $\vec{a}$ è perpendicolare a $\vec{v}$ e diretta verso il centro.

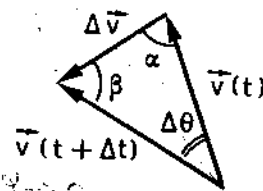
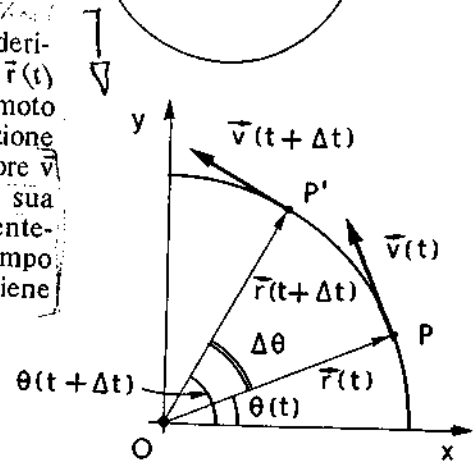
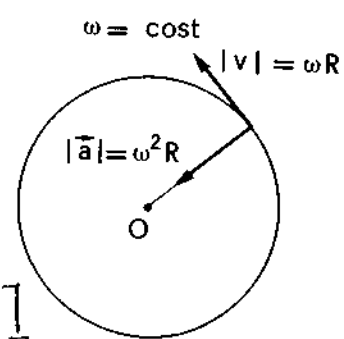
Per quanto riguarda il modulo dell'accelerazione si ha:

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 v \,\mathrm{sen}\,(\Delta\theta/2)}{\Delta t} =$$

$$= \text{moltiplicando e dividendo per } \Delta\theta =$$

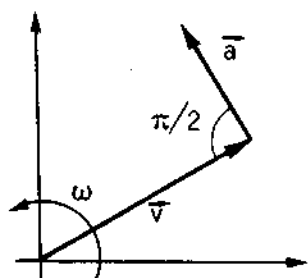
$$= v \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\mathrm{sen}\,(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right] =$$

$$= v \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{sen}\,(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)} \right] \cdot \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right] =$$

$$= v \cdot 1 \cdot \omega = v\omega .$$

In definitiva

$$\vec{a}(t) = -\mathrm{v}\,\omega\,\hat{r} \qquad \text{[II.32]}$$

La [II.32] rappresenta un risultato del tutto generale (valido non solo nel caso che $\vec{\mathrm{v}}$ sia una velocità):

Derivata di un vettore di modulo costante

Dato un vettore $\vec{\mathrm{v}}$ di modulo v *costante, il quale a un certo istante t ruoti con velocità angolare pari ad ω, la sua derivata $\dot{A}$ è un vettore di modulo pari a ω*v, *e ruotato rispetto a $\vec{\mathrm{v}}$ di π/2 nel senso in cui ruota $\vec{\mathrm{v}}$.*

La [II.32] vale in particolare se $\vec{\mathrm{v}}$ è un versore $\hat{\mathrm{v}}$, nel qual caso basta porre in essa v = 1.

Nel caso in cui $\vec{\mathrm{v}}$ sia variabile in direzione e modulo, il calcolo della sua derivata può essere fatto facilmente scrivendo il vettore $\vec{\mathrm{v}}$ come prodotto del suo modulo $\mathrm{v}(t)$ per il suo versore $\hat{\mathrm{v}}(t)$: $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v} \cdot \hat{\mathrm{v}}$. poiché la derivata di un vettore può essere fatta per componenti, e poiché moltiplicare un vettore per uno scalare è come moltiplicare per quello scalare le componenti del vettore, segue che la derivata del prodotto di uno scalare per un vettore può essere fatta applicando la regola di derivazione del prodotto:

$$\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathrm{v}\,\hat{\mathrm{v}}) = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\hat{\mathrm{v}} + \mathrm{v}\frac{d\hat{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\hat{\mathrm{v}} + \mathrm{v}\,\omega\,\hat{t} \qquad \text{[II.33]}$$

Componente parallela e componente normale della derivata di un vettore

dove $\hat{t}$ è il versore normale a $\vec{\mathrm{v}}$ (ruotato di π/2 nel senso in cui $\vec{\mathrm{v}}$ ruota). È questo un risultato del tutto generale: *la derivata di un vettore $\vec{\mathrm{v}}$ può essere scritta come somma di due termini vettoriali: un termine, parallelo al versore $\hat{\mathrm{v}}$, avente come modulo la derivata $\frac{d\mathrm{v}}{dt}$ del modulo di $\vec{\mathrm{v}}$; un termine ortogonale a $\vec{\mathrm{v}}$ (nel senso in cui $\vec{\mathrm{v}}$ ruota) avente come modulo* v ω *(ω velocità angolare istantanea con cui il vettore ruota).*

Esempio

E.II.24. *Usare la [II.33] per calcolare la velocità e l'accelerazione di un punto materiale mobile su traiettoria circolare, nota la legge oraria s = s(t) che descrive la ascissa curvilinea s in funzione del tempo.*

Scriviamo il vettore posizione $\vec{r}(t)$ come prodotto del suo modulo R per il versore $\hat{r}$

$$\vec{r}(t) = R \cdot \hat{r}(t)\,.$$

Derivando secondo la [II.33] si ottiene la velocità $\vec{\mathrm{v}}$

$$\vec{\mathrm{v}}(t) = \frac{dR}{dt} \cdot \hat{r}(t) + R\,\omega\,\hat{t}$$

dove $\hat{t}$ è il versore della tangente alla traiettoria (normale ad $\hat{r}$ nel senso del moto).

Essendo R costante (traiettoria circolare) questa relazione si riduce a

$$\vec{\mathrm{v}}(t) = R\,\omega\,\hat{t} \qquad \text{[II.34]}$$

dove

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v(t)}{R}$$

(con $v(t)$ abbiamo indicato la derivata $\frac{ds}{dt}$ della ascissa curvilinea).

Derivando la [II.34] si ottiene l'accelerazione; usando ancora la [II.33]:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\,\omega\,\hat{t}) = R\frac{d\omega}{dt}\cdot\hat{t} + R\omega\frac{d\hat{t}}{dt} = \\ = R\frac{d\omega}{dt}\hat{t} + R\omega\cdot 1\cdot\omega\cdot(-\hat{r}) = R\frac{d\omega}{dt}\hat{t} - R\omega^2\hat{r} \qquad \text{[II.35]}$$

avendo usato il fatto che il versore ortogonale a $\hat{t}$ (nel senso in cui ruota il punto) è $-\hat{r}$. La [II.35] ci dice che l'*accelerazione in un moto circolare* ha una componente tangenziale a_t e una componente radiale a_r (centripeta, cioè diretta verso il centro) di modulo rispettivamente pari a

Accelerazione tangenziale e accelerazione centripeta in un moto circolare

$$a_t = R\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

(Ricordare che è $v = \omega R$)

$$a_r = R\omega^2 = v\,\omega = \frac{v^2}{R}$$

Nel caso particolare che il moto sia circolare *uniforme* $\left(\omega = \frac{v}{R} = \text{costante}\right)$ la componente tangenziale si annulla e resta solo la componente centripeta; coerentemente con quanto avevamo calcolato nell'esempio E.II.23.

Per porre la [II.33] in forma più compatta, si introduce il *vettore velocità angolare* $\vec{\omega}$, definito come quel vettore che ha modulo pari ad ω, direzione coincidente con l'asse di rotazione, e verso tale da «vedere» la rotazione procedere in senso antiorario. Usando questa notazione, la [II.33] può essere scritta come:

Vettore velocità angolare

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot\hat{v} + \vec{\omega}\times\vec{v} \qquad \text{[II.36]}$$

Nel caso in cui il vettore abbia modulo costante, si ha in particolare:

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{v} \quad \text{(formula di Poisson).}} \qquad \text{[II.37]}$$

$\frac{d\vec{v}}{dt}$ rappresenta la velocità con cui si muove l'estremo libero di $\vec{v}$.

II.10. Moti piani su traiettoria qualsiasi

Consideriamo un moto che si svolga su un piano. In un punto qualsiasi della traiettoria è definita la retta tangente t e la retta normale n.

La velocità, in ogni punto della traiettoria, è un vettore puramente tangenziale e vale

$$\vec{v}(t) = v(t)\,\hat{t}$$

dove $\hat{t}$ è il versore della tangente alla traiettoria orientato concordemente al verso di percorrenza assunto come positivo sulla traiettoria.

L'accelerazione, invece, ha componenti sia tangenziale, sia normale:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\,[v(t)\cdot\hat{t}(t)]\,.$$

È da osservare che anche il versore $\hat{t}$ è funzione del tempo, nel senso che, per ogni posizione assunta successivamente dal punto P durante il suo moto, il versore $\hat{t}$ della tangente alla traiettoria assume valori in generale diversi. Sviluppando la derivata si ha:

$$\vec{a} = \underbrace{\left(\frac{dv}{dt}\right)\hat{t}}_{\text{componente tangenziale}} + \underbrace{v\frac{d\hat{t}}{dt}}_{\text{componente normale}} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

In molte applicazioni risulta utile esprimere le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione in funzione di parametri locali della traiettoria invece che, per esempio, in funzione delle componenti cartesiane dell'accelerazione.

Cerchio osculatore

A tale scopo consideriamo, in un punto P della traiettoria, l'insieme delle circonferenze che sono tangenti alla retta tangente $\hat{t}$ alla traiettoria. Si tratta di infinite circonferenze di raggi variabili da 0 ad ∞. Tra queste circonferenze ne esiste una che meglio «combacia» con la traiettoria data: questo cerchio si chiama *cerchio osculatore* alla traiettoria nel punto considerato. La geometria insegna a calcolarne il raggio: si tratta di un cerchio che ha un punto di contatto triplo con la traiettoria.

Raggio di curvatura

Ora, nel tratto infinitesimo di traiettoria intorno al punto P, è come se il punto mobile si muovesse su un pezzo di cerchio osculatore con la velocità tangenziale $\vec{v}$ in P. In questo senso il moto coincide con un moto circolare su un cerchio di raggio R pari al raggio del cerchio osculatore (detto *raggio di curvatura* della traiettoria in quel punto), con velocità angolare istantanea $\omega = v/R$.

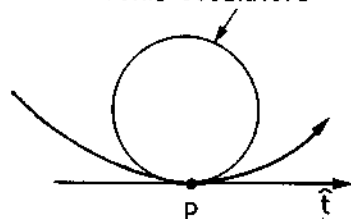
L'accelerazione normale in un punto della traiettoria in cui il punto mobile abbia velocità $v(t)$ ed in cui il raggio di curvatura sia $R(t)$ vale dunque:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\,\hat{n}$$

dove $\hat{n}$ è il versore normale alla traiettoria orientato verso il centro del cerchio osculatore.

II.11. Dalla accelerazione alla legge oraria

Fino ad ora abbiamo visto come sia possibile, una volta nota la legge oraria del moto $\vec{r} = \vec{r}(t)$, ricavare la velocità $\vec{v}$ e l'accelerazione $\vec{a}$ in funzione del tempo mediante l'operazione di derivazione.

Ci poniamo ora il problema del procedimento inverso: una volta nota l'accelerazione $\vec{a}$, ricavare la velocità $\vec{v}$ e poi la posizione $\vec{r}$.

Per chiarire meglio in quali condizioni questo procedimento inverso possa essere compiuto, proviamo a porci la seguente domanda:

«Un'automobile percorre alla velocità costante di 100 km/h l'autostrada Roma-Napoli: sapendo che la distanza da casello a casello è di circa 200 km, a che ora arriva a Napoli l'automobile?» È chiaro che, così formulata, questa domanda non ammette risposta univoca. Poiché la velocità indica semplicemente *come cambia* la posizione, non potremo mai sapere quando viene raggiunta una certa posizione, se oltre a conoscere la velocità noi non sappiamo anche *quando* l'automobile è partita (o per lo meno quando è passata da una posizione di riferimento, o dove si trovava a un istante di riferimento). In altre parole la conoscenza della velocità non basta a dare risposta al problema, se non si conoscono quelle che vengono dette *condizioni iniziali*.

Condizioni iniziali

Questo problema può essere chiarito in termini precisi da alcune semplici considerazioni di carattere matematico.

Primitiva

Data una funzione $f(x)$, si dice che una seconda funzione $F(x)$ è *primitiva* dalla $f(x)$ se è $F'(x) = f(x)$: una primitiva di $f(x)$ è cioè definita dalla proprietà che la sua derivata è la funzione $f(x)$.

Ci chiediamo ora se una funzione ammetta una sola primitiva, o se possano esistere più primitive della stessa funzione.

Consideriamo dunque due funzioni, $F(x)$ e $G(x)$: ci chiediamo se il fatto che esse siano entrambe primitive della $f(x)$ implichi o meno che le due funzioni coincidano, cioè che sia $G(x) - F(x) = 0$, per ogni x.

Chiamiamo $\Phi(x)$ la differenza $G(x) - F(x)$. Essendo per ipotesi $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$, si ha

$$\Phi'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0 .$$

Poiché tutte le funzioni costanti, e solo le funzioni costanti, hanno derivata costante uguale a zero, deve essere $\Phi(x) = G(x) - F(x) = c$ (con c costante arbitraria); cioè $G(x) = F(x) + c$.

Concludendo: data una funzione $f(x)$, sia $F(x)$ una sua primitiva; allora anche $G(x) = F(x) + c$ (con c costante arbitraria) è una primitiva, e viceversa qualunque altra primitiva avrà la forma $F(x) + c$.

Per indicare che una funzione $F(x)$ è primitiva della $f(x)$ adotteremo (come d'uso) il simbolo

$$F(x) = \int f(x)\, dx + c \qquad \text{[II.38]}$$

Sull'origine di questo simbolo, sulla sua connessione con l'operazione matematica cosiddetta di «integrale definito», nonché su alcune tecniche per la ricerca della primitiva (processo detto di «integrazione»), torneremo in un altro capitolo.

Riprendiamo qui ora, invece, il nostro problema di cinematica consistente nella ricerca della legge oraria a partire dalla conoscenza della accelerazione.

Supponiamo di conoscere le tre funzioni del tempo che esprimono la rappresentazione cartesiana della accelerazione $\vec{a} = \vec{a}(t)$:

$$\begin{cases} a_x = a_x(t) \\ a_y = a_y(t) \\ a_z = a_z(t) . \end{cases} \qquad \text{[II.39]}$$

Il primo passo consiste nel determinare la velocità. Nella notazione specificata dalla [II.39], la velocità sarà espressa, in rappresentazione cartesiana, dalle relazioni:

$$\begin{aligned} v_x &= \int a_x(t)\,dt + c_{1x} \\ v_y &= \int a_y(t)\,dt + c_{1y} \\ v_z &= \int a_z(t)\,dt + c_{1z} \end{aligned} \qquad [II.40]$$

dove, secondo la definizione di primitiva, il simbolo $\int a_x(t)\,dt$ indica una funzione del tempo tale che la sua derivata valga $a_x(t)$, ecc., e dove c_{1x}, c_{1y}, c_{1z} sono tre costanti che non possono essere determinate a partire dalla [II.39]: qualunque sia infatti il loro valore, derivando le [II.40] si ottengono le [II.39]. Tuttavia queste costanti hanno un preciso significato fisico: a seconda di quale valore venga ad esse assegnato, si ottiene una velocità descritta da funzioni diverse. Se si vuole determinare con quale velocità si muove il punto, oltre ad assegnare la sua accelerazione (ad esempio tramite le [II.39] è necessario fornire il valore delle costanti c_{1x}, c_{1y}, c_{1z}. In termini equivalenti, si può specificare la velocità che il punto aveva a un certo istante, ad esempio all'istante «iniziale» $t = 0$. Poiché queste costanti possono essere determinate specificando con quale velocità il punto è partito, esse vengono comunemente dette *condizioni iniziali*.

Esempi

E.II.25. *Un punto materiale si muove con accelerazione $\vec{a}$ specificata dalla seguente rappresentazione cartesiana:*

$$\begin{cases} a_x = 2t \\ a_y = 3 \\ a_z = 0\,. \end{cases} \qquad [II.41]$$

All'istante $t = 5$, la velocità $\vec{v}$ del punto vale

$$\begin{aligned} v_x(5) &= 30 \\ v_y(5) &= 10 \\ v_z(5) &= 12\,. \end{aligned} \qquad [II.42]$$

Trovare come la velocità $\vec{v}$ varia in funzione del tempo (tutti i valori numerici sono espressi nel sistema SI).

Dalla tabella II.1 risulta che la primitiva di $f(t) = 2t$ è $F(t) = t^2$; e quella di $f(t) = 3$ è $F(t) = 3t$. Abbiamo pertanto:

$$\begin{cases} v_x = \int a_x(t)\,dt + c_{1x} = \int 2t\,dt + c_{1x} = t^2 + c_{1x} \\ v_y = \int a_y(t)\,dt + c_{1y} = \int 3\,dt + c_{1y} = 3t + c_{1y} \\ v_z = \int a_z(t)\,dt + c_{1z} = c_{1z}\,. \end{cases} \qquad [II.43]$$

Ponendo nelle [II.43] $t = 5$, e tenendo conto delle [II.42], abbiamo

$$\begin{cases} 30 = 25 + c_{1x} \\ 10 = 15 + c_{1y} \\ 12 = c_{1z} \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{aligned} c_{1x} &= 5 \\ c_{1y} &= -5 \\ c_{1z} &= 12 . \end{aligned}$$

Questi valori delle costanti, introdotti nelle [II.42], consentono di determinare completamente la velocità

$$\begin{cases} v_x = t^2 + 5 \\ v_y = 3\,t - 5 \\ v_z = 12 . \end{cases}$$

Una volta determinate le tre funzioni che specificano come la velocità dipende dal tempo, con lo stesso procedimento si può determinare la legge oraria $\bar{r} = \bar{r}(t)$ purché vengano assegnate le relative condizioni iniziali, cioè venga specificato il valore che la posizione assume a un certo istante di riferimento.

MOTO PARABOLICO

E.II.26. *Un punto materiale viene lanciato con velocità $v_o = 12$ m/s da una finestra alta 8 m dal livello del suolo. L'angolo α che la velocità iniziale forma con l'orizzontale è $\alpha = 30°$. Determinare la legge oraria. In particolare calcolare la distanza y_c dalla finestra a cui il sasso cade, e dopo quanto tempo t_c dal momento del lancio la caduta a terra ha luogo (si trascuri la resistenza dell'aria).*

Moto del proiettile

Prendiamo un sistema di riferimento con origine a livello del suolo, asse z verticale orientato verso l'alto, e asse y orientato concordemente alla direzione di lancio.

L'accelerazione del sasso è l'accelerazione di gravità $\bar{g}$, il cui modulo è $g \simeq 9{,}8$ m/s^2 (diretta secondo la verticale verso il basso). Nel sistema di riferimento da noi scelto, le componenti della accelerazione sono pertanto:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g . \end{cases} \qquad \text{[II.44]}$$

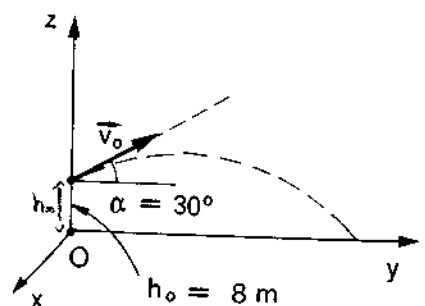
Al momento del lancio ($t = 0$) abbiamo inoltre le seguenti condizioni iniziali per la velocità $\bar{v}$ e la posizione $\bar{r}$

$$\text{[II.45]} \quad \begin{cases} v_x(0) = v_{ox} = 0 \\ v_y(0) = v_{oy} = v_o \cos\alpha \\ v_z(0) = v_{oz} = v_o \sin\alpha \end{cases} \quad \begin{matrix} (\alpha = 30°; \\ v_o = 12 \text{ m/s}) \end{matrix} \quad \begin{cases} x(0) = x_o = 0 \\ y(0) = y_o = 0 \\ z(0) = z_o = 8 . \end{cases} \quad \text{[II.46]}$$

Dalle [II.44] abbiamo, integrando:

$$\begin{cases} v_x = c_{1x} \\ v_y = c_{1y} \\ v_z = -g\,t + c_{1z} \end{cases}$$

Ponendo $t = 0$ e confrontando con le [II.45], otteniamo:

$$\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v_o \cos\alpha \\ v_z = -g\,t + v_o \sin\alpha \end{cases} \qquad \text{[II.47]}$$

Integrando ora le [II.47] abbiamo:

$$\begin{cases} x = c_2 \\ y = (v_o \cos \alpha)\, t + c_{2y} \\ z = -\dfrac{1}{2}\, g\, t^2 + (v_o \sin \alpha)\, t + c_{2z} \end{cases}$$

Ponendo $t = 0$ e confrontando con le [II.46] abbiamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = (v_o \cos \alpha)\, t \\ z = -\dfrac{1}{2}\, g\, t^2 + (v_o \sin \alpha)\, t + z_o \end{cases} \qquad [II.48]$$

Le [II.48] rappresentano la legge oraria cercata; va notato che queste equazioni rappresentano il moto se $0 < t < t_c$, dove t_c rappresenta l'istante in cui il sasso cade a terra. Ponendo nelle [II.48] $\alpha = 30°$, $v_o = 12$ m/s, $g = 9{,}8$ m/s^2 e $z_o = 8$ possono essere ricavate tutte le informazioni numeriche relative allo svolgimento del moto. Vediamo in particolare che il moto si svolge tutto nel piano yz $(x = 0)$.

Equazione della traiettoria

La *equazione della traiettoria* si ottiene, in particolare, esprimendo z in funzione di y $(z = z(y))$, cioè eliminando il tempo t dalla seconda e dalla terza delle equazioni [II.48]

$$z = -\frac{1}{2}\, g \frac{y^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + (\text{tg}\, \alpha)\, y + z_o \qquad [II.49]$$

La distanza y_c a cui il sasso cade è quel valore di y corrispondente a $z = 0$; esso può essere ottenuto uguagliando a zero la [II.49].

Si trova:

$$y_c = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\, g\, z_o}{v_0^2 \sin^2 \alpha}}\right).$$

Delle due soluzioni, quella negativa non corrisponde in questo caso ad alcun fenomeno fisico, poiché è facile verificare che ad essa corrisponde un valore del tempo $t < 0$. L'istante t_c di caduta può essere ricavato, ad esempio, dalla seconda delle [II.48] come quel valore di t corrispondente ad $y = y_c$:

$$t_c = \frac{y_c}{v_o \cos \alpha} = \frac{v_o}{g} \sin \alpha \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\, g\, z_0}{v_0^2 \sin^2 \alpha}}\right).$$

Quota massima

E.II.27. *Calcolare la massima quota z_m raggiunta dal sasso di cui all'esempio E.II.26.*

La quota massima z_m può essere calcolata in molti modi. Ad esempio, possiamo notare che la quota massima è raggiunta quando $v_z = 0$; per cui z_m si potrebbe trovare uguagliando a zero la terza delle [II.47], e sostituendo il valore del tempo così trovato nella terza delle [II.48].

Noi preferiamo fare il calcolo in un modo diverso. Notiamo che il punto di massima quota è caratterizzato dal fatto che la tangente alla traiettoria è orizzontale; ovvero, considerato il significato geometrico della derivata, dal fatto che in esso è $z'(y) = 0$.

Derivando dunque la [II.49] abbiamo:

$$z'(y) = -g \frac{y}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \text{tg}\, \alpha$$

Uguagliando a zero, ricaviamo il valore y_m della y corrispondente alla quota massima

$$y_m = \frac{v_o^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha$$

Sostituendo nella [II.49] si ottiene il corrispondente valore di z, z_m:

$$z_m = \frac{v_o^2 \sin^2\alpha}{2\,g} + z_o$$

E.II.28. *Un punto materiale viene lanciato orizzontalmente con velocità v_1 da un punto a quota h. Supponendo che l'accelerazione sia quella di gravità ($g = 9{,}8\ m/s^2$), calcolare il tempo t_1 necessario a raggiungere il suolo e la gittata y_1 corrispondente. Quando valgono le stesse quantità t_2 ed x_2, se la velocità orizzontale di lancio è $v_2 = 2\,v_1$?*

Gittata

Procedendo come nell'esempio E.II.26 si ha:

$$a_x = 0 \rightarrow v_x = 0 \rightarrow x = 0$$

(il moto si svolge sul piano $y\,z$). Per la componente y si ha:

$$a_y = 0 \rightarrow v_y = \text{cost} = v_y(0) = v_1$$

$$y(t) = \int v_y\, dt + \text{cost} = \int v_1\, dt + \text{cost} = v_1\, t + \text{cost}\,.$$

La determinazione della costante additiva si effettua imponendo la condizione iniziale: per $t = 0$ $y(0) = 0$ e dunque cost $= 0$. In definitiva:

$$y(t) = v_1\, t\,.$$

Per la componente z si ha:

$$a_z = -g \rightarrow v_z = \int (-g)\, dt + \text{cost} = -g\,t + \text{cost}\,.$$

Il valore della costante si determina imponendo all'equazione $v_z(t) = -g\,t + \text{cost}$ di soddisfare la condizione iniziale $v_z(0) = 0$ (il vettore $\vec{v}$ non ha componente z all'atto del lancio); segue che questa costante deve essere nulla e l'equazione della componente z della velocità diventa:

$$v_z(t) = -g\,t\,.$$

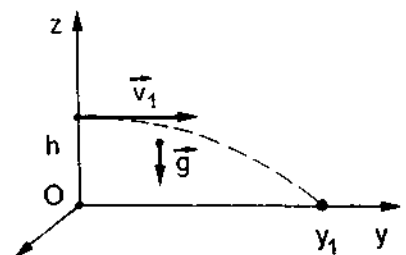
Integrando ancora si ha la funzione $z(t)$:

$$z(t) = \int v_z(t)\, dt + \text{cost} = \int (-g)\, t\, dt + \text{cost} = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + \text{cost}\,.$$

Il valore della costante si ricava imponendo che la quota iniziale sia h:

$$z(0) = h = \text{cost}\,.$$

La coordinata z del punto ha dunque la seguente equazione oraria:

$$z(t) = h - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

Il tempo impiegato a raggiungere il suolo si ricava imponendo alla quota z di assumere il valore nullo (arrivo al suolo):

$$z(t_1) = h - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$$

da cui

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

La gittata y_1, nel caso in cui la velocità orizzontale di lancio sia v_1, si ricava immediatamente dall'equazione oraria $y(t)$:

$$y(t) = v_1 t$$

$$y_1 = y(t_1) = v_1 t_1 = v_1 \sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

Nel caso in cui la velocità di lancio sia doppia ($v_2 = 2 v_1$) si ha:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$y_2 = y(t_2) = v_2 t_2 = v_2 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2 v_1 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2 y_1 .$$

Osservazioni:

- il moto della proiezione sull'asse y è un moto uniforme;
- il moto della proiezione sull'asse z è un moto uniformemente accelerato verso il basso;
- il moto lungo l'asse z è indipendente dal moto lungo l'asse y: il tempo impiegato a raggiungere il suolo non dipende dalla velocità iniziale (orizzontale): $t_1 = t_2$. Di fatto è lo stesso tempo che impiegherebbe un punto lasciato cadere senza velocità iniziale lungo l'asse z;
- la gittata è proporzionale alla velocità iniziale: $y = 2 y_1$ perché $v_2 = 2 v_1$.

Queste osservazioni sono espresse in modo straordinariamente chiaro nel seguente brano di Galileo Galilei (Dialogo dei massimi sistemi - Giornata seconda):

«... quando in cima di una torre fusse una colubrina livellata, e con essa si tirassero tiri paralleli all'orizzonte, per poca o molta carica che si desse al pezzo, sì che la palla andasse a cadere ora lontana mille braccia, or quattro mila, or sei mila, or dieci mila etc., tutti questi tiri si spedirebbero in tempi uguali tra di loro, e ciascheduno eguale al tempo che la palla consumerebbe a venire dalla bocca del pezzo sino a terra, lasciata, senz'altro impulso, cadere semplicemente giù a perpendicolo. Or par meravigliosa cosa che nell'istesso breve tempo della caduta a piombo sino in terra dall'altezza, verbigrazia, di cento braccia, possa la medesima palla, cacciata dal fuoco, passare or quattrocento, or mille, or quattromila, ed or diecimila braccia, sì che la palla in tutti i tiri paralleli all'orizzonte si trattenga sempre in aria per tempi uguali... quando non ci fusse l'impedimento accidentario dell'aria...».

Esempi

E.II.29. *Un punto materiale si muove lungo un percorso rettilineo. La sua velocità iniziale è $v_0 = 10$ m/s, diretta secondo il verso positivo dell'asse coordinato; la sua accelerazione a è costante e negativa (cioè diretta secondo il verso negativo dell'asse coordinato) e il suo modulo a_o è pari a 4 m/s^2 ($a = - a_o = - 4$ m/s^2. Quale percorso l compie il punto prima si fermarsi?*

L'accelerazione a, la velocità v e la posizione x del punto sono specificati rispettivamente dalle seguenti funzioni:

$$\begin{cases} a = -a_0 \\ v = v_0 - a_0 t \\ x = v_0 t - \frac{1}{2} a_0 t^2 \end{cases} \qquad [II.50]$$

avendo scelto l'origine dell'asse coordinato nella posizione occupata dal punto all'istante $t = 0$.

Dalla seconda delle [II.50] si ha che $v = 0$ all'istante $\bar{t} = \frac{v_0}{a_0}$; e sostituendo nella terza delle [II.50] si ha che la posizione $\bar{x}$ all'istante $\bar{t}$ vale

$$\bar{x} = \frac{v_0^2}{a_0} - \frac{1}{2} a_0 \frac{v_0^2}{a_0^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a_0}.$$

Ma $\bar{x}$ rappresenta anche lo spazio l percorso

$$l = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a_0} \qquad [II.51]$$

E.II.30. *Un proiettile è lanciato dall'origine degli assi cartesiani, con velocità $v_0 = 2$ m/s, ad un angolo di 45° con l'asse x. L'accelerazione del proiettile è l'accelerazione di gravità $g = 9{,}8$ m/s², diretta verso il basso. In quale punto della traiettoria l'accelerazione normale a_n è massima? Quanto vale il raggio di curvatura in questo punto?*

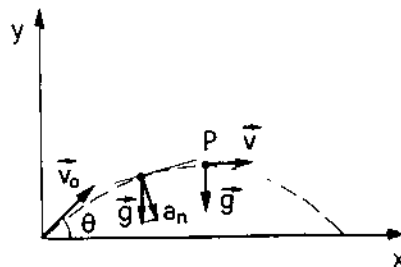
La componente normale dell'accelerazione a_n è massima quando la direzione della normale alla traiettoria è parallela al vettore $\vec{g}$. Ciò accade nel punto P di massima quota.

Il raggio di curvatura R nel punto P, pari al raggio del cerchio osculatore in P, si ottiene dalla relazione

$$a_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{a_n}$$

Nel punto P la velocità è parallela all'asse x ed il suo valore v coincide con la componente x della velocità $v_x = v_0 \cos\theta$ (poiché $a_x = 0$, la componente x della velocità non cambia nel tempo); nel punto di massima quota la componente y della velocità è nulla.

Nel punto P la componente normale dell'accelerazione a_n coincide con g e quindi:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g} = \left(2\,\frac{m}{s}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{9{,}8}\frac{s^2}{m}\right) = \frac{2}{9{,}8}\,m \simeq 0{,}2\,m\,.$$

Esercizi del capitolo II

II.1. Calcolare la derivata rispetto al tempo della funzione $x = c\,t^2$ con c costante.

II.2. Calcolare la derivata rispetto al tempo della funzione $x = \alpha\,t^3$ con α costante.

II.3. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ nel punto $x^* = 3$.
(Risposta: $-1/2$)

II.4. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \sin(1 + x^2)$
(Risposta: $2\,x \cos(1 + x^2)$)

II.5. Calcolare la derivata terza della funzione $f(x) = x^3 + 2\,x^2 + 1$
(Risposta: $f''' = 6$)

II.6. Un punto si muove su traiettoria rettilinea, con accelerazione costante $a = 2$ m/s², e partendo da fermo.
a) qual'è la velocità del punto dopo 5 s?
b) qual'è la velocità media nell'intervallo di tempo $(0 - 5)$?
(Risposte: 10 m/s; 5 m/s)

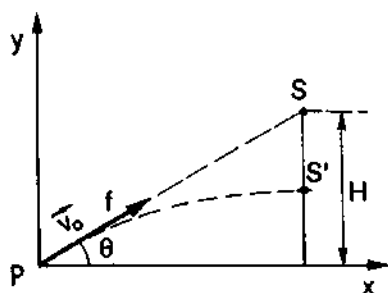
II.7. Un punto si muove su traiettoria rettilinea con accelerazione costante. Quando il punto mobile transita per il punto di ascissa x_1 la sua velocità è v_1, mentre quando transita per il punto di ascissa x_2 la velocità è v_2. Calcolare il valore dell'accelerazione. (Risposta: $a = (v_2^2 - v_1^2)/2\,(x_2 - x_1)$)

II.8. In prossimità della superficie della Terra, in assenza di attriti, tutti i corpi sono sottoposti all'accelerazione di gravità $g = 9{,}8$ m/s², diretta verticalmente verso il basso. Se un corpo viene lanciato verso l'alto, lungo la verticale, con velocità v_o, calcolare la massima quota e la velocità con cui ricade al suolo. (Risposte: $y_{MAX} = v_o^2/2\,g$; $v = -v_o$)

II.9. Un proiettile viene lanciato orizzontalmente con velocità iniziale $v_o = 50$ m/s da una postazione a quota $h = 100$ m rispetto al suolo orizzontale. In assenza di attriti, con quale inclinazione rispetto al suolo il proiettile arriva a terra?
(Risposta: 41,5°)

II.10. Un punto materiale è lanciato orizzontalmente, con velocità iniziale v_o, dalla sommità di una torre. Ricavare l'espressione, in funzione del tempo, delle componenti tangenziale e normale dell'accelerazione. Il moto, in assenza di attriti, avviene con accelerazione pari all'accelerazione di gravità g.
(Risposte: $a_t = g^2\,t/\sqrt{v_o^2 + g^2\,t^2}$;
$a_n = g\,v_o/\sqrt{v_o^2 + g^2\,t^2}$)

II.11. Un proiettile è sparato orizzontalmente con velocità $v_o = 30$ m/s. In assenza di attriti, qual'è il raggio di curvatura della traiettoria dopo 2 s dal lancio?
(Risposta: $R = 156{,}5$ m)

II.12. Un classico problema prevede che un primitivo *P*, posto nell'origine, lanci una freccia *f* puntando direttamente, nella direzione di visione, verso una scimmia *S* ferma su un albero. La scimmia intuisce l'intenzione aggressiva e, nell'istante in cui parte la freccia, si lascia cadere al suolo. L'ignoranza della cinematica è fatale alla scimmia, che viene centrata al volo. Perché?

II.11. Le lancette di un orologio indicano le ore tre. Dopo quanto tempo le lancette si ritrovano per la prima volta ad angolo retto?

$$\left(\text{Risposta: } \frac{6}{11}\ \text{h}\right)$$

II.14. La piattaforma di una giostra si muove di moto circolare non uniforme. Essa parte da ferma ed ha un'accelerazione angolare costante $d\omega/dt = \dot{\omega} = 0{,}2$ rad/s^2. Calcolare:

a) qual'è la velocitá angolare dopo 2 s?

b) qual'è l'accelerazione, in modulo, di un punto della piattaforma che disti $r = 2$ m dall'asse di rotazione?

$$(\text{Risposte: } 0{,}4\ \text{rad/s};\quad a = \dot{\omega} r \sqrt{1 + \dot{\omega}^2 t^4})$$

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo II

II.1. Applicare la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Vedere, eventualmente, l'esempio E.II.4.

II.2. Applicare la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Verificare il risultato con la tab. II.1.

II.3. Procedere come negli esempi precedenti prendendo come punto di riferimento $x = x^*$.

II.4. Si tratta di derivare una funzione di funzione.

II.5. Le derivate di ordine superiore al primo si ottengono derivando successivamente le derivate della funzione data:

$$\frac{df}{dx} = f'(x);\ \frac{d^2f}{dx^2} = f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x);\ \text{ecc.}$$

II.6. Scrivere le equazioni della velocità e dello spazio percorso in funzione del tempo per un moto uniformemente accelerato: $v = v(t), x = x(t)$. Ricavare la velocità media dalla conoscenza della $x(t)$.

II.7. I dati del problema (x_1, v_1, x_2, v_2) non riguardano in modo esplicito il tempo. Dalle equazioni relative al moto uniformemente accelerato occorre eliminare il parametro tempo.

II.8. Decomporre il moto in una fase di salita (moto uniformemente decelerato) ed una fase di discesa (moto uniformemente accelerato).

II.9. Calcolare le componenti v_x e v_y della velocità nel punto di impatto al suolo e, da queste, ricavare l'angolo richiesto.

II.10. Le grandezze a_t ed a_n possono essere espresse in funzione di g, di cui sono componenti sulla tangente e la normale alla traiettoria, e dell'angolo θ fra la tangente e la verticale.

II.11. Il raggio di curvatura di una traiettoria in un punto è legato alla velocità e all'accelerazione normale in quel punto.

II.12. Verificare che, indipendentemente dal valore della velocità iniziale, esiste un punto in cui freccia e scimmia arrivano simultaneamente.

II.13. Si tratta di due moti circolari uniformi, a diverse velocità angolari, riguardanti le due lancette (ore e minuti). Tenere conto che le due lancette hanno posizioni angolari iniziali diverse.

II.14. *a*) Passare, per integrazione, dall'accelerazione angolare alla velocità angolare, in analogia al caso di moto rettilineo uniformemente accelerato.

b) L'accelerazione, in un moto circolare non uniforme, ha componenti normali e tangenziale.

Capitolo terzo

I princìpi della dinamica del punto materiale

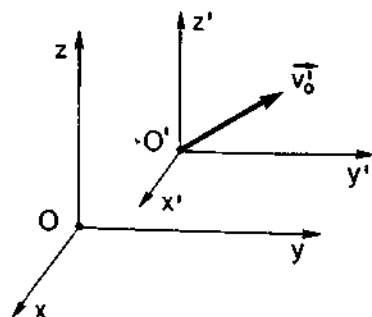
In questo capitolo continueremo ad occuparci del più semplice dei sistemi fisici, cioè del punto materiale; ma non ci accontenteremo più, come in cinematica, di descrivere semplicemente il moto. La dinamica tratta infatti le relazioni fra il *moto* degli oggetti e le *forze* che su di essi agiscono.

La dinamica è un insieme organico di leggi che descrive in maniera sistematica tutta una categoria di fenomeni: è cioè quella che si chiama una *teoria*.

Come ogni teoria, essa è basata su un certo numero di *princìpi*, cioè di regole di validità generale dedotte dalla osservazione dei fatti: regole che rappresentano il punto di partenza per la enunciazione dei teoremi o leggi e per la loro formulazione in termini di equazioni.

Molto spesso nella storia della scienza (e in particolare nella storia dello sviluppo della dinamica) un principio è stato enunciato in virtù di una forte capacità di intuizione, ma in base a prove sperimentali relativamente deboli. Tuttavia la teoria consente di fare una grande quantità di previsioni; e la riprova sperimentale di tali previsioni rappresenta una riprova indiretta, ma molto efficace, dei princìpi su cui la teoria è basata.

I princìpi della *dinamica classica* (princìpi non tutti fra di loro indipendenti) sono il «Principio di Relatività»; il «Principio di Inerzia» (o primo principio della dinamica); il «Secondo Principio della Dinamica»; e il «Terzo Principio della Dinamica». Quest'ultimo principio non interviene nella dinamica del punto materiale, ma solo nella dinamica dei sistemi; verrà pertanto da noi enunciato in un altro capitolo (par. VI.2).

Abbiamo usato sopra la locuzione «dinamica classica»: con ciò si intende la teoria sviluppata da Galileo e Newton, teoria che descrive correttamente il moto di oggetti che si muovano con velocità v piccola rispetto a quella c della luce ($c = 300.000$ km/s). Per descrivere il moto di oggetti con velocità prossima a quella della luce, è necessario ricorrere a una teoria più ampia («Teoria della Relatività di Einstein») che comprende la meccanica classica come caso particolare quando $\frac{v}{c} << 1$. In questo libro tratteremo la teoria della Relatività solo nell'ultimo capitolo, introducendone i concetti fondamentali.

Sistemi di riferimento in moto traslatorio relativo. Tutti i punti solidali col sistema mobile hanno la stessa velocità.

Va notato che dei suddetti princìpi, quello di *relatività*, quello di *inerzia* ed il *terzo* principio (che sono princìpi di «invarianza» o di «conservazione») restano validi anche nella teoria di Einstein. Solo il *secondo principio* ha validità limitata alla dinamica classica; esso è *uno* dei modi possibili per scrivere una relazione fra forza e movimento che soddisfi gli altri princìpi. Ma su questo punto torneremo in maniera più approfondita più avanti.

Nella descrizione di fenomeni meccanici ci capiterà spesso di utilizzare sistemi di riferimento diversi, e non di rado in moto relativo uno rispetto all'altro. Se due sistemi si muovono in modo che gli assi coordinati mantengano costante il loro orientamento relativo, si dice che si muovono di *moto traslatorio* uno rispetto all'altro. Se un sistema si muove rispetto all'altro di moto traslatorio, allora se in un certo intervallo di tempo un suo punto (ad esempio l'origine) subisce un certo spostamento $\Delta\vec{r}$, tutti gli altri punti solidali con il sistema subiscono lo stesso spostamento.

Moto traslatorio rettilineo e uniforme

Un caso particolare notevole di moto tralsatorio è il moto *traslatorio rettilineo e uniforme*: l'origine di un sistema (così come tutti gli altri suoi punti) si muove allora di moto rettilineo e uniforme rispetto all'altro sistema. Per esempio un vagone che si muove di moto uniforme su un binario rettilineo può essere un sistema di riferimento conveniente per descrivere fenomeni che si svolgono al suo interno. Gli stessi fenomeni possono però essere descritti anche da un sistema di riferimento solidale con le rotaie. Così, per esempio, un punto fermo nel vagone appare in movimento rispetto alle rotaie. Vagone e rotaie sono sistemi di riferimento in moto tralsatorio uniforme l'uno rispetto all'altro.

III.1. Principio di relatività

Principio di relatività

Il *principio di relatività* è uno dei princìpi fondamentali non solo della dinamica, ma di tutta la fisica moderna. Ripreso da Einstein in un contesto più ampio all'inizio di questo secolo, esso era stato tuttavia enunciato per la prima volta da Galileo.

«Se due laboratori si muovono l'uno rispetto all'altro di moto traslatorio rettilineo ed uniforme, non esiste esperimento che dia risultati diversi nell'uno e nell'altro laboratorio».

Enunciato di Galileo

In altri termini, i due laboratori sono completamente indistinguibili.

È istruttivo riportare testualmente il primo enunciato del principio di relatività dato da Galileo nel suo «Dialogo sopra i massimi sistemi del mondo»:

«Rinserratevi con qualche amico nella maggior stanza che sia sotto coperta di alcun gran naviglio, e quivi fate di aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anche un gran vaso d'acqua, e dentrovi dei pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; e i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno uguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, egual spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niuno dubbio vi sia che mentre il

vassello sta fermo non debbano succedere così; fate muovere la nave con quanta si voglia velocità: ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina oppur sta ferma...».

È bene rilevare che affinché valga il principio di relatività *non* è necessario che la misura delle varie grandezze fisiche fornisca lo stesso risultato nei due laboratori: ad esempio l'uomo che salta «a piè giunti» sulla nave ha una certa velocità rispetto alla nave stessa; e una velocità diversa rispetto a un osservatore che lo guardi da terra.

L'importante è che le *relazioni fra le grandezze fisiche* (cioè le leggi fisiche) siano le stesse nei due sistemi di riferimento. In altri termini, ciò che è richiesto dal principio di relatività è che se uno dei membri di una equazione fisica cambia passando da un sistema di riferimento all'altro, anche l'altro membro cambi coerentemente in modo da preservare la relazione di uguaglianza.

Ciò si esprime dicendo che i *due membri di una equazione fisica devono essere covarianti passando da un sistema di riferimento a un altro che si muova rispetto al primo di moto traslatorio rettilineo ed uniforme.* Il caso che ciascuno dei due membri resti immutato passando da un sistema all'altro (il caso cioè che i due membri siano *invarianti* anziché covarianti) è un caso particolare che si presenta solo raramente, per grandezze fisiche molto particolari.

III.2. Definizione (statica) di forza

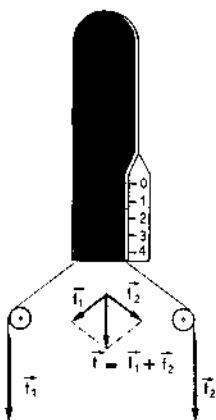
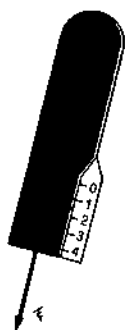
Definizione statica di forza

Come abbiamo accennato, la dinamica si occupa delle relazioni fra movimento e forze. Necessario punto di partenza è dunque la definizione operativa di forza.

Si esercita una forza su un oggetto quando lo si *spinge* o lo si *tira* (azione che può essere esercitata anche «a distanza», cioè senza contatto fisico diretto: ad esempio la terra attrae gli oggetti circostanti, non a contatto con essa, dando origine alla cosiddetta «forza peso»). Se si esercita una forza su un oggetto libero di muoversi - oggetto inizialmente fermo - esso si mette in movimento; se l'oggetto non è libero di muoversi (se esso è vincolato) esso stesso (oppure il vincolo che gli impedisce il libero movimento) si deforma.

Dinamometro

La definizione operativa di forza potrebbe dunque basarsi sia sulla misura del movimento che essa produce (definizione «dinamica») che delle deformazioni (definizione «statica»). Poiché gli effetti delle forze in termini di movimento verranno studiati più avanti mediante quelle leggi di cui stiamo qui ponendo le premesse, dare a questo punto una definizione dinamica di forza sarebbe difficile, e suscettibile del rischio di tautologie. Cominceremo dunque con una definizione statica, basata sul cosiddetto *dinamometro a deformazione*.

Un dinamometro a deformazione è sostanzialmente una molla tarata. Consideriamo una molla vincolata per un suo estremo a un sostegno fisso, ad esempio appesa al soffitto; dotiamo l'altro estremo di una freccia di riferimento (vedi figura). In corrispondenza della posizione assunta dalla freccia quando la molla non è sollecitata segnamo lo zero su un regolo solidale col sostegno. Se ora a questo estremo viene applicata una forza, la molla si deforma. Scegliamo convenzionalmente una certa forza campione come

forza *unitaria*; ad esempio possiamo prendere come unità di forza il peso di un determinato oggetto, cioè la forza con cui quell'oggetto (potrebbe essere ad esempio costituito da 10 centimetri cubi di ferro) viene attratto dalla Terra.

Applichiamo la forza campione all'estremo libero della molla: laddove si porta la freccia di riferimento, segnamo sul regolo di riferimento il numero 1. Se ora applichiamo alla molla due pesi fra loro uguali e pari al peso unitario (ognuno di essi, applicato alla molla, porta la freccia in corrispondenza dell'1), la molla subisce un allungamento circa doppio, in corrispondenza del quale segnamo 2.

Proseguendo in tal modo abbiamo costruito un *dinamometro*, cioè uno strumento capace di misurare - e dunque di definire operativamente - la grandezza fisica forza (o meglio l'*intensità di una forza*).

Una forza di fissata intensità può, evidentemente, essere esplicata in qualunque direzione.

Data una forza di una certa intensità agente in una determinata direzione, una tecnica semplice per cambiare la direzione senza apprezzabilmente modificarne l'intensità è basata sull'uso di un filo flessibile e di una carrucola ben lubrificata.

Segue dalla definizione operativa di forza che due forze fra di loro uguali in intensità, ed esercitate simultaneamente nello stesso punto con la stessa direzione, originano una forza doppia.

Semplici esperimenti come quello illustrato in figura consentono di concludere che forze esercitate nello stesso punto in direzioni diverse equivalgono a una forza risultante ricavabile con la «regola del parallelogramma»: le forze si sommano cioè come si sommano i vettori.

La forza è una grandezza vettoriale.

III.3. Sistemi di riferimento inerziali

Il moto di un determinato punto materiale (così come quello di qualunque oggetto) si svolge con modalità diverse a seconda di quale sia il sistema di riferimento da cui esso viene osservato.

Sistemi di riferimento inerziali

I sistemi di riferimento in cui le leggi della dinamica risultano le più semplici possibili sono i *sistemi di riferimento inerziali*.

Un sistema di riferimento inerziale è definito dalla condizione che in esso un punto materiale «libero» (non sottoposto cioè ad alcun agente capace di esercitare su di esso una forza) *se posto inizialmente in quiete permane in quiete*.

Posizione di equilibrio

Se un oggetto inizialmente in quiete resta in quiete, si dice, per definizione, che esso si trova in una *posizione di equilibrio*. Un sistema inerziale è definito dunque dalla condizione che in esso ogni posizione è posizione di equilibrio per un punto libero.

In pratica, non è possibile realizzare condizioni tali che un oggetto sia veramente libero: sulla terra, ad esempio, ogni oggetto è sottoposto almeno alla forza peso. Si realizzano condizioni equivalenti a quelle di punto libero mettendo l'oggetto in condizioni tali che la forza peso ed ogni altra eventuale forza «attiva» esercitata su di esso dall'ambiente venga compensata («equilibrata») da una forza uguale ed opposta che ne annulli l'effetto: ad esempio, appoggiando l'oggetto su un piano perfettamente orizzontale e liscio.

La Terra si comporta *approssimativamente* come un sistema inerziale. Una palla da biliardo posta su un tavolo orizzontale (che compensa la forza

peso) è in equilibrio solo perché non è veramente libera. Se tale fosse, un osservatore terrestre la vedrebbe compiere una complicata traiettoria, a causa del moto che la Terra, e con essa l'osservatore, compie nel sistema solare. Un effetto di questo tipo è stato messo in evidenza da un famoso esperimento di Foucault («pendolo di Foucault») in cui fu mostrato che il piano di oscillazione di un pendolo ruota nel laboratorio intorno a un asse verticale col passare delle ore del giorno. In realtà il piano di oscillazione del pendolo ha orientamento fisso nel sistema solare, e intorno ad esso ruota il laboratorio insieme alla Terra.

Pendolo di Foucault

Si avvicina assai più ad essere inerziale un sistema con origine nel sole e assi orientati solidalmente rispetto alle stelle cosiddette fisse.

Se un certo sistema di riferimento è inerziale, il principio di relatività ci consente di concludere che *ogni altro sistema di riferimento che si muova rispetto al primo di moto traslatorio rettilineo e uniforme è anch'esso inerziale*

Esempio

E.III.1. *Dimostrare la precedente affermazione.*

Dire che un sistema è inerziale significa che in esso, se un punto materiale libero viene posto in quiete, permane in quiete. Se l'altro sistema non fosse inerziale, in esso un punto materiale libero, inizialmente in quiete, potrebbe cominciare a muoversi spontaneamente. Uno sperimentatore, disposto nell'uno e nell'altro sistema, troverebbe per lo stesso esperimento risultati diversi: ma ciò è contrario al principio di relatività se i sistemi sono in moto relativo traslatorio rettilineo e uniforme.

Nel ricavare e nello scrivere le leggi della dinamica faremo sempre l'ipotesi implicita – salvo avviso in contrario – di trovarci in un sistema di riferimento inerziale.

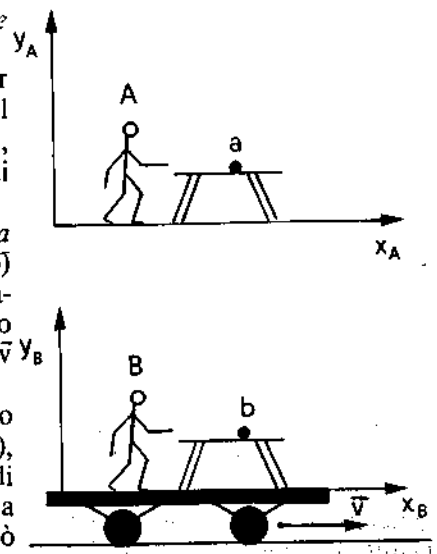
III.4. Principio di inerzia

Principio di inerzia

Il principio di inerzia afferma che *in un sistema di riferimento inerziale, un punto materiale libero che abbia a un certo istante una velocità $\vec{v}$, mantiene indefinitamente (fino a che resta libero) il suo stato di moto rettilineo e uniforme* ($\vec{v}$ = *costante*).

Il principio di inerzia è conseguenza del principio di relatività. Per mostrarlo, consideriamo due sperimentatori, A e B, in due laboratori: il laboratorio B si muova insieme a un riferimento (inerziale) ad esso solidale, di moto rettilineo uniforme con velocità costante $\vec{v}$ rispetto al sistema di riferimento (inerziale) solidale con A.

Lo sperimentatore A, ponendo ad esempio una palla da biliardo a ferma su un tavolo liscio (in modo che si comporti come un punto libero) la vede restare ferma per definizione di sistema inerziale. Lo sperimentatore A chiede inoltre a B di porre un'altra palla da biliardo, b, su un tavolo orizzontale liscio fermo rispetto a B e dunque dotato di velocità costante $\vec{v}$ rispetto ad A.

Per A, la palla b rappresenta un punto libero (il concetto di punto libero è evidentemente *invariante* da un sistema di riferimento a un altro), ma con velocità iniziale $\vec{v}$. Ammettiamo che per A non valga il principio di inerzia: la velocità di b, che inizialmente per A valeva $\vec{v}$, comincerà a variare; ad esempio b comincia a rallentare. Ma dal punto di vista di B, ciò

significa che l'oggetto libero b inizialmente in quiete comincerebbe a muoversi spontaneamente. In questo caso non varrebbe il principio di relatività: non vi sarebbe simmetria fra il sistema inerziale A e il sistema B in moto traslatorio rettilineo e uniforme rispetto ad esso, poiché in B (contrariamente a quanto accade in A) un punto libero inizialmente in quiete non rimarrebbe in quiete.

Il principio di relatività implica il principio di inerzia

Dunque il principio di relatività implica il principio di inerzia. Non è vero il viceversa: perché valga il principio di relatività *tutti* gli esperimenti di fisica, e non solo quelli relativi a punti materiali liberi, devono fornire gli stessi risultati in sistemi con velocità relativa costante.

Va notato che prima di Galileo si pensava che fosse necessaria una forza per *mantenere* un corpo in uno stato di moto rettilineo uniforme; convinzione derivata da osservazioni quotidiane, visto che ponendo un corpo in movimento la sua velocità tende a diminuire, fino a che il corpo si ferma. Tuttavia queste osservazioni si riferiscono a oggetti che *non* sono liberi. Col principio di inerzia si riconosce che la forza necessaria per mantenere, ad esempio, un veicolo in movimento, serve a compensare le forze frenanti sempre presenti. Eliminando ogni forza frenante (attrito), la velocità si manterrebbe spontaneamente costante, senza bisogno di alcuna forza attiva.

Esempio

E.III.2. *A causa della presenza dell'aria, l'esperimento sopra descritto può svolgersi con modalità diverse nel sistema A e nel sistema B. Discutere come ciò sia compatibile col principio di relatività.*

Se l'aria è ferma rispetto al sistema A, nel sistema B essa si muove con velocità $-\vec{v}$. I due sistemi di riferimento non sono dunque fra di loro equivalenti, perché nel sistema B spira un «vento» di velocità $-\vec{v}$ che tende a far muovere la palla b nel verso negativo dell'asse delle x: naturalmente, nel sistema A si vede invece la palla b rallentare per effetto della resistenza che l'aria ferma oppone al suo moto. (In entrambi i sistemi, mentre a è un punto materiale libero, b non lo è essendo sottoposto alla forza esercitata dall'aria che si muove rispetto ad esso).

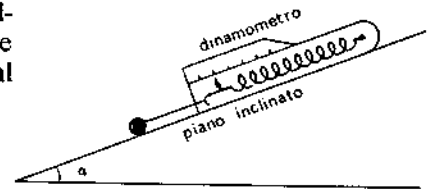
Affinché i due sistemi fossero equivalenti si dovrebbe o far sì che anche in B l'aria sia ferma (il laboratorio potrebbe essere un vagone chiuso); ovvero far spirare anche in A un vento di velocità $-\vec{v}$. Solo una volta ristabilita in questo modo simmetria fra i sistemi, disponendo la palla ferma sul rispettivo tavolo si compie in essi lo *stesso* esperimento; e solo allora il principio di relatività richiede che si abbiano gli stessi risultati.

III.5. Forza e accelerazione

Abbiamo visto che in un sistema di riferimento inerziale un punto materiale libero (cioè non sottoposto a forze) se era inizialmente fermo resta fermo; se inizialmente si muoveva con una certa velocità, continua a muoversi con quella velocità. In un sistema di riferimento inerziale non serve dunque una forza per mantenere fermo un punto materiale, né per mantenerne invariata la velocità.

Le forze, in un sistema di riferimento inerziale, possono perciò avere a che fare solo con le *variazioni* di velocità: ci aspettiamo dunque che esista una relazione fra il risultante $\vec{f}$ delle forze applicate a un punto e l'accelerazione $\vec{a}$ che il punto subisce.

Per analizzare sperimentalmente quale relazione intercorra fra il risultante $\vec{f}$ delle forze applicate a un punto materiale e l'accelerazione $\vec{a}$ del punto stesso, cominciamo con il porci in condizioni di particolare semplicità. Poniamoci cioè in condizioni tali che il risultante $\vec{f}$ delle forze agenti sul punto materiale, misurato staticamente, risulti avere una dipendenza semplice dalle caratteristiche fisiche e dalla geometria di sistemi fisici controllabili: per i suoi primi esperimenti al riguardo, Galileo fece ricorso a un piano inclinato levigato. In tali condizioni è facile verificare sperimentalmente col dinamometro che il risultante $\vec{f}$ delle forze agenti staticamente sul punto materiale è tangente al piano ed è in modulo proporzionale al seno dell'angolo α di inclinazione

$$f = p \sin \alpha .$$

Il punto materiale risulta cioè soggetto a una forza (costante) la cui intensità f è sempre la stessa lungo il piano inclinato; e il valore di f può essere scelto, entro certi limiti, scegliendo opportunamente l'angolo α di inclinazione.

È ragionevole assumere che la stessa forza che si misura staticamente (cioè che agisce sul punto quando esso *si trova* in una certa posizione) agisca su di esso anche quando esso *passa* per quella posizione.

Proporzionalità fra forza e accelerazione

Sperimentando con diversi angoli di inclinazione, possiamo misurare quale accelerazione abbia il moto del punto in corrispondenza di valori diversi per la forza applicata: *tali misure ci portano a concludere che il punto materiale subisce una accelerazione $\vec{a}$ proporzionale in modulo alla intensità del risultante delle forze applicate, e diretta come il risultante $\vec{f}$ stesso*

$$\vec{f} = m_i \vec{a} \qquad \text{[III.1]}$$

Massa inerziale

Il coefficiente di proporzionalità m_i fra forza e accelerazione viene detto *massa inerziale* del punto materiale considerato. La massa inerziale è definita dalla [III.1]: la massa inerziale m_i di un oggetto è tanto più grande quanto più piccola risulta, a parità di forza applicata, l'accelerazione dell'oggetto.

III.6. Massa inerziale e massa gravitazionale

L'equazione [III.1], cui siamo arrivati analizzando il risultato di esperimenti eseguiti col piano inclinato, è in realtà una legge di carattere generale. Quando uno stesso punto materiale – in un sistema di riferimento inerziale – viene posto in condizioni tali da essere sottoposto a forze misurabili staticamente, si riscontra che:

a) la forza può essere posta in relazione con le caratteristiche e la configurazione di sistemi fisici presenti nell'ambiente circostante, oltre che del punto materiale considerato. Nel caso di un oggetto che si trova sul piano inclinato la forza dipende, oltre che dalla massa del punto, dalla sua posizione in rapporto alla terra e dalla inclinazione del piano su cui è appoggiato. Le relazioni che consentono di esprimere le forze in funzione delle caratteristiche del punto e dei sistemi con cui esso interagisce vengono dette le *leggi delle forze*. Sulle leggi delle forze torneremo, in termini generali, nel paragrafo III.8; e, in maniera più dettagliata, nel capitolo V.

Leggi delle forze

b) se il punto materiale viene lasciato libero di muoversi, la sua accelerazione $\vec{a}$ risulta essere legata alla forza dalla equazione [III.1].

Qualunque sia la natura delle forze applicate, e qualunque sia lo stato di moto dell'oggetto, la costante m_i – cioè la massa inerziale di quell'oggetto – è la stessa: una forza di pari intensità produce una pari accelerazione (nella direzione della forza), e forza doppia produce accelerazione doppia. La massa inerziale è ovviamente una caratteristica dell'oggetto considerato: in altri termini, la stessa forza applicata a due oggetti diversi produce in generale accelerazioni diverse. Come abbiamo già accennato, la definizione operativa di massa inerziale è contenuta nella [III.1]: la massa inerziale si misura misurando l'accelerazione subita dal corpo quando ad esso è applicata una forza nota.

Massa gravitazionale

Ci aspettiamo che esista una relazione fra la costante m_i e la *massa* dell'oggetto (con massa senza aggettivi, o *massa gravitazionale*, si intende quella caratteristica del corpo che viene misurata con la *bilancia*: sulla definizione operativa di massa torneremo fra un attimo). Appartiene alla esperienza quotidiana, infatti, che se la stessa forza viene applicata a due corpi di massa diversa (ad esempio a una palla di bronzo e a una palla di alluminio di pari volume) quella di massa minore subisce una accelerazione maggiore.

Per verificare se esiste una relazione fra massa inerziale m_i (definita dalla [III.1]) e massa gravitazionale m, è necessario dare innanzitutto la definizione operativa di massa gravitazionale.

Bilancia

La massa gravitazionale è quella grandezza fisica che si misura con la bilancia. Una bilancia è costituita, in linea di principio, da una asticella rigida omogenea, incernierata nel suo punto centrale a un asse orizzontale, e dotata agli estremi di due piatti. Quando i due piatti sono vuoti, la bilancia resta in equilibrio in posizione orizzontale, e ciò viene segnalato da un indice solidale con l'asticella.

Si assegna convenzionalmente massa pari ad uno ad un oggetto campione peraltro arbitrario (la massa di 1 kilogrammo è la massa di un particolare oggetto di platino conservato al Bureau des Standards di Parigi).

Ponendo poi la massa unitaria su uno dei piatti della bilancia, si dice che un certo oggetto ha massa pari ad uno quando esso, posto sull'altro piatto, equilibra la bilancia. Un altro oggetto avrà massa pari a due se esso equilibra la bilancia, quando, sull'altro piatto, sono posti contemporaneamente due oggetti di massa pari ad uno; e così via. Così procedendo si costruiscono multipli e sottomultipli del kilogrammo. Abbiamo così definito la massa gravitazionale m.

Massa e peso

Va notato che, fissato il luogo in cui si esegue la misura, il peso è per definizione proporzionale alla massa gravitazionale: infatti se la massa unitaria ha un certo peso (cioè se essa, attaccata a un dinamometro, porta l'indice in corrispondenza di una certa tacca), la massa doppia ha peso doppio (essa, attaccata al dinamometro, porta l'indice in corrispondenza della tacca doppia). Per convincersene, basta rileggere la definizione di forza che abbiamo dato nel paragrafo III.2.

Tuttavia, se si esegue la misura in un luogo diverso (in particolare se si esegue la misura ad alta quota, in maniera che la distanza dal centro della Terra sia più grande) si troverà che mentre la massa m di un certo oggetto resta sempre la stessa (la bilancia continua a fornire lo stesso risultato), il suo peso p (misurato dalla deformazione subita dal dinamometro) va diminuendo via via che aumenta la distanza dal centro della Terra. La massa m è cioè una proprietà (scalare) intrinseca di ogni corpo; mentre il peso (cioè la forza con cui tale oggetto è attratto dalla Terra) è un vettore che dipende dalla posizione relativa fra quell'oggetto e la Terra. Si può dunque scrivere:

$$\vec{p} = m\vec{g} \qquad \text{[III.2]}$$

dove $\vec{p}$ è il peso dell'oggetto; m è la massa (gravitazionale); e $\vec{g}$ è un vettore (la cui direzione si chiama per definizione *verticale*) che in ogni località è indipendente dal particolare corpo che si considera ($\vec{g}$ è lo stesso per tutti i corpi) ma dipende, seppure debolmente, dalla posizione e in particolare dalla quota. Sulla dipendenza di $\vec{g}$ dalla posizione torneremo in maniera più approfondita nel V capitolo. Il vettore $\vec{g}$ è detto *accelerazione di gravità*.

Verticale

Accelerazione di gravità

Partendo da un famoso esperimento consistente nel verificare che due diversi oggetti pesanti, lasciati cadere dalla torre di Pisa, cadevano contemporaneamente, Galileo fu portato alla conclusione che ogni qualvolta sia trascurabile la resistenza dell'aria (cioè quando la forza agente sugli oggetti sia solo la [III.2]) tutti gli oggetti cadono (a parità di condizioni iniziali) con la stessa legge oraria; il che vale solo se tutti hanno la stessa accelerazione quando siano sollecitati dalla sola forza peso.

Usando la [III.1], con la forza $\vec{f}$ data dalla [III.2], si ha:

$$m\vec{g} = m_i\vec{a} \quad \text{da cui} \quad \vec{a} = \left(\frac{m}{m_i}\right)\vec{g} \qquad \text{[III.3]}$$

Affinché $\vec{a}$ sia indipendente dall'oggetto, deve essere $\left(\frac{m}{m_i}\right)$ = costante universale (uguale per tutti i corpi). Dunque: *massa gravitazionale e massa inerziale sono fra di loro proporzionali*. Ad esse possono essere assegnate, in particolare, le stesse dimensioni fisiche: e allora $\vec{g}$ ha le stesse dimensioni di $\vec{a}$, ed è giustificato il nome di *«accelerazione» di gravità* con cui viene designato.

Massa inerziale e massa gravitazionale

Questa conclusione, cui Galileo arrivò in base a un semplice esperimento non molto preciso, è oggi verificata sperimentalmente con grandissima precisione (10^{-11}, cioè una parte su cento miliardi). Grazie a questa proporzionalità, la [III.1] può essere scritta:

$$\boxed{\vec{f} = k\,m\,\vec{a}} \qquad \text{[III.4]}$$

In un sistema inerziale, il prodotto fra l'accelerazione subita da un corpo puntiforme e la massa gravitazionale di quel corpo, è proporzionale al risultante delle forze agenti sul corpo.

Scegliendo come unità di misura per le forze quella forza che imprime alla massa unitaria (1 kg nel SI) l'accelerazione unitaria (1 m/s^2 nel sistema SI) – questa unità di misura delle forze si chiama Newton, N – la [III.4] si scrive

$$\boxed{\vec{f} = m\,\vec{a}} \qquad \text{[III.5]}$$

che è l'usuale espressione del *secondo principio della dinamica*.

Secondo principio della dinamica

III.7. Misura dinamica di forze e secondo pricipio della dinamica

Nei paragrafi precedenti abbiamo tratto, dall'analisi dei risultati di esperimenti condotti in sistemi di riferimento inerziali, le seguenti conclusioni:

a) ogni qualvolta sia possibile misurare staticamente le forze agenti su un determinato oggetto, si trova che tali forze possono essere poste in relazione con le caratteristiche e la configurazione dell'oggetto in rapporto ad altri sistemi fisici presenti nell'ambiente (legge delle forze).

b) se l'oggetto, puntiforme, è libero di muoversi, si verifica sperimentalmente che esso si muove con una accelerazione proporzionale al risultante delle forze su di esso agenti. Il coefficiente di proporzionalità fra l'accelerazione e la forza (massa inerziale del corpo) risulta essere proporzionale alla massa gravitazionale del corpo stesso, quale si misura con la bilancia. Cosicché, mediante opportuna scelta dell'unità di misura delle forze, massa inerziale e massa gravitazionale possono essere fra di loro identificate.

Non sempre è facile, o addirittura possibile, misurare staticamente la forza agente su un oggetto: si pensi ad esempio alla forza che il Sole esercita su un pianeta, o alla forza frenante che l'aria esercita su un'automobile in movimento. In questo caso, la verifica della validità della [III.5] non può essere effettuata adottando la procedura seguita nei precedenti paragrafi: procedura che aveva come necessario punto di partenza una misura statica delle forze agenti sull'oggetto.

Tuttavia anche in questi casi è possibile verificare la validità della [III.5]. Ciò può essere fatto seguendo il seguente procedimento.

Consideriamo un punto materiale di massa nota, che si muove in una certa porzione di spazio sottoposto ad azioni da parte di altri sistemi fisici presenti nell'ambiente circostante. Mediante misure cinematiche, determiniamo l'accelerazione che il punto ha in ogni posizione.

Consideriamo come misura del risultante f delle forze che agiscono sul punto in ogni posizione, il prodotto della massa del punto per la sua accelerazione. La relazione [III.5] diviene allora un modo per misurare la forza: essa costituisce la definizione operativa della forza (definizione «dinamica» di forza). *La verifica del II principio della dinamica consiste allora nella verifica che la forza così misurata risulta legata alle caratteristiche del punto materiale e dei sistemi che con esso interagiscono mediante quelle stesse leggi delle forze che si ricavano da misure statiche, quando misure di questo tipo sono possibili.*

Definizione dinamica di forza

È questo, in particolare, l'approccio logico seguito da Newton per stabilire la validità della [III.5] in condizioni più generali (e complementari) rispetto a quelle in cui si era posto Galileo. L'approccio di Newton era in sostanza il seguente: osservando il moto di un pianeta, si misura tramite la [III.5] la forza a cui esso è soggetto mentre si muove, e si ricava così la legge della forza esercitata dal Sole sul pianeta (legge di gravitazione universale, che esprime come vedremo la forza mutua in funzione della posizione relativa e delle rispettive masse); e poi, ponendo tale forza f al primo membro della [III.5], si verifica che il moto degli altri pianeti è coerente con essa.

In molti testi di fisica, il II principio della dinamica viene introdotto in questo modo, cioè partendo dalla definizione operativa di forza tramite la [III.5]. In ogni caso, anche quando la legge delle forze venga determinata attraverso una misura dinamica, la [III.5] non è dunque una identità, ma *una equazione*, cioè una uguaglianza fra due membri autonomamente definiti. Al secondo membro compare una grandezza cinematica come l'accelerazione, cioè una quantità descrittiva del moto rispetto al sistema di riferimento inerziale considerato; al primo membro vi è una quantità dinamica come la forza, cioè una grandezza riconducibile almeno in linea di principio a una misura statica, ed espressa in termini della posizione relativa fra il punto materiale ed altri sistemi fisici che con esso interagiscono, nonché di altre proprietà – eventualmente dipendenti dal tempo – di tali sistemi. Tutto ciò verrà meglio chiarito da quanto discuteremo in questo e nei prossimi capitoli.

III.8. Le leggi delle forze

Leggi delle forze

Il secondo principio della dinamica è dunque espresso da una relazione, valida in qualunque sistema di riferimento inerziale, fra quantità cinematiche e quantità dinamiche. Essa può essere usata, evidentemente, sia a partire dalle prime per ricavare le seconde, sia viceversa. Misurando la cinematica di un punto materiale (e acquisendo così la conoscenza delle modalità con cui il suo moto si svolge) si determina la sua accelerazione e dunque con la [III.5] la forza che su di esso agisce: si può così ricavare la legge delle forze, che esprime le forze stesse subite dal punto materiale in funzione delle caratteristiche e della posizione dei sistemi fisici presenti nell'ambiente in cui il moto avviene. Nota invece la legge delle forze, la [III.5] può essere usata per calcolare l'accelerazione del punto materiale e quindi, attraverso opportuni procedimenti matematici e pur di specificare le condizioni iniziali, la sua legge oraria.

Unificazione delle leggi delle forze

Le leggi delle forze sono caratterizzate da una straordinaria varietà di manifestazioni. Tuttavia il loro studio perseguito dalla scienza negli ultimi tre secoli attraverso sistematiche misure sia statiche che dinamiche di forze, ha consentito di ricondurre questa varietà a poche leggi generali attraverso un processo di *unificazione* tuttora in corso.

Tutte le forze che si manifestano in natura possono essere ricondotte oggi a tre grandi categorie (forze *gravitazionali*; forze *elettromagnetiche*; forze *nucleari*), e vi sono motivi per sperare in ulteriori unificazioni future.

Forza gravitazionale

La *forza gravitazionale* è quella in virtù della quale due oggetti qualunque, posti in presenza l'uno dell'altro, si attraggono reciprocamente con una intensità che è proporzionale al prodotto delle masse dei due oggetti ed aumenta rapidamente al diminuire della loro distanza: se i due corpi sono puntiformi, l'intensità della forza di attrazione è inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. La legge che sintetizza le proprietà della forza gravitazionale verrà da noi discussa nel cap. V, insieme alle sue principali conseguenze. La forza gravitazionale condiziona la maggior parte dei fenomeni che si presentano nella nostra vita quotidiana, considerato che la *forza peso* non è altro in sostanza che la forza gravitazionale con cui la Terra attrae gli oggetti posti in vicinanza della sua superficie. La forza gravitazionale è anche responsabile del moto dei pianeti, e più in generale essa governa il moto dei corpi celesti nell'universo cosmico. Benché essa diminuisca in intensità all'aumentare della distanza fra due oggetti in interazione, essa continua infatti ad essere efficace anche quando gli oggetti sono a distanza relativa molto grande; ed anzi a grande distanza essa resta di solito la forza dominante rispetto a tutte le altre.

Forza peso

Forza elettromagnetica

La *forza elettromagnetica* è quella responsabile della struttura atomica e molecolare della materia; essendo stata recentemente unificata ad essa anche la cosiddetta «interazione debole», ad essa possono essere ricondotti anche i fenomeni di radioattività. Anche la forza elettrica fra due cariche puntiformi è inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza; essa è proporzionale al prodotto delle «cariche elettriche» dei due oggetti, e nel caso di due particelle elementari essa è largamente dominante (per un fattore $\sim 10^{40}$) rispetto alla interazione gravitazionale. Tuttavia di regola gli oggetti macroscopici sono sostanzialmente neutri dal punto di vista elettrico, e questo è il motivo per cui l'interazione elettrica ad esempio fra i corpi celesti è del tutto trascurabile rispetto all'interazione gravitazionale.

Quando si abbia a che fare, come quasi sempre accade, con cariche in movimento, ai fenomeni elettrici si accompagnano in maniera inscindibile i

Onde elettromagnetiche

fenomeni magnetici. In particolare le *onde elettromagnetiche* generate da cariche in movimento possono trasportare energia a grandi distanze senza subire attenuazioni apprezzabili; anche la luce è costituita da onde elettromagnetiche, che giocano dunque un ruolo fondamentale nei fenomeni naturali, anche alla scala cosmica.

Fra oggetti vicini o addirittura a contatto, anche se mediamente scarichi (essendo costituiti in ugual misura da cariche elettriche positive e negative), le forze elettromagnetiche possono divenire dominanti in virtù della diversa dislocazione delle cariche positive rispetto a quelle negative. In effetti, tutte le forze che si manifestano fra gli oggetti che ci circondano possono essere ricondotte (con la sola esclusione della forza peso) a forze elettromagnetiche: ad esempio le forze di attrito, quelle conseguenti a deformazioni, quelle di pressione, quelle conseguenti a dilatazione termica, ecc. Tuttavia, non è di solito conveniente ricondurre queste forze alla loro matrice elettromagnetica, ed è più comodo esprimerle in termini approssimati mediante parametri macroscopici (caratteristiche meccaniche quali elasticità, coefficienti di attrito, viscosità, ecc.). Ci occuperemo di ciò nel V capitolo, mentre la trattazione delle leggi dell'elettromagnetismo classico (che consentono di trattare le interazioni fra cariche elettriche macroscopiche ferme o in movimento) è rimandata ad un altro volume. All'*elettrodinamica quantistica*, che tratta le interazioni fra cariche microscopiche, dedicheremo anche in quella sede solo qualche cenno.

Elettrodinamica quantistica

Forze nucleari

Le *forze nucleari* sono quelle responsabili della stabilità del nucleo atomico; esse sono molto intense a distanze molto piccole (dell'ordine di 10^{-15} m) ma sono trascurabili a distanze superiori alle dimensioni caratteristiche del nucleo atomico; benché esse rappresentino l'indispensabile «colla» che consente le varie manifestazioni stabili della materia, il loro effetto non influenza i fenomeni macroscopici altro che in alcuni processi (fissione o fusione nucleare) che non verranno trattati in questi volumi.

Una volta note le leggi delle forze, e note le caratteristiche e la posizione dei sistemi fisici presenti nell'ambiente in cui avviene il moto del punto materiale considerato, il primo membro della equazione [III.5] (cioè il risultante delle forze che agiscono sul punto materiale) può essere espresso in termini di parametri noti.

Qualora la forza risultasse così espressa esplicitamente in funzione del tempo (ma fosse indipendente da parametri spaziali, e in particolare dalla posizione occupata dal punto materiale) la [III.5] consentirebbe di ricavare direttamente l'accelerazione $\vec{a}$ come funzione del tempo; e attraverso la procedura descritta nel par. II.11 potrebbe essere ricavata la legge oraria (una volta assegnate, come è in ogni caso necessario, le condizioni iniziali). Questa situazione si presenta assai raramente nella pratica.

Più di frequente capita il caso in cui la forza subita dal punto materiale sia nota in funzione della posizione (cioè delle coordinate) del punto materiale stesso: di norma ciò avviene quando i sistemi che esercitano delle forze su di esso abbiano caratteristiche e posizione fisse, cioè indipendenti dal tempo (oltre ad esserci esplicitamente note le leggi che esprimono la forza in funzione di tali caratteristiche e della posizione relativa fra il punto materiale e tali sistemi). In questi casi la [III.5] assume la forma:

$$\vec{f}(\vec{r}) = m\,\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad \text{[III.6]}$$

ovvero, introducendo le componenti del vettore $\vec{r}$ e proiettando la [III.6] sugli assi coordinati:

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ f_y(x, y, z) = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ f_z(x, y, z) = m\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases} \qquad \text{[III.7]}$$

Benché in questo caso la forza che l'ambiente esercita sia, in ogni fissata posizione, indipendente dal tempo, il primo membro della [III.7] *non* è in generale costante nel tempo: la forza che il punto subisce cambia perché, al passare del tempo, esso viene a trovarsi in posizioni diverse. In altri termini le coordinate x, y, z sono funzioni del tempo

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Ed anzi, proprio queste funzioni del tempo rappresentano le incognite del problema.

Equazioni differenziali

Le [III.7] sono quello che si chiama un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine nelle tre funzioni incognite $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. In effetti, una equazione differenziale è, per definizione, una relazione che lega una funzione incognita alle sue derivate; e l'ordine dell'equazione differenziale è il massimo ordine di derivate della funzione incognita che in essa compare. Nel capitolo V, insieme alle leggi delle forze nelle configurazioni più usuali e semplici, discuteremo anche i metodi di soluzione di alcune equazioni differenziali.

Quando le forze subite dal punto sono generate da sistemi fisici, le cui caratteristiche e posizioni cambino in maniera predeterminata e nota, allora la forza, anche in ogni fissata posizione, cambia al passare del tempo. Il sistema di equazioni differenziali [III.7] diviene allora

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Questo è un sistema di equazioni differenziali dipendenti dal tempo; la sua soluzione è in generale più complessa rispetto al caso [III.7], anche se concettualmente non molto diversa.

Non di rado avviene che la forza dipenda dalla velocità del punto rispetto a sistemi presenti nell'ambiente: vedremo nel cap. V il caso delle forze di resistenza del mezzo; e a suo tempo tratteremo il caso di forze di natura magnetica.

In questo caso la equazione del moto assume la forma:

$$f\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad \text{[III.8]}$$

Finalmente, si può presentare il caso in cui i sistemi presenti nell'ambiente, che esercitano le forze sul punto materiale P considerato, si muovano a loro volta, secondo una legge oraria non nota a priori, in virtù delle forze che reciprocamente si scambiano, e in virtù delle stesse forze che il punto materiale P esercita su di essi. Questo caso dà origine a problemi di grande complessità matematica. Le situazioni più semplici, appartenenti a questa categoria, verranno da noi discusse nei capitoli dedicati alla *dinamica dei sistemi*, insieme ad alcune tecniche generali per ricavare informazioni almeno parziali sul moto dei sistemi stessi.

Nei capitoli dedicati alla dinamica del punto materiale nei sistemi di riferimento inerziali, il caso più generale che si possa presentare è dunque descritto dall'equazione vettoriale (o in altri termini dal sistema di equazioni scalari) [III.8]; ma a parte alcuni esempi molto particolari, tratteremo diffusamente solo il caso che le leggi delle forze siano indipendenti dal tempo e dalla velocità, riconducendoci così alla equazione [III.6] (o, equivalentemente, al sistema [III.7].

III.9. Trasformazioni galileiane e invarianza relativistica del II principio della dinamica

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale e un secondo sistema di riferimento (non necessariamente orientato come il primo), anch'esso inerziale, che si muove di moto traslatorio con velocità $\vec{V}_o$ rettilinea ed uniforme rispetto al primo. Per comodità chiamiamo convenzionalmente *fisso* il primo di questi sistemi e *mobile* il secondo. Contrassegneremo con un apice le grandezze relative al sistema mobile.

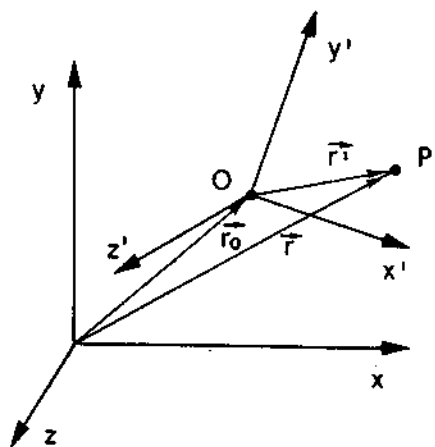
Vogliamo dimostrare che il secondo principio della dinamica soddisfa il principio di relatività: ciò significa dimostrare che, nell'ambito della concezione classica, i due membri della [III.5] si trasformano allo stesso modo passando da un sistema di riferimento all'altro (o, come si dice, che l'equazione [III.5] è covariante).

Consideriamo un punto materiale P. La relazione che passa fra il suo vettore posizione nei due sistemi di riferimento è (vedi figura)

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_o \qquad \text{[III.9]}$$

Il vettore $\vec{r}_o$ è il vettore posizione dell'origine O' del sistema mobile rispetto al sistema fisso. Tenuto conto che la velocità $\vec{V}_o$ dell'origine O' è costante, potremo anche scrivere $\vec{r}_o = \vec{V}_o t$ (avendo supposto per semplicità che O' coincida con O all'istante $t = 0$) per cui la [III.9] può essere scritta come:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}_o t \qquad \text{[III.10]}$$

Una relazione di uguaglianza fra vettori (come la [III.9] o la [III.10]) *implica l'eguaglianza fra le rispettive rappresentazioni cartesiane rispetto a uno stesso sistema di riferimento*: in altri termini le componenti del vettore al primo membro devono essere uguali alle componenti omologhe del vettore al secondo membro purché sia il primo che il secondo membro siano proiettati sugli assi di uno *stesso sistema di riferimento*. Ma noi ora siamo interessati a trovare la relazione che intercorre fra le componenti del vettore $\vec{r}'$ nel sistema mobile, e le componenti del vettore $\vec{r}$ nel sistema fisso. Ciò può

essere fatto introducendo i versori $\hat{\imath}\,\hat{\jmath}\,\hat{k}$ degli assi coordinati del sistema fisso e $\hat{\imath}'\,\hat{\jmath}'\,\hat{k}'$ del sistema mobile. La [III.10] si scrive allora:

Versori degli assi coordinati

$$\hat{\imath}' x' + \hat{\jmath}' y' + \hat{k}' z' = \hat{\imath}\,(x - V_{ox}\,t) + \hat{\jmath}\,(y - V_{oy}\,t) + \hat{k}\,(z - V_{oz}\,t) \quad \text{[III.11]}$$

La [III.11] *non* implica in generale che sia $x' = x - V_{ox}\,t$; $y' = y - V_{oy}\,t$; $z' = z - V_{oz}\,t$. Per convincerci, moltiplichiamo la [III.11] stessa scalarmente prima per $\hat{\imath}'$, poi per $\hat{\jmath}'$ e poi per $\hat{k}'$. Tenendo conto che il prodotto scalare di un versore per sé stesso vale 1, mentre il prodotto scalare fra due vettori fra loro ortogonali è nullo, otteniamo

$$\left.\begin{aligned} x' &= (\hat{\imath}' \cdot \hat{\imath})\ (x - V_{ox}\,t) + (\hat{\imath}' \cdot \hat{\jmath})\ (y - V_{oy}\,t) + (\hat{\imath}' \cdot \hat{k})\ (z - V_{oz}\,t) \\ y' &= (\hat{\jmath}' \cdot \hat{\imath})\ (x - V_{ox}\,t) + (\hat{\jmath}' \cdot \hat{\jmath})\ (y - V_{oy}\,t) + (\hat{\jmath}' \cdot \hat{k})\ (z - V_{oz}\,t) \\ z' &= (\hat{k}' \cdot \hat{\imath})\,(x - V_{ox}\,t) + (\hat{k}' \cdot \hat{\jmath})\,(y - V_{oy}\,t) + (\hat{k}' \cdot \hat{k})\,(z - V_{oz}\,t) \end{aligned}\right\} \quad \text{[III.12]}$$

Le [III.12] esprimono la relazione che intercorre fra la rappresentazione cartesiana (x', y', z') del vettore $\vec{r}\,'$ nel sistema mobile, e la rappresentazione cartesiana (x, y, z) del vettore $\vec{r}$ nel sistema fisso. Notiamo che ognuno dei prodotti scalari fra versori presenti al secondo membro non è altro che il coseno dell'angolo fra i rispettivi assi (ad esempio $(\hat{\jmath}' \cdot \hat{k}) = \cos \hat{y'z}$).

Usando il formalismo delle matrici introdotto nel par. II.4, la [III.12] può essere scritta come

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{\imath}' \cdot \hat{\imath}) & (\hat{\imath}' \cdot \hat{\jmath}) & (\hat{\imath}' \cdot \hat{k}) \\ (\hat{\jmath}' \cdot \hat{\imath}) & (\hat{\jmath}' \cdot \hat{\jmath}) & (\hat{\jmath}' \cdot \hat{k}) \\ (\hat{k}' \cdot \hat{\imath}) & (\hat{k}' \cdot \hat{\jmath}) & (\hat{k}' \cdot \hat{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - V_{ox}\,t \\ y - V_{oy}\,t \\ z - V_{oz}\,t \end{pmatrix}$$

ovvero anche

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} x - V_{ox}\,t \\ y - V_{oy}\,t \\ z - V_{oz}\,t \end{pmatrix} \quad \text{[III.13]}$$

dove con $|R|$ si è indicata la matrice (detta «matrice delle rotazioni»)

Matrice delle rotazioni

$$|R| \equiv \begin{pmatrix} (\hat{\imath}' \cdot \hat{\imath}) & (\hat{\imath}' \cdot \hat{\jmath}) & (\hat{\imath}' \cdot \hat{k}) \\ (\hat{\jmath}' \cdot \hat{\imath}) & (\hat{\jmath}' \cdot \hat{\jmath}) & (\hat{\jmath}' \cdot \hat{k}) \\ (\hat{k}' \cdot \hat{\imath}) & (\hat{k}' \cdot \hat{\jmath}) & (\hat{k}' \cdot \hat{k}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos x'x & \cos x'y & \cos x'z \\ \cos y'x & \cos y'y & \cos y'z \\ \cos z'x & \cos z'y & \cos z'z \end{pmatrix} \quad \text{(III.14)}$$

Notiamo che nel caso particolare in cui il sistema mobile e quello fisso abbiano lo stesso orientamento, la matrice $|R|$ si riduce alla matrice

$$|R| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

detta *matrice identità*

Matrice identità

In questo caso le [III.13] divengono:

$$\begin{cases} x' = x - V_{ox}\,t \\ y' = y - V_{oy}\,t \\ z' = z - V_{oz}\,t \end{cases} \qquad \text{[III.15]}$$

Trasformazioni galileiane

Le [III.15] sono dette *trasformazioni di Galileo* (o «galileiane»).

Nel caso che il sistema mobile abbia l'asse z' orientato come l'asse z del sistema fisso, e l'asse x' ruotato di un angolo α rispetto a x (e dunque anche y' ruotato di α rispetto a y), la matrice $|R|$ [III.14] si riduce alla matrice che compare nelle [II.7], come è facile verificare.

Derivando ora membro a membro la [III.11] rispetto al tempo (e tenuto conto che avendo il sistema mobile orientamento fisso, i versori $\hat{\imath}'$, $\hat{\jmath}'$ e $\hat{k}'$ sono versori costanti), si ha:

$$\hat{\imath}'\,\mathrm{v}'_x + \hat{\jmath}'\,\mathrm{v}'_y + \hat{k}'\,\mathrm{v}'_z = \hat{\imath}\,(\mathrm{v}_x - V_{ox}) + \hat{\jmath}\,(\mathrm{v}_y - V_{oy}) + \hat{k}\,(\mathrm{v}_z - V_{oz}) \qquad \text{[III.16]}$$

Con procedimento del tutto identico a quello usato per ricavare la [III.12] e la [III.13] dalla [III.11], dalla [III.16] si ricava

$$\begin{pmatrix} \mathrm{v}'_x \\ \mathrm{v}'_y \\ \mathrm{v}'_z \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} \mathrm{v}_x - V_{ox} \\ \mathrm{v}_y - V_{oy} \\ \mathrm{v}_z - V_{oz} \end{pmatrix} \qquad \text{[III.17]}$$

La matrice $|R|$ che compare nella [III.17] è, evidentemente, la stessa matrice [III.14]. Derivando ora la [III.16] rispetto al tempo, e tenendo conto che essendo $\vec{V}_o$ costante è $\dfrac{d\vec{V}_o}{dt} = 0$, si ha

$$\hat{\imath}'\,a'_x + \hat{\jmath}'\,a'_y + \hat{k}'\,a'_z = \hat{\imath}\,a_x + \hat{\jmath}\,a_y + \hat{k}\,a_z \qquad \text{[III.18]}$$

dove con $\vec{a} \equiv (a_x\,a_y\,a_z)$ si è indicata l'accelerazione del punto P nel sistema fisso e con $\vec{a}'$ l'accelerazione nel sistema mobile. Per conseguenza

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \text{[III.19]}$$

e nel caso particolare che i due sistemi di riferimento siano orientati allo stesso modo (cosicché le coordinate si trasformino secondo le [III.15]):

$$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \qquad \text{cioe } \vec{a}' = \vec{a} \qquad \text{[III.20]}$$

Le [III.20] ci dicono che l'accelerazione del punto P è invariante per trasformazioni di Galileo, mentre dalla [III.19] si ha che essa si trasforma attraverso la semplice matrice di rotazione $|R|$ passando da un sistema inerziale «fisso» a un sistema inerziale «mobile» ruotato (ma con orientamento

costante) rispetto al sistema fisso. Possiamo osservare che la [III.20] ci dice che l'accelerazione del punto materiale P è la stessa, in modulo e direzione, nei due sistemi di riferimento; e proprio per questo le componenti risultano diverse, così come indicato dalla [III.19], se la proiezione viene fatta sugli assi di un sistema ruotato.

Per vedere come il secondo principio della dinamica, equazione [III.5], si trasforma passando dal sistema di riferimento fisso a quello mobile dobbiamo ora vedere come si trasformano le altre due grandezze fisiche che in essa compaiono, cioè la massa m e la forza $\vec{f}$. Se ricordiamo la definizione operativa di massa e di forza, è facile concludere che una bilancia e un dinamometro disposti ad esempio nel sistema mobile (e posti a misurare una certa massa e, rispettivamente, una certa forza) consentono di leggere lo stesso valore per la grandezza misurata sia a un osservatore fermo nel sistema mobile che a un osservatore fermo nel sistema fisso. Ciò significa che la massa, che è una grandezza scalare, è invariante passando da un sistema di riferimento all'altro:

Invarianza classica della massa

$$m' = m \qquad \text{[III.21]}$$

mentre per la forza $\vec{f}$ si ha, analogamente alla [III.19],

$$\begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \qquad \text{[III.22]}$$

che si riduce a

$$\begin{aligned} f'_x &= f_x \\ f'_y &= f_y \\ f'_z &= f_z \end{aligned} \qquad \text{[III.23]}$$

nel caso che i due sistemi di riferimento abbiano lo stesso orientamento.

Partendo dunque dall'equazione $\vec{f} = m\,\vec{a}$ scritta nel sistema fisso, e moltiplicando ambo i membro per $|R|$, si ricava $\vec{f}' = m'\,\vec{a}'$.

L'equazione $\vec{f} = m\,\vec{a}$ è covariante passando da un sistema di riferimento inerziale a un altro sistema di riferimento inerziale. In particolare se i due sistemi hanno lo stesso orientamento la $\vec{f} = m\,\vec{a}$ resta immutata: essa è dunque *invariante per trasformazioni di Galileo.*

Covarianza classica del secondo principio della dinamica e relatività galileiana

Il secondo principio della dinamica soddisfa dunque il principio di relatività.

Va rilevato che tutte le conclusioni tratte in questo paragrafo derivano dalla ipotesi implicita che la distanza fra due punti e l'intervallo temporale che separa due eventi siano gli stessi nei due sistemi di riferimento. Questa ipotesi, tratta dall'esperienza quotidiana, cessa di valere per sistemi di riferimento in moto relativo a una velocità prossima a quella della luce. In questi casi, la cui trattazione richiede il ricorso alla teoria della relatività di Einstein, non valgono né la [III.15], né la [III.19], né la [III.21], né la [III.22]. In effetti la [III.5] soddisfa il principio di relatività solo nel limite $\frac{V_o}{c} \ll 1$.

Nella relatività di Einstein le trasformazioni di Galileo [III.15] sono sostituite dalle trasformazioni di Lorentz, e la [III.5] assume a sua volta una espressione più generale che si riduce alla [III.5] nel limite $\frac{V_o}{c} \ll 1$; nello stesso limite, le trasformazioni di Lorentz si riducono alle trasformazioni di Galileo. Queste affermazioni vanno considerate come semplici anticipazioni di ragionamenti che saranno affrontati in termini più approfonditi nel capitolo che dedicheremo alla Teoria della Relatività Ristretta di Einstein (cap. XI).

III.10 Sistemi non inerziali e forze dette apparenti o fittizie

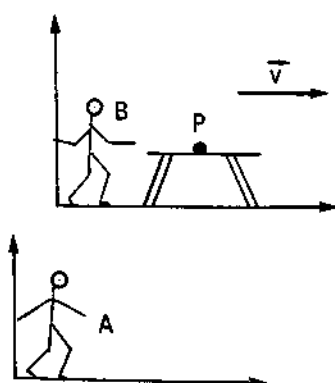
In un sistema di riferimento inerziale, dunque, il primo membro dell'equazione [III.5] (cioè la forza subita dal punto materiale considerato) può essere ricondotto ad altri sistemi fisici presenti nell'ambiente in cui il moto avviene, ed espresso in termini delle caratteristiche e posizioni – relativamente a quella del punto materiale – di tali sistemi.

Ciò non succede invece nei sistemi di riferimento non inerziali, come del resto possiamo constatare non di rado anche nella nostra esperienza quotidiana: se ad esempio stiamo viaggiando su un treno, quando questo frena o accelera bruscamente o curva – trasformandosi così in un sistema di riferimento non inerziale – noi ci sentiamo *spinti* in avanti o indietro o di lato. Ciò che in sostanza avvertiamo è una forza, ma questa non è esercitata da alcun agente; essa è diretta conseguenza del fatto che il sistema di riferimento non è inerziale. Per meglio comprendere quale sia il significato fisico di queste forze (che sono dette *forze apparenti* o *forze di inerzia*) analizziamo con maggior dettaglio che cosa accade quando, ad esempio, il treno subisce una brusca frenata.

Forze apparenti o forze di inerzia

Consideriamo dunque un sistema di riferimento (il treno) che si muove inizialmente di moto rettilineo uniforme rispetto a terra. Sul treno un osservatore (B) ha disposto una palla da biliardo P su un tavolo orizzontale liscio; poiché il treno si muove con velocità V uniforme, la biglia resta in equilibrio rispetto al tavolo. Il fenomeno è osservato, da terra, da uno sperimentatore (A): questi, evidentemente, vede che la biglia P (un «punto libero») si muove di moto rettilineo uniforme con velocità esattamente uguale a V.

Immaginiamo ora che il treno subisca una brusca frenata, e osserviamo prima il fenomeno dal punto di vista di A. Se il punto materiale P non viene frenato anch'esso (se esso, non essendo vincolato al tavolo, continua ad essere un punto libero) esso continua a muoversi con la stessa velocità V. Secondo A dunque, il treno, essendo stato frenato, si arresta; ma se nessuno frena P esso continuerà a muoversi con la velocità che inizialmente aveva. Fra il treno e il punto P si genera una velocità relativa conseguenza del fatto che il treno decelera e il punto no.

Ciò che invece vede l'osservatore B, è che la biglia subisce all'improvviso (rispetto al treno, con cui l'osservatore è solidale) una accelerazione: il punto P infatti, che inizialmente era fermo, comincia a muoversi. Essendo abituato a imputare una accelerazione a qualche forza, egli giudica che il punto è stato sollecitato da una forza, pur non essendovi alcun sistema fisico, nell'ambiente circostante, responsabile di tale azione. Egli chiama questa forza una forza apparente o di inerzia. Che si tratti di una forza è confermato dal fatto che qualora ne voglia annullare l'effetto (mantenendo

il punto P in equilibrio rispetto al proprio laboratorio non inerziale) egli deve applicare a P una forza. Questa forza, che dal punto di vista di A è quella che serve per frenare P contemporaneamente al treno, dal punto di vista di B è una forza che serve ad equilibrare l'effetto della forza di inerzia, consentendo al punto P di restare in equilibrio (nel sistema non inerziale) a dispetto della azione della forza di inerzia stessa.

Le semplici osservazioni qualitative che abbiamo ora fatto possono essere poste facilmente in termini formali. Consideriamo un sistema di riferimento inerziale (sistema «fisso») e un secondo sistema di riferimento, non inerziale (sistema «mobile»). Supponiamo per ora che il sistema mobile si muova di moto traslatorio, cioè con orientamento fisso rispetto al sistema fisso anche se, evidentemente, non con velocità uniforme.

Sistema non inerziale dotato di moto traslatorio

Se il punto P si muove per azione di una forza $\vec{f}$, nel sistema fisso possiamo scrivere l'equazione

$$\vec{f} = m\,\vec{a} \qquad \text{[III.24]}$$

risolvendo la quale possiamo trovare – date le condizioni iniziali – la legge oraria del moto.

Nel sistema di riferimento mobile le coordinate x', y', z' del punto P sono legate alle coordinate x, y, z di P nel sistema fisso dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - X \\ y' &= y - Y \\ z' &= z - Z \end{aligned}\right\} \qquad \text{[III.25]}$$

dove X, Y, Z sono le coordinate dell'origine del sistema mobile. Le [III.25] sono analoghe alle trasformazioni di Galileo [III.15]: solo che ora, essendo il moto del sistema mobile *non* uniforme, le coordinate della sua origine non possono più essere espresse semplicemente come $V_{ox}\,t$, $V_{oy}\,t$, $V_{oz}\,t$.

Le [III.25], derivate una prima volta, ci consentono di trovare la relazione fra le velocità $\vec{v}'$ e $\vec{v}$ del punto P nei due sistemi di riferimento; e, derivate una seconda volta, ci consentono di trovare la relazione fra le accelerazioni $\vec{a}'$ ed $\vec{a}$. Si ha:

$$\begin{cases} x' = x - X \\ y' = y - Y \\ z' = z - Z \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_x = v_x - V_x \\ v'_y = v_y - V_y \\ v'_z = v_z - V_z \end{cases} \qquad \begin{cases} a'_x = a_x - A_x \\ a'_y = a_y - A_y \\ a'_z = a_z - A_z \end{cases}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} \qquad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \qquad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}$$

dove $\vec{R}$, $\vec{V}$ ed $\vec{A}$ sono rispettivamente il vettore posizione, la velocità e l'accelerazione dell'origine O' del sistema mobile rispetto al sistema fisso. Va notato che, essendo la velocità $\vec{V}$ del sistema mobile *non* costante, non vale più la [II.17]: l'accelerazione $\vec{a}'$ di P nel sistema mobile *non* è uguale alla accelerazione $\vec{a}$ nel sistema fisso. Esse differiscono fra di loro per l'accelerazione $\vec{A}$ del sistema mobile: $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}$; ovvero:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} \qquad \text{[III.26]}$$

Sostituendo la [III.26] nella [III.24] si ha:

$$\vec{f} = m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{A}) = m\vec{a}' + m\vec{A};$$

ovvero

$$\vec{f} - m\vec{A} = m\vec{a}' \qquad \text{[III.27]}$$

Forza di inerzia

Accelerazione di trascinamento

La [III.27] rende evidente che l'osservatore mobile, eseguendo nel suo sistema di riferimento non inerziale una misura dinamica di forza (cioè misurando la quantità $m\vec{a}'$), trova un risultato che non è semplicemente uguale alla forza $\vec{f}$ «reale» (cioè generata dai sistemi circostanti); egli vede infatti apparire accanto a $\vec{f}$ un secondo termine $(-m\vec{A})$, che egli chiama forza di inerzia. Questo termine ha valore pari alla massa m del punto materiale considerato moltiplicata per l'accelerazione, cambiata di segno, del sistema di riferimento. Tale accelerazione $\vec{A}$ è detta *accelerazione di trascinamento* ed in questo caso (di moto traslatorio) ha lo stesso valore in tutti i punti. Va notato che qualora l'osservatore mobile esegua una misura statica, anziché dinamica, delle forze, egli rileva comunque la presenza della forza di inerzia. Dalla [III.27] vediamo infatti che affinché il punto materiale resti in equilibrio nel sistema mobile ($\vec{a}' = 0$), deve essere $\vec{f} - m\vec{A} = 0$; è necessario applicare cioè una forza reale $\vec{f}$ che, sommata alla forza di inerzia $-m\vec{A}$, dia risultante nullo.

Sistema non inerziale dotato di moto qualunque

Fino a qui, abbiamo trattato il caso particolare che il sistema di riferimento non inerziale si muovesse di moto traslatorio rispetto al sistema fisso (inerziale). Vediamo ora come la [III.27] risulti generalizzata nel caso che il sistema di riferimento non inerziale si muova di moto qualunque.

Partiamo dalla relazione

$$\hat{\imath}'x' + \hat{\jmath}'y' + \hat{k}'z' = \hat{\imath}(x - X) + \hat{\jmath}(y - Y) + \hat{k}(z - Z) \qquad \text{[III.28]}$$

La [III.28] è analoga alla [III.11]. In essa però non solo le coordinate X, Y, Z dell'origine (che si muove di moto non uniforme) non possono essere scritte come $V_x t$, $V_y t$, $V_z t$; in più i versori $\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'$ *non* sono costanti, e dunque la loro derivata temporale non è nulla, ma coerentemente con la [II.37] vale rispettivamente

$$\frac{d\hat{\imath}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\imath}'; \qquad \frac{d\hat{\jmath}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\jmath}'; \qquad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}' \qquad \text{[III.29]}$$

dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare con cui il sistema mobile ruota rispetto a quello fisso.

Tenuto conto di ciò, deriviamo le [III.28] rispetto al tempo; abbiamo:

$$\begin{aligned} &\hat{\imath}'v'_x + \hat{\jmath}'v'_y + \hat{k}'v'_z + \vec{\omega} \times (\hat{\imath}'x' + \hat{\jmath}'y' + \hat{k}'z') = \\ &= \hat{\imath}(v_x - V_x) + \hat{\jmath}(v_y - V_y) + \hat{k}(v_z - V_z) \end{aligned} \qquad \text{[III.30]}$$

In termini vettoriali, la [III.30] può essere scritta anche come:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_t = \vec{v} - (\vec{V} + \vec{\omega} \times O'P) \qquad \text{[III.31]}$$

dove:

$\vec{v}' = \hat{\imath}'\,v'_x + \hat{\jmath}'\,v'_y + \hat{k}'\,v'_z$ è la velocità del punto P rispetto al sistema mobile (velocità «relativa»)

Velocità relativa

$\vec{v} = \hat{\imath}\,v_x + \hat{\jmath}\,v_y + \hat{k}\,v_z$ è la velocità del punto P rispetto al sistema fisso (velocità «assoluta»)

Velocità assoluta

$\vec{v}_t = \vec{V} + \vec{\omega} \times O'P = \hat{\imath}\,V_x + \hat{\jmath}\,V_y + \hat{k}\,V_z + \vec{\omega} \times (\hat{\imath}'\,x' + \hat{\jmath}'\,y' + \hat{k}'\,z')$ è la velocità con cui si muove rispetto al sistema fisso il punto solidale col sistema mobile che nell'istante considerato è occupato da P (velocità di «trascinamento»).

Velocità di trascinamento

Questa interpretazione della velocità di trascinamento è evidente per ragioni geometriche (alla velocità $\vec{V}$ dell'origine O' è sommata la velocità $\vec{\omega} \times O'P$ con cui si muove l'estremo libero del vettore ruotante $O'P$, vedi la [II.37]), ed è confortata dalla considerazione che, rendendo il punto P solidale col sistema mobile ($\vec{v}' = 0$), la [III.3] ci dice che la velocità $\vec{v}$ di P nel sistema fisso è pari per l'appunto a $\vec{V} + \vec{\omega} \times O'P$.

Deriviamo ora, nuovamente, la [III.30] rispetto al tempo. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\hat{\imath}'\,a'_x + \hat{\jmath}'\,a'_y + \hat{k}'\,a'_z + \vec{\omega} \times (\hat{\imath}'\,v'_x + \hat{\jmath}'\,v'_y + \hat{k}'\,v'_z) + \vec{\alpha} \times (\hat{\imath}'\,x' + \hat{\jmath}'\,y' + \hat{k}'\,z') +\\ + \vec{\omega} \times (\hat{\imath}'\,v'_x + \hat{\jmath}'\,v'_y + \hat{k}'\,v'_z) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\hat{\imath}'\,x' + \hat{\jmath}'\,y' + \hat{k}'\,z')] = \quad \text{[III.32]}\\ = \hat{\imath}\,(a_x - A_x) + \hat{\jmath}\,(a_y - A_y) + \hat{k}\,(a_z - A_z)\end{aligned}$$

dove con $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ abbiamo indicato l'accelerazione angolare del sistema di riferimento mobile.

In termini vettoriali, la [III.32] può essere scritta come:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_t - \vec{a}_c = \vec{a} - [\vec{A} + \vec{\alpha} \times O'P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times O'P)] - 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad \text{[III.33]}$$

dove:

$\vec{a}' = \hat{\imath}'\,a'_x + \hat{\jmath}'\,a'_y + \hat{k}'\,a'_z$ è l'accelerazione del punto P rispetto al ristema di riferimento mobile (accelerazione «relativa»)

Accelerazione relativa

$\vec{a} = \hat{\imath}\,a_x + \hat{\jmath}\,a_y + \hat{k}\,a_z$ è l'accelerazione del punto P rispetto al sistema di riferimento inerziale (accelerazione «assoluta»)

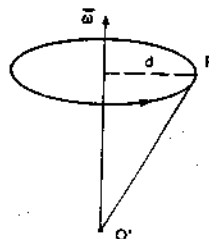
Accelerazione assoluta

$\vec{a}_t = \vec{A} + \vec{\alpha} \times O'P + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times O'P$ è l'accelerazione con cui si muove rispetto al sistema fisso il punto solidale col sistema mobile che nell'istante considerato è occupato da P (accelerazione di «trascinamento»)

Accelerazione di trascinamento

$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$ (prodotto vettoriale fra il doppio della velocità angolare del sistema mobile e la velocità relativa del punto P) è detta «accelerazione di Coriolis». Va notato che questo termine è nullo quando $\vec{v}' = 0$, cioè quando il punto P è in equilibrio nel sistema mobile.

Accelerazione di Coriolis o accelerazione complementare

A proposito della accelerazione di trascinamento, notiamo che essa è composta di tre termini: l'accelerazione $\vec{A}$ dell'origine O' del sistema mobile; l'accelerazione tangenziale di modulo $|\vec{\alpha} \times O'P| = \alpha\,d$ del moto circolare compiuto dall'estremo libero del vettore $O'P$; l'accelerazione radiale di modulo $|\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times O'P| = \omega^2 d$ del moto circolare compiuto dall'estremo libero del vettore $O'P$.

Inserendo la [III.33] nella [III.24] abbiamo

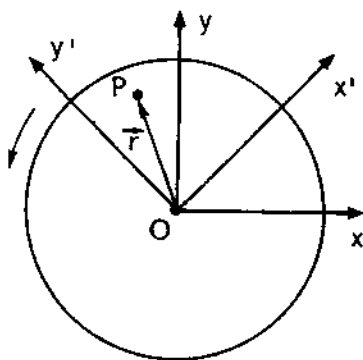
$$\vec{f} - m\,\vec{a}_t - m\,\vec{a}_c = m\,\vec{a}' \qquad \text{[III.34]}$$

Forza apparente di trascinamento

Forza apparente di Coriolis

Rispetto al caso del moto traslatorio, non solo l'accelerazione di trascinamento $\vec{a}_t$ (diversa dall'accelerazione $\vec{A}$ dell'origine O' del sistema mobile) è diversa da punto a punto del sistema mobile; ma accanto alla forza apparente di trascinamento $-m\,\vec{a}_t$ appare anche la forza di Coriolis $-m\,\vec{a}_c = -2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$.

Esempio

E.III.3. *Una piattaforma ruota con una frequenza costante di 2 giri al secondo. A distanza di 3 m dal centro di rotazione è disposto un oggetto di massa 0,5 kg. Determinare la forza $\vec{f}$ che deve essere applicata all'oggetto affinché esso si mantenga in equilibrio rispetto alla piattaforma.*

Scegliamo un sistema di riferimento (non inerziale) solidale con la piattaforma e con origine nel centro di rotazione.

Poiché cerchiamo la condizione di equilibrio relativa al sistema mobile ($\vec{a}' = 0$; $\vec{v}' = 0$), nella [III.34] risulta nullo sia il secondo membro che il termine di Coriolis; essa diviene:

$$\vec{f} - m\,\vec{a}_t = 0$$

La forza attiva $\vec{f}$ deve dunque equilibrare la forza apparente di trascinamento $-m\,\vec{a}_t$. Nel caso in esame, nella accelerazione di trascinamento $\vec{a}_t$ è nullo sia il termine $\vec{A}$ (l'origine O' è ferma) che il termine $\vec{\alpha} \times O'P$ (la rotazione avviene con velocità angolare costante); per cui

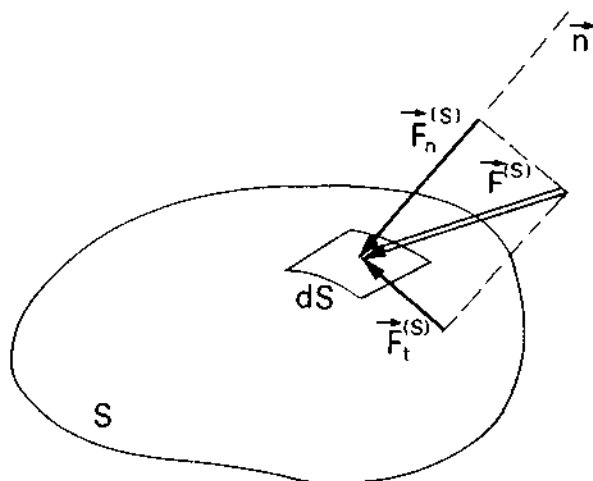
$$\vec{a}_t = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times O'P$$

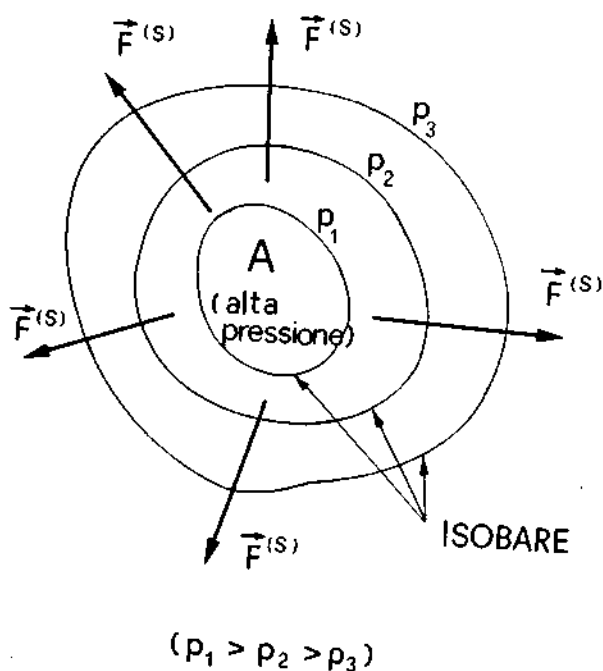
Questo termine rappresenta l'accelerazione centripeta $\vec{a}_t = -\omega^2\,\vec{r}'$ del moto circolare uniforme compiuto dall'oggetto considerato ($\vec{r}'$ è il vettore posizione $O'P$ dell'oggetto nel sistema mobile). La forza apparente $-m\,\vec{a}_t = m\,\omega^2\,\vec{r}'$ è dunque una forza *centrifuga* (diretta cioè concordemente col vettore posizione $\vec{r}'$).

La forza $\vec{f}$ deve dunque essere centripeta, di modulo $f = m\,\omega^2\,r'$. Essendo $m = 0{,}5$ kg; $r' = 3$ m; $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T} = \dfrac{2\,\pi}{0{,}5\text{ s}} = 12{,}56\text{ s}^{-1}$, si ha $f = 236{,}6$ *N*.

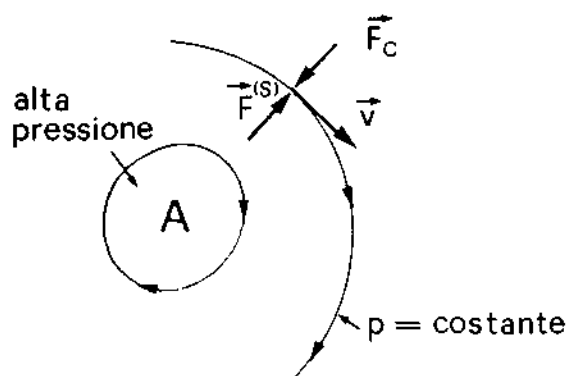
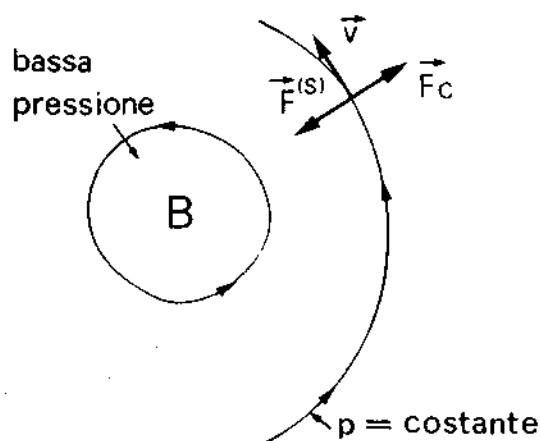
I VENTI NELL'ATMOSFERA

Vogliamo accennare all'effetto delle forze apparenti sul movimento delle masse d'aria (venti) così come lo si osserva dalla Terra che, per la sua rotazione, costituisce un sistema di riferimento non inerziale. Il problema della dinamica meteorologica è ovviamente molto complesso; qui ci limitiamo a considerare delle situazioni abbastanza semplici, che servono ad illustrare, in particolare, l'effetto delle forze di Coriolis sulle masse d'aria in movimento.

Per schematizzare il fenomeno del movimento di masse d'aria consideriamo una porzione di aria come se fosse identificabile durante il suo moto, perché contenuta in una specie di recipiente costituito da una sottilissima pellicola di massa trascurabile (una specie di grande bolla di sapone gonfia d'aria).

Le forze agenti su questa massa d'aria sono la forza peso, le forze apparenti (di trascinamento e di Coriolis) e le cosiddette forze di superficie $\vec{F}^{(S)}$, esercitate dall'aria esterna sul contorno *S* della massa d'aria considerata, sia normalmente (concetto di pressione), sia tangenzialmente (attrito). Questi concetti sono sviluppati nel paragrafo IX.2.

$(p_1 > p_2 > p_3)$

Consideriamo, per semplicità, *venti orizzontali* procedenti a velocità pressoché costante, cioè, come si dice, *venti equilibrati*: in questi casi la forza peso è da pensarsi come continuamente equilibrata dalla componente verticale delle forze di superficie (del tipo della così detta forza di Archimede) ed inoltre, per quanto riguarda le componenti orizzontali delle forze, può essere trascurata la forza di attrito. Restano dunque da considerare gli effetti che risultano prevalenti per il movimento orizzontale, e cioè le forze di superficie e le forze di Coriolis.

Per quanto riguarda le forze di superficie in direzione orizzontale, è chiaro che possono avere un risultante diverso da zero solo se esiste una disuniformità di effetto sulle diverse regioni del contorno della massa d'aria considerata. Poiché questi effetti sono dovuti alla maggiore o minore presenza ed efficacia di particelle d'aria esterne al contorno, cioè alla diversa pressione locale su tale contorno, risulta che forze orizzontali si presenteranno quando ci saranno zone a pressione diversa (gradiente di pressione) e saranno dirette da zone di alta pressione a zone di bassa pressione. Se graficamente si riportano i valori di pressione in forma di curve di ugual pressione (isobare), le forze di superficie $\vec{F}^{(S)}$ hanno linee di forza ovunque ortogonali alle isobare, con il verso che procede dall'alta verso la bassa pressione.

Circolazione anticiclonica oraria

Emisfero Nord della Terra (venti equilibrati)

Circolazione ciclonica antioraria

A queste forze, dovute a gradienti di pressione, si sovrappone la forza di Coriolis $\vec{F}_C$ che, per l'ipotesi di venti a velocità orizzontale costante, deve equilibrare le forze di pressione. Poiché $\vec{F}_C$ è perpendicolare alla velocità $\vec{v}$, ne segue che la velocità dei venti deve seguire le linee di isobaricità. Il verso di questa velocità, a causa del fattore $(\vec{\omega} \times \vec{v})$ che compare in $\vec{F}_C$, risulta essere, intorno a zone di alta pressione (anticicloniche), orario nell'emisfero Nord della Terra ed antiorario nell'emisfero Sud; l'opposto accade per i venti in zone di bassa pressione (cicloniche).

Esercizi del capitolo III

Gli esercizi che seguono si riferiscono al moto di punti materiali osservato da sistemi di riferimento diversi, ed in movimento l'uno rispetto all'altro.

Indicate con apice le grandezze fisiche velocità ($\vec{v}'$) ed accelerazione ($\vec{a}'$), *relative* al sistema di riferimento assunto come mobile, e senza apice ($\vec{v}$ ed $\vec{a}$) le stesse grandezze riferite al sistema assunto come fisso (solitamente inerziale), valgono, come già visto, le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \vec{v}' = \vec{v} - v_t \\ \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_t - \vec{a}_c \end{cases}$$

dove $\vec{v}_t$ ed $\vec{a}_t$ indicano rispettivamente la velocità e l'accelerazione, rispetto al sistema fisso, di un punto solidale con il sistema mobile che si trovi ad essere sovrapposto al punto di cui si considera il moto; $\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$ indica l'accelerazione complementare o di Coriolis, essendo $\vec{\omega}$ la velocità angolare istantanea con cui il sistema mobile ruota rispetto a quello fisso.

III.1. Una canoa percorre un tratto rettilineo di fiume lungo $l = 1$ km una volta contro corrente impiegando 20 minuti ed una volta a favore di corrente impiegando 15 minuti. Calcolare la velocità della corrente rispetto alla riva. Si suppongano costanti la velocità della corrente e la velocità con cui la canoa si muove rispetto alla corrente. (Risposta: 0,14 m/s)

III.2. Un'automobile di lunghezza $l = 4$ m si muove di moto rettilineo uniforme alla velocità $v = 100$ km/h e sorpassa un autotreno che si muove nella stessa direzione e con velocità $V = 60$ km/h. Se l'autotreno è lungo $L = 15$ m, quanto dura il sorpasso, cioè quanto tempo occorre perché si passi dalla situazione in cui il fronte dell'auto è allineato con la coda dell'autotreno, alla situazione in cui la coda dell'auto è allineata con il fronte dell'autotreno? (Risposta: 1,7 s)

III.3. Due aerei viaggiano sullo stesso piano con velocità $v_1 = 500$ km/h e $v_2 = 800$ km/h rispettivamente. Le direzioni di moto formano un angolo $\theta = 30°$, mentre gli aerei si allontanano l'uno dall'altro. Calcolare la velocità relativa del secondo aereo rispetto al primo (modulo e direzione) (Risposte: 444 km/h; 64°)

III.4. Un treno si muove di moto rettilineo uniforme con velocità V. All'interno del treno, un punto materiale viene lanciato verso l'alto, rispetto al treno, con velocità v'_o. Determinare il tipo di traiettoria del punto nel riferimento solidale al treno e nel riferimento fisso solidale alle rotaie.

III.5. Durante la fase di frenamento, con accelerazione negativa costante $\vec{A}$, di un vagone che si muove su traiettoria rettilinea orizzontale, un corpo viene lanciato, internamente al vagone, con velocità v'_o verticalmente verso l'alto, rispetto al vagone in moto. A che distanza dal punto di lancio il corpo ricadrà sul pavimento del vagone? (Risposta: $\Delta x' = -2\,Av'^2_o/g^2$)

III.6. In un giorno senza vento la pioggia cade verticalmente rispetto alla terra. Un'automobile procede di moto rettilineo uniforme, su una strada orizzontale, alla velocità di 100 km/h. Se la direzione delle gocce di pioggia rispetto all'auto è $\theta = 40°$ relativamente alla verticale, qual'è la velocità di arrivo al suolo dell'acqua della pioggia (rispetto alla terra)? (Risposta: 33 m/s)

III.7. Una mosca cammina su un disco, lungo un solco dell'incisione, praticamente circolare, di raggio r, con velocità angolare costante ω', rispetto al disco. Il disco, a sua volta, è in rotazione con velocità angolare ω costante, rispetto al tavolo che sostiene il giradischi. Descrivere il moto della mosca così come è osservato da un sistema fisso solidale con il tavolo e ricavare, in modo diretto, il termine di Coriolis dell'accelerazione.

III.8. Lungo un parallelo, ad $\alpha = 50^\circ$ di latitudine Nord, da Est verso Ovest, a piccola quota rispetto al livello del mare, vola un razzo alla velocità $v' = 1000$ m/s. Calcolare l'accelerazione di Coriolis del razzo e la sua componente tangente al meridiano.

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo III

III.1. Descrivere il moto (equazioni delle velocità) assumendo come riferimento fisso la riva e come riferimento mobile la corrente. In ogni caso si tratta di moti rettilinei uniformi.

III.2. Si può scegliere come sistema di riferimento fisso un sistema solidale con l'autotreno ed osservare che, da questo sistema, la velocità dell'automobile è pari alla differenza tra le velocità v e V.

III.3. I dati del problema si riferiscono ad un sistema di riferimento solidale con la terra. Ciò che si vuole calcolare è il vettore velocità relativa ($\vec{v}_2$) del secondo aereo rispetto ad un sistema mobile solidale con il primo aereo.

III.4. In entrambi i riferimenti l'accelerazione è puramente verticale e pari all'accelerazione di gravità. I diversi valori della velocità iniziale (relativa all'istante di lancio) determinano la forma della traiettoria.

III.5. Conviene studiare il fenomeno dal sistema mobile, non inerziale, solidale con il vagone. Il corpo è animato da un'acceleraione che è la differenza vettoriale tra l'accelerazione di gravità (verticale) e l'accelerazione di trascinamento (orizzontale).

III.6. Si tratta semplicemente di applicare la relazione fra le velocità vettoriali osservate da due sistemi l'uno in moto rispetto all'altro.

III.7. Nel sistema fisso, il moto della mosca è un moto circolare con velocità angolare somma delle velocità angolari ω ed ω'. L'accelerazione, in un moto circolare uniforme, è esprimibile in termini di velocità angolare e raggio.

III.8. Rispetto ad un sistema di riferimento inerziale (solidale con le stelle fisse, in buona approssimazione) la terra è un sistema mobile ruotante con velocità angolare costante in modo da compiere un giro al giorno.

Capitolo quarto

Conseguenze del II principio della dinamica

In questo capitolo svilupperemo alcune importanti conseguenze della equazione [III.5] che esprime il secondo principio della dinamica per il punto materiale. I risultati cui perverremo hanno grande interesse per un duplice motivo: da un lato essi consentono in molti casi di facilitare la soluzione dell'equazione [III.5]; dall'altro ci portano ad introdurre alcune grandezze fisiche di grande rilevanza teorica e pratica (impulso, energia, momento angolare, ecc.) e a ricavare le proprietà notevoli di tali grandezze.

Questi risultati possono essere ottenuti in maniera semplice e rapida facendo ricorso ad alcuni strumenti matematici che solitamente gli studenti non posseggono in questa fase del loro curriculum, e che saranno forniti loro solo più tardi nei corsi di matematica.

Dedichiamo dunque ora alcuni paragrafi a definire tali strumenti matematici. Ciò verrà fatto in condizioni di generalità molto minore rispetto a quanto si usa fare nei corsi di Analisi, il che ci consentirà di procedere in maniera semplice e stringata.

Noi riteniamo che queste semplici anticipazioni di matematica (così come quelle che abbiamo presentato nel II capitolo) possano essere utili alla formazione dello studente, non solo per la loro propedeuticità al proseguo del corso di fisica; ma anche perché possono mostrare come spesso l'origine di concetti, che in matematica trovano la loro formulazione più generale e più potente – ed anche più astratta –, abbia sovente tratto motivazione dall'esigenza di dare risposta a problemi di natura pratica.

IV.1. Infinitesimi

Infinitesimi

Nel par. II.8 abbiamo già detto che qualunque funzione $\alpha(x)$ che goda della proprietà che $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ è detta infinitesima (o «un infinitesimo») in x_0.

Il più semplice fra gli infinitesimi in x_0 è la funzione $F(x) = x - x_0$; essa è detta anche *infinitesimo fondamentale* in x_0.

Infinitesimi simultanei

Due funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, entrambe infinitesime nello stesso punto x_0, sono dette *infinitesimi simultanei*. La somma, la differenza e il prodotto di $\alpha(x)$ e $\beta(x)$

sono infinitesimi simultanei con $\alpha(x)$ e $\beta(x)$. Tuttavia il loro rapporto non è detto che sia infinitesimo; cioè non è detto che

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \left(\text{o } \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)$$

abbia limite nullo quando x tende ad x_0. Se accade che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \qquad (\text{e si scrive} \quad \alpha(x) = \text{o } \beta(x))$$

Infinitesimi di ordine superiore

si dice che $\alpha(x)$ è *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a $\beta(x)$. Se invece

$$\lim_{x \to x_0} \left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right| = +\infty \quad \left(\text{cioè } \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0\right)$$

si dice, coerentemente, che $\beta(x)$ è di ordine superiore rispetto ad $\alpha(x)$.

Infinitesimi dello stesso ordine

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$, dove l è un numero reale qualunque diverso da zero, si dice che *i due infinitesimi sono dello stesso ordine*.

Infinitesimi di ordine k qualunque

Se $\alpha(x)$ è dello stesso ordine dell'infinitesimo fondamentale elevato alla potenza k (dove k è un numero qualunque), si dice che $\alpha(x)$ è infinitesimo di ordine k; in altri termini:

$$\text{Se } \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{(x - x_0)^k} = l, \qquad \text{l'ordine di } \alpha(x) \text{ è } k.$$

Esempi

E.IV.1. *La funzione $\alpha(x) = 1 - \cos x$ è infinitesima in $x = 0$; verificare che il suo ordine è 2.*

In virtù di note formule trigonometriche, possiamo scrivere

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Dunque:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 x/2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x/2}{(x/2)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

avendo ricordato che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Poiché il rapporto fra l'infinitesimo considerato $(1 - \cos x)$ e l'infinitesimo fondamentale x elevato alla potenza 2 è risultato un numero finito (1/2), l'infinitesimo è di ordine 2 (o del secondo ordine).

E.IV.2. *La funzione $\alpha(x) = \sqrt{\cot x}$ è infinitesima in $x = \pi/2$; verificare che il suo ordine è 1/2.*

Chiamiamo y l'infinitesimo fondamentale $y = x - \pi/2$. Si ha $\cot x = \operatorname{tg} y$; per cui

$$\alpha(x) = \sqrt{\cot x} = \sqrt{\operatorname{tg} y} = \sqrt{\frac{\sin y}{\cos y}}\,.$$

Dunque:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{(x-\pi/2)^{1/2}} = \lim_{y\to 0} \sqrt{\frac{\sin y}{\cos y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \lim_{y\to 0} \sqrt{\frac{\sin y}{y}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos y}} = 1\,,$$

il che dimostra l'asserto.

Si dimostra facilmente una fondamentale proprietà degli infinitesimi. Consideriamo il rapporto fra due infinitesimi, $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, fra di loro simultanei; e supponiamo che $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ possano essere espressi ciascuno come somma di infinitesimi simultanei: $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$; $\beta(x) = \beta_1(x) + \beta_2(x)$. Se $\alpha_2(x)$ è di ordine superiore rispetto ad $\alpha_1(x)$ e $\beta_2(x)$ è di ordine superiore rispetto a $\beta_1(x)$, allora si ha:

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \qquad \text{[IV.1]}$$

In altri termini, il risultato del limite resta invariato se scrivendo $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ si mantengono solo gli addendi di ordine più basso, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore.

La [IV.1] si dimostra immediatamente; si ha infatti:

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x)}{\beta_1(x) + \beta_2(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x)\left(1 + \dfrac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\right)}{\beta_1(x)\left(1 + \dfrac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)}\right)} = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\,.$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo tenuto conto del fatto che

$$\lim \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 0 \quad \text{e} \quad \lim \frac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)} = 0$$

per l'ipotesi che $\alpha_2(x)$ e $\beta_2(x)$ siano di ordine superiore rispettivamente nei confronti di $\alpha_1(x)$ e $\beta_1(x)$. Questa proprietà viene spesso enunciata sinteticamente dicendo che *gli infinitesimi di ordine superiore possono essere trascurati*

Gli infinitesimi di ordine superiore possono essere trascurati

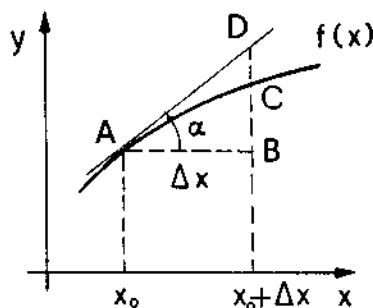
IV.2. Differenziale

Differenziale

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita su un certo intervallo $[a, b]$; e supponiamo che la $f(x)$ ammetta derivata $f'(x)$ per ogni valore di x_o compreso nell'intervallo. Si definisce *differenziale* della funzione f nel punto x_o relativo all'incremento Δx e lo indica con il simbolo df, la quantità:

$$\boxed{df = f'(x_o) \cdot \Delta x} \qquad \text{[IV.2]}$$

Incremento

dove con Δx si intende un *incremento* della variabile x. Il differenziale df ha un valore che dipende sia dal punto x_o in cui si calcola la derivata, che dall'incremento Δx che si applica alla variabile x: df è dunque funzione delle due variabili x_o e Δx.

Significato geometrico del differenziale

Il significato geometrico del differenziale df risulta chiaro quando si ricordi il significato geometrico della derivata, la quale rappresenta la tangente trigonometica dell'angolo α che la tangente geometrica alla curva $y = f(x)$ nel punto x_0 forma con l'asse delle x (sempre che si usino le stesse unità di misura sull'asse x e sull'asse y).

Dalla figura, risulta immediatamente che quando a partire dal punto x_0 si dà un incremento Δx alla variabile indipendente, la funzione subisce un incremento Δf dato dal segmento BC; mentre il differenziale df è rappresentato dal segmento BD, cioè dall'incremento che in corrispondenza di Δx la variabile y subisce lungo la tangente condotta in x alla curva $y = f(x)$.

Nel caso particolare che la funzione f sia pari alla variabile indipendente ($f = x$), cosicché la sua derivata valga 1, la [IV.2] si scrive

$$dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

Per la variante indipendente $dx = \Delta x$

Per la variabile indipendente x, differenziale dx e incremento Δx sono fra di loro coincidenti. In virtù di ciò la [IV.2] può anche essere scritta come

$$df = f'(x_0)\, dx \qquad \text{[IV.3]}$$

che è l'espressione generalmente usata per il differenziale.

L'utilità del differenziale [IV.3] deriva da due sue proprietà fondamentali:

a) *L'incremento della funzione Δf e il suo differenziale df differiscono per infinitesimi di ordine superiore rispetto a Δx per $\Delta x \to 0$, cioè $\Delta f = df + o(\Delta x)$.*

Δx e df differiscono per infinitesimi di ordine superiore

Sia Δf che df (entrambi ovviamente funzione di Δx oltreché di x) sono infinitesimi rispetto a Δx nel punto $\Delta x = 0$. La proprietà enunciata equivale dunque ad affermare che $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0$. La dimostrazione è immediata:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} - \frac{df}{\Delta x} \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Abbiamo usato il fatto $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$ per la definizione di derivata; e il fatto che $\dfrac{df}{\Delta x} = f'(x_0)$ per la definizione [IV.2] di differenziale.

In virtù di questa proprietà, e di quanto abbiamo visto nel precedente paragrafo e in particolare della [IV.1], si può sostituire se ci è comodo il differenziale df all'incremento Δf (o viceversa) in qualunque espressione di cui si farà poi il limite per $\Delta x \to 0$, senza che il risultato venga modificato da questa sostituzione.

Invarianza del differenziale per cambiamento di variabile

b) *Il differenziale df è invariante per cambiamento della variabile indipendente.*

In altri termini se una funzione $f(x)$ ha per differenziale df la quantità:

$$df = f'(x)\, dx$$

(dove $f'(x)$ è ovviamente una funzione nota della x); e se al posto della x si pone al secondo membro della [IV.3] una funzione $x = x(t)$ della variabile t, si ottiene automaticamente il differenziale della funzione $f(x(t))$ della variabile t. Anche la dimostrazione di questa proprietà è assai semplice. Sostituire alla x la $x(t)$ al secondo membro della [IV.3] significa infatti operare le sostituzioni:

$$f'(x) \Rightarrow f'(x(t))$$
$$dx \Rightarrow x'(t)\, dt \quad \text{(secondo la definizione di differenziale)}$$

per cui la [IV.3] diviene

$$df = f'(x(t)) \cdot x'(t)\, dt \qquad \text{[IV.4]}$$

Ma per il teorema di derivazione della «funzione di funzione» (vedi par. II.9), $f'(x(t)) \cdot x'(t)$ rappresenta la derivata rispetto a t della funzione $f(x(t))$; per cui coerentemente con la definizione [IV.3] la [IV.4] non è altro che il differenziale della $f(x(t))$.

Esempio

E.IV.3. Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, la cui derivata vale

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Si ha dunque

$$df = f'(x)\, dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \qquad \text{[IV.5]}$$

Operiamo la sostituzione $x = x(t) = (2t^2 + 1)$. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} f(x(t)) &= \sqrt{2t^2+1} && \text{a)} \\ f'(x(t)) &= \frac{1}{2\sqrt{2t^2+1}} && \text{b)} \\ x'(t) &= 4t && \text{c)} \\ dx &= x'(t)\, dt = 4t\, dt && \text{d)} \end{aligned} \qquad \text{[IV.6]}$$

Sostituendo la [IV.6b] e la [IV.6d] nella [IV.5] si ottiene il differenziale df della funzione $f(x(t))$:

$$df = \frac{2t\, dt}{\sqrt{2t^2+1}} \qquad \text{[IV.7]}$$

Si verifica infatti facilmente che $\frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}$ è la derivata della funzione di t [IV.6a].

Osserviamo che il differenziale può essere maneggiato come qualunque altra entità algebrica. Ad esempio, dividendo la [IV.3] per dx si ha

$$\frac{df}{dx} = f'(x) \qquad \text{[IV.8]}$$

La derivata rispetto a x della funzione f(x) può essere espressa come rapporto fra il differenziale della funzione f e il differenziale della variabile x.

Questo modo di scrivere la derivata ha il vantaggio di fornire il risultato corretto qualunque sia la variabile scelta come variabile indipendente. Se ad esempio la x viene espressa in funzione della variabile t, il rapporto fra il differenziale df (eq. [IV.4]) e il differenziale dx ($dx = x'(t)\, dt$) fornisce – come si deduce immediatamente dalla [IV.4] stessa – la derivata $f'(x)$ rispetto a x della funzione $f(x)$ (seppure espressa, ovviamente, in funzione della variabile t)

Esempio

E.IV.4. Dividendo la [IV.7] per la [IV.6a] otteniamo:

$$\frac{df}{dx} = \frac{2\,t\,dt}{\sqrt{2\,t^2+1}}\;\frac{1}{4\,t\,dt} = \frac{1}{2\sqrt{2\,t^2+1}}$$

Come vediamo, il risultato non è altro che la $f'(x(t))$, cioè la [IV.6b].

Il fatto che l'incremento della funzione Δf differisce dal differenziale df per infinitesimi di ordine superiore, consente di esprimere l'incremento Δf in termini approssimati mediante il differenziale df quando l'incremento Δx della variabile sia sufficientemente piccolo:

$$\Delta f \simeq df = f'(x)\,\Delta x \qquad \text{(per } \Delta x \text{ piccolo)}$$

dove con il simbolo $\simeq$ indichiamo uguaglianza valida approssimativamente. Questa relazione può essere scritta anche in un modo più immediatamente utile a fini pratici.

Se x_0 è un valore fissato della variabile indipendente, e x un valore generico non molto diverso da x_0, si ha $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ e $\Delta x = x - x_0$; per cui:

$$f(x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

onde Δf è linearizzato da $f'(x_0)\,(x - x_0)$

ovvero
$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \qquad \text{[IV.9]}$$

Una applicazione notevole di questa formula, che ci tornerà utile spesso, si ha nel caso che la funzione $f(x)$ sia del tipo $f(x) = (1 + x)^n$, dove n è un numero reale qualunque. Scegliendo $x_0 = 0$, si ha allora:

$$f(0) = 1 \quad f'(x) = n\,(1+x)^{n-1}\,; \quad f'(0) = n\,; \quad x - x_0 = x$$

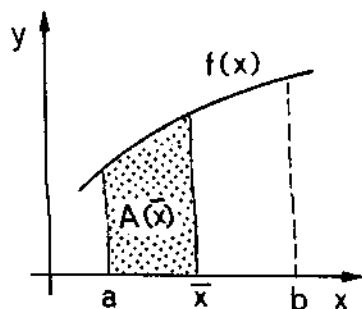
per cui la [IV.9] fornisce la linearizzazione

$$(1 + x)^n \simeq 1 + n\,x \qquad \text{(significativa per } x \ll 1) \qquad \text{[IV.9.a]}$$

IV.3. Integrale

Integrale

Consideriamo una funzione $f(x)$ della variabile x, definita e continua nell'intervallo $[a, b]$: sia cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ per qualunque x_0 compreso fra a e b.

Per semplicità supponiamo che la $f(x)$ sia monotona (ad esempio crescente): ma i risultati cui perverremo valgono a prescindere da questa ipotesi.

Rèttangoloide iscritto

Considerato un qualunque valore $\bar{x}$ della x compreso fra a e b, ci poniamo il problema di calcolare l'area A della superficie S (tratteggiata in figura) compresa fra l'asse delle x, la curva $f(x)$, e le verticali condotte per a e $\bar{x}$. Una volta fissato l'estremo a, tale area sarà evidentemente funzione dell'estremo $\bar{x}$: $A = A(\bar{x})$. La geometria elementare ci insegna a calcolare l'area di figure piane i cui lati siano dei segmenti (rettilinei), ma non ci fornisce alcun modo per calcolare l'area di una figura mistilinea come quella che a noi interessa. Tuttavia possiamo effettuare facilmente un calcolo approssimato di $A(\bar{x})$. A tale scopo dividiamo l'intervallo $[a, \bar{x}]$ in un certo numero (siano n) di intervallini fra di loro uguali; e dopo aver condotto, per gli estremi degli intervallini, le verticali fino ad incontrare la curva $f(x)$, costruiamo la figura formata da n rettangolini iscritti nella superficie S: chiamiamo tale figura *rettangoloide iscritto*, e indichiamo con $r(n)$ la sua area. Poiché la superficie S copre completamente il rettangoloide iscritto, si ha $r(n) < A(\bar{x})$. D'altra

parte, l'area $r(n)$ può essere facilmente calcolata come somma delle aree di rettangoli:

$$r(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\bar{x} - a)}{n} \cdot f(x_i)$$

dove $f(x_i)$ rappresenta il valore della funzione calcolato negli estremi degli intervallini, con $x_0 \equiv a$ e $x_n \equiv \bar{x}$). Infatti $\frac{\bar{x} - a}{n}$ rappresenta la base dei rettangolini (la stessa per ognuno di essi), e $f(x_i)$ la rispettiva altezza. Analogamente, possiamo costruire, come mostrato in figura, il rettangoloide circoscritto. Chiamando $R(n)$ la sua area, si ha $R(n) > A(\bar{x})$; e inoltre

Rettangoloide circoscritto

$$R(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\bar{x} - a)}{n} \cdot f(x_i)$$

In definitiva

$$r(n) < A(\bar{x}) < R(n)$$

L'area $A(\bar{x})$ è compresa fra l'area del rettangoloide iscritto e quella del rettangoloide circoscritto.

Ora è facile dimostrare che la differenza $R(n) - r(n)$ tende a zero quando n tende all'infinito; cioè quando la base dei rettangolini tende a zero. Infatti la differenza $R(n) - r(n)$ è data dalla somma delle aree dei rettangolini tratteggiati in figura. Questi rettangolini hanno tutti la stessa base $\left(\frac{\bar{x} - a}{n}\right)$, mentre è facile vedere che la somma delle loro altezze è pari a $f(\bar{x}) - f(a)$:

$$R(n) - r(n) = (f(\bar{x}) - f(a)) \left(\frac{\bar{x} - a}{n}\right).$$

Fissati $\bar{x}$ ed a, dunque, al tendere all'infinito di n questa quantità tende a zero. Poiché la differenza $R(n) - r(n)$ tende a zero, sia $R(n)$ che $r(n)$ tendono allo stesso limite; e per uno dei teoremi sui limiti, tale limite non può che coincidere con $A(\bar{x})$ che è sempre compreso fra $R(n)$ ed $r(n)$:

$$A(\bar{x}) = \lim_{n \to \infty} r(n) = \lim_{n \to \infty} R(n)$$

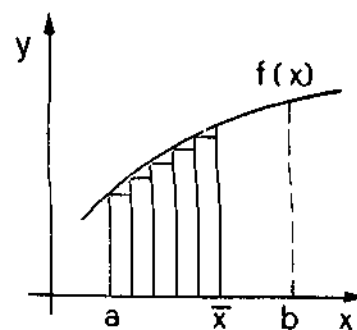
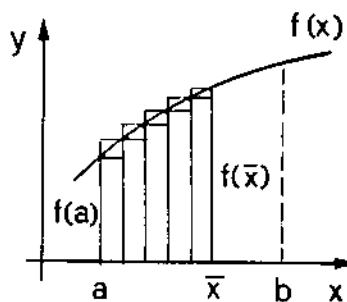
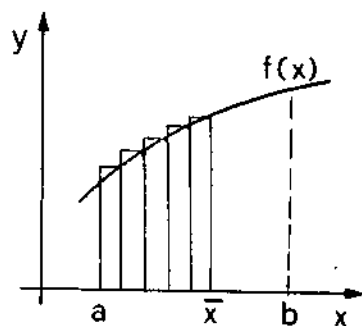
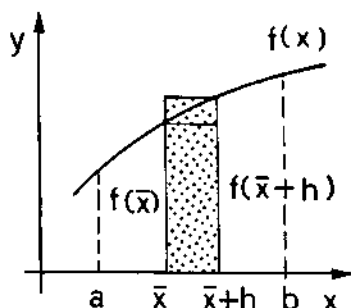
Questo risultato consente di calcolare l'area $A(\bar{x})$ calcolando il limite di $r(n)$ (o di $R(n)$):

$$A(\bar{x}) = \lim_{n \to \infty} \sum \frac{(\bar{x} - a)}{n} f(x_i) = \lim_{n \to \infty} \sum f(x_i) \, \Delta x \qquad \text{[IV.10]}$$

avendo indicato con Δx la base $\frac{\bar{x} - a}{n}$ dei rettangoli. Il limite $\lim_{n \to \infty} \sum f(x_i)\Delta x$ viene solitamente indicato col simbolo più compatto

$$\int_a^{\bar{x}} f(x) \, dx \qquad \text{(il simbolo } \textstyle\int \text{ sta per «summa»);}$$

esso viene detto *integrale definito* della funzione $f(x)$ calcolato fra a e $\bar{x}$

$$A(\bar{x}) = \int_a^{\bar{x}} f(x) \, dx \qquad \text{[IV.11]}$$

Integrazione per esaustione

La [IV.10] consente di calcolare l'integrale [IV.11] eseguendo il limite della sommatoria in essa contenuto; questo metodo per calcolare l'integrale (detto metodo dell'*esaustione*; è il metodo che usò Archimede per calcolare l'area del cerchio o il volume della sfera) è tuttavia assai laborioso. Negli ultimi anni esso è ritornato di moda per conseguenza della grande capacità di calcolo numerico messo a nostra disposizione dagli elaboratori elettronici.

Tuttavia l'*analisi infinitesimale* mette a nostra disposizione un metodo più compatto per il calcolo della [IV.11]. Mostreremo infatti ora che la funzione $A(x)$ gode di due proprietà che la caratterizzano completamente; per cui il suo calcolo viene ricondotta alla ricerca di una funzione $F(x)$ che gode di tali due proprietà, e che per tale motivo non può che coincidere con la $A(x)$.

Le due proprietà di cui gode la $A(x)$ sono le seguenti:

a) $A(a) = 0$, cioè $A(x)$ calcolata per $x = a$ deve essere nulla. La dimostrazione di questa proprietà è ovvia: infatti $A(a)$ rappresenta l'area di una figura piana la cui base è nulla.

b) $A'(x) = f(x)$: la derivata della funzione $A(x)$ è cioè pari alla funzione $f(x)$ il cui grafico delimita superiormente la superficie S. Anche questa proprietà può essere dimostrata con relativa semplicità.

Consideriamo il valore $\bar{x}$ della x; e diamo ad esso un incremento h. La quantità $A(\bar{x}+h) - A(\bar{x})$ è evidentemente data (considerato il significato della funzione $A(x)$) dall'area della superficie tratteggiata in figura. Tale area è maggiore dell'area del rettangolo iscritto (e data da $f(\bar{x}) \cdot h$) e minore dell'area del rettangolo circoscritto (data da $f(\bar{x}+h) \cdot h$)

$$f(\bar{x}) \cdot h < A(\bar{x}+h) - A(\bar{x}) < f(\bar{x}+h) \cdot h \,.$$

Dividendo per h, si ha

$$f(\bar{x}) < \frac{A(\bar{x}+h) - A(\bar{x})}{h} < f(\bar{x}+h)$$

Se ora facciamo il limite per h tendente a zero, $f(\bar{x}+h)$ tende a $f(\bar{x})$ (essendo la $f(x)$ continua); e dunque anche la quantità compresa fra i due estremi della disuguaglianza non può che tendere a $f(\bar{x})$

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(\bar{x}+h) - A(\bar{x})}{h} = A'(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

onde la proprietà b) per $h > 0$; analogamente per $h < 0$. Ciò è quanto volevamo dimostrare.

Proprietà caratteristiche dell'area $A(x)$

Mostriamo ora che le due proprietà a) e b) caratterizzano completamente la $A(x)$; considerata cioè una funzione $F(x)$ che goda di tali proprietà, essa non può che coincidere con la $A(x)$. Sia dunque una funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$.

La differenza $F(x) - A(x)$ è una funzione di x la cui derivata è nulla

$$F'(x) - A'(x) = f(x) - f(x) = 0 \,;$$

dunque $F(x) - A(x)$ è una funzione costante (indipendente dalla x):

$$F(x) - A(x) = k \qquad \text{[IV.12]}$$

Ma se calcoliamo tale funzione per $x = 0$, abbiamo:

$$k = F(a) - A(a) = 0$$

poiché sia $F(x)$ che $A(x)$ godono della proprietà a). Essendo $k = 0$, la [IV.12] diviene $F(x) - A(x) = 0$; cioè $F(x)$ e $A(x)$ sono fra di loro coincidenti.

Siamo ora in grado di specificare il modo di calcolare l'integrale definito

$$A(\bar{x}) = \int_a^{\bar{x}} f(x)\, dx$$

della funzione $f(x)$.

Supponiamo di conoscere una primitiva $\Phi(x)$ della funzione $f(x)$; per definizione di primitiva la $\Phi(x)$ gode della proprietà b) ($\Phi'(x) = f(x)$). La $\Phi(x)$ non coincide però in generale con la $A(x)$, poiché essa non gode in generale della proprietà a) ($\Phi(a) \neq 0$). Tuttavia, se consideriamo la funzione $\Psi(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$, abbiamo una nuova primitiva ($\Psi'(x) = f(x)$) che gode però della proprietà a) ($\Psi(a) = \Phi(a) - \Phi(a) = 0$); e che dunque coincide necessariamente con la $A(x)$. Per conseguenza:

$$\int_a^{\bar{x}} f(x)\, dx = \Psi(\bar{x}) = \Phi(\bar{x}) - \Phi(a) \qquad \text{[IV.13]}$$

Integrale definito

Data una funzione continua $f(x)$ di cui si voglia calcolare l'integrale definito fra due valori a ed $\bar{x}$ della x, si cerca una funzione $\Phi(x)$ che sia primitiva della $f(x)$, e si calcola la differenza dei valori che essa assume in $\bar{x}$ e in a. Va notato che la primitiva $\Phi(x)$ può essere definita (oltreché come una funzione la cui derivata $\Phi'(x)$ valga $f(x)$) come una funzione il cui differenziale valga $f(x)\,dx$: $d\Phi = f(x)\,dx$. Ed anzi questa definizione di primitiva gode (in virtù di quanto abbiamo visto nel precedente paragrafo) della proprietà di essere invariante per cambiamento della variabile indipendente.

Esempio

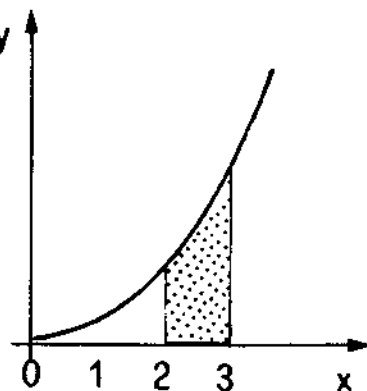
E.IV.5. *Data la funzione $f(x) = 4x^2$, si calcoli l'area della figura che il grafico della funzione sottende fra i valori $x = 2$ e $x = 3$ (vedi figura).*

Una primitiva della $f(x)$ è la funzione $\Phi(x) = \frac{4}{3}x^3$. Si ha dunque:

$$\int_2^3 4x^2\, dx = [4/3\, x^3]_2^3 = \frac{4}{3}3^3 - \frac{4}{3}2^3 = \frac{4}{3}(27-8) \simeq 25{,}3$$

Dove con $[4/3\, x^3]_2^3$ abbiamo indicato, come d'uso, la differenza fra i valori che $4/3\, x^3$ assume in $x = 3$ e $x = 2$.

La tabella II.1, in cui abbiamo elencato la derivata di un certo numero di funzioni notevoli, può essere letta anche (entrando nella seconda colonna ed uscendo nella prima) come un elenco di primitive di funzioni notevoli; nell'appendice A discutiamo metodi che possono essere di aiuto nella ricerca della primitiva di funzioni più complesse.

Con l'aiuto degli strumenti matematici sviluppati in questi tre paragrafi, siamo ora in grado di procedere a dedurre alcune conseguenze fisicamente notevoli della equazione $\bar{f} = m\bar{a}$ che esprime il secondo principio della dinamica per il punto materiale.

IV.4. Impulso e quantità di moto

Consideriamo un punto materiale che in un sistema di riferimento inerziale si muova sottoposto alla forza risultante $\bar{f}$; la sua equazione del moto è dunque

$$\bar{f} = m\bar{a}$$

Applicheremo ora a questa equazione alcune operazioni matematiche introdotte nei precedenti paragrafi; nel fare ciò, teniamo presente che, dal punto di vista matematico, una equazione vettoriale altro non è che un modo compatto per scrivere tre equazioni scalari.

L'accelerazione $\vec{a}$ può essere scritta come $\frac{d\vec{v}}{dt}$, dove $\vec{v}$ è la velocità:

$$\vec{f} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

e moltiplicando per dt

$$\vec{f}\,dt = m\,d\vec{v} \qquad [IV.13]$$

Integriamo ora ambo i membri della [IV.13] fra due istanti qualunque, t_1 e t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\,d\vec{v} \qquad [IV.14]$$

L'integrale al secondo membro della [IV.14] può essere calcolato facilmente: la funzione il cui differenziale è $m\,d\vec{v}$ è infatti, evidentemente, $m\vec{v}$ (stiamo supponendo che la massa m del punto sia costante). E dunque, coerentemente con la [IV.13],

$$\int_{t_1}^{t_2} m\,d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

dove $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1$ sono le velocità che il punto materiale ha rispettivamente agli istanti t_2 e t_1; la [IV.14] diviene dunque:

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}\,dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \qquad [IV.15]$$

Impulso della forza

L'integrale al primo membro della [IV.15] viene detto *impulso della forza $\vec{f}$ fra gli istanti t_1 e t_2*; lo indicheremo col simbolo $\vec{I}_{12}$:

$$\vec{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{f}\,dt \qquad [IV.16]$$

per cui scriveremo la [IV.15] come

$$\vec{I}_{12} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \qquad [IV.17]$$

Il calcolo dell'impulso può essere effettuato tramite la [IV.16] quando sia noto esplicitamente l'andamento della forza in funzione del tempo; in altri casi esso può essere ricavato da informazioni indirette. Comunque sia, quando ci sia noto l'impulso che la forza ha esercitato sul punto materiale in un certo intervallo di tempo, la [IV.17] ci consente di ricavare una preziosa informazione cinematica relativa al moto del punto, cioè la variazione che la velocità del punto subisce in quell'intervallo di tempo.

Quantità di moto

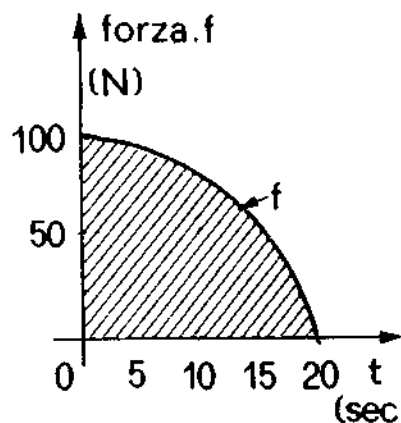
La grandezza cinematica $m\vec{v}$ viene detta *quantità di moto* del punto materiale; noi la indicheremo usualmente col simbolo $\vec{q}$:

$$\vec{q} = m\vec{v} \qquad [IV.18]$$

L'equazione [IV.17] viene detta *teorema dell'impulso* (o *teorema della quantità di moto*). Esso si esprime a parole dicendo che l'*impulso della forza agente su un punto materiale fra gli istanti t_1 e t_2 è pari alla variazione che la quantità di moto del punto subisce nello stesso intervallo di tempo*

Teorema dell'impulso o della quantità di moto

Esempi

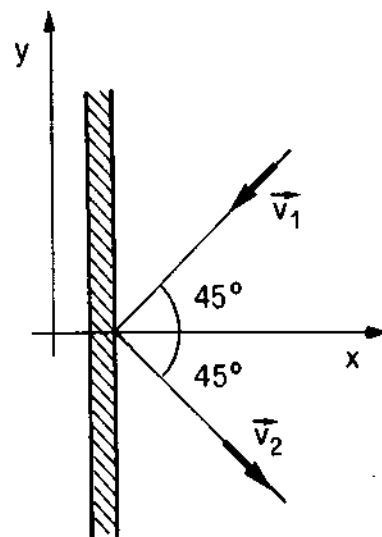
E.IV.6. *Un ciclomotore parte da fermo, e raggiunge una velocità costante (velocità di regime) in 20 secondi. Durante la fase di accelerazione, il motore esercita una forza la cui intensità (espressa in Newton) ha in funzione del tempo l'andamento mostrato in figura; andamento che può essere ben descritto dalla espressione $f = 100 - 0{,}25\, t^2$ (t è il tempo espresso in secondi). Se la massa (inclusa quella del guidatore) è di 110 kg, quale velocità finale raggiunge il ciclomotore?*

Il moto avviene in una sola dimensione, per cui l'equaz. [IV.17] può essere considerata una equazione scalare. Fra gli istanti $t_1 = 0$ e $t_2 = 20$ s, l'impulso della forza (rappresentato dall'area tratteggiata in figura) è dato da:

$$I_{12} = \int_0^{20} f\, dt = \int_0^{20} (100 - 0{,}25\, t^2)\, dt = \left[100\, t - \frac{0{,}25\, t^3}{3}\right]_0^{20} =$$

$$= \left(2000 - \frac{0{,}25 \cdot 8000}{3}\right) \simeq 1330\ N \cdot \text{s}$$

Poiché il ciclomotore parte da fermo ($v_1 = 0$), la [IV.17] diviene in questo caso $I_{12} = m\, v_2$; e dunque

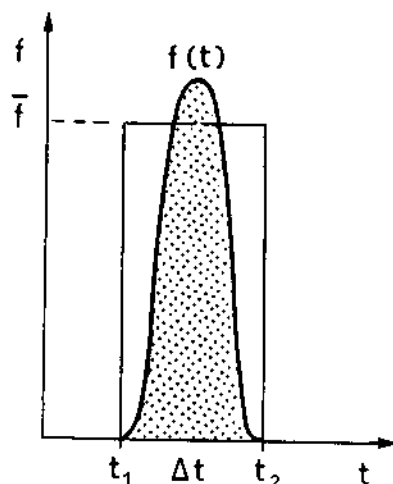
$$v_2 = \frac{I_{12}}{m} = \frac{1330}{110} \frac{N \cdot \text{s}}{\text{kg}} = 12{,}1 \ \text{m/s} \simeq 43{,}6 \ \text{km/h}\,.$$

E.IV.7. *Una biglia di acciaio di massa $m = 10$ g viene lanciata con velocità $v = 20$ m/s contro una lastra di acciaio, ad un angolo di 45° rispetto alla normale alla lastra, e rimbalza su di essa. Dopo l'urto, si riscontra che il modulo della velocità è praticamente immutato; mentre l'angolo è praticamente ancora 45°, ma in direzione speculare (vedi figura). L'urto è allora detto «elastico». Se il tempo di contatto della biglia è $\Delta t = 0{,}01$ s, quale è la forza media che la lastra esercita sulla biglia stessa?*

Useremo ancora l'equazione [IV.17]: partendo dalla conoscenza, derivata dalla osservazione sperimentale, del suo secondo membro (cinematica), ricaveremo informazioni sul suo primo membro (dinamica). Prendendo un sistema di riferimento con l'asse x ortogonale alla lastra e l'asse y parallelo ad essa (vedi figura), e dette come al solito $\vec{v}_1 \equiv (v_{1x}, v_{1y})$ e $\vec{v}_2 \equiv (v_{2x}, v_{2y})$ le velocità rispettivamente prima e dopo l'urto, si ha:

$$\begin{cases} v_{1x} = -\,v \cos 45^\circ \\ v_{1y} = -\,v \sin 45^\circ \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{2x} = v \cos 45^\circ \\ v_{2y} = -\,v \sin 45^\circ \end{cases}$$

La [IV.17], proiettata sugli assi, diviene pertanto:

$$\begin{cases} I_{12x} = m\, v_{2x} - m\, v_{1x} = 2\, m\, v \cos 45^\circ \\ I_{12y} = m\, v_{2y} - m\, v_{1y} = 0 \end{cases} \qquad \text{[IV.19]}$$

La seconda delle [IV.19] ci mostra che nel caso di urto elastico contro una parete l'impulso della forza esercitata dalla parete è ortogonale alla parete stessa, essendo

Valor medio della forza

nulla la sua componente tangenziale. La prima delle [IV.19], il cui secondo membro ci è noto dalle informazioni cinematiche in nostro possesso, ci fornisce la componente normale (coincidente col modulo) dell'impulso, ma non ci consente di calcolare l'intensità della forza. Ricordiamo che riportando l'intensità della forza $f(t)$ in funzione del tempo, l'impulso è rappresentato dall'area sottesa dal grafico: t_1 e t_2 sono gli istanti in cui inizia e termina il contatto della biglia con la parete (vedi figura). Se disegnamo un rettangolo di base $\Delta t = t_2 - t_1$ e area pari all'impulso

$$I_{12} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt \,,$$

il rapporto

$$\frac{I_{12}}{\Delta t} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt}{\Delta t}$$

rappresenta l'altezza $\bar{f}$ di tale rettangolo. Tale altezza $\bar{f}$ è quella che si chiama *valor medio* della forza.

Nel nostro caso abbiamo, usando la [IV.19]:

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt = \frac{2\, m\, v \cos 45^\circ}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 10^{-2}\ \text{kg} \cdot 10\ \text{m/s} \cdot 0{,}704}{10^{-2}\ \text{s}} \simeq 14\ N$$

Vedremo a suo tempo che il terzo principio della dinamica impone che la biglia eserciti sulla lastra una forza uguale e contraria rispetto a quella che la lastra esercita sulla biglia.

Va notato che a parità di velocità e di massa della biglia (e mantenendo l'ipotesi di urto elastico) la forza media $\bar{f}$ è inversamente proporzionale al tempo Δt di contatto con la lastra. Questo è il motivo per cui ad esempio una biglia rigida (vetro o acciaio) urtando contro una lastra di vetro può provocare la rottura; laddove una palla di gomma di pari massa e velocità non provoca alcun danno, poiché la sua deformabilità diluisce il contatto su un tempo più lungo (oltreché su un'area più estesa).

L'introduzione della grandezza quantità di moto $\vec{q} = m\vec{v}$ permette di scrivere il secondo principio della dinamica del punto nella forma più generale:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

La generalizzazione consiste nel fatto che variazioni nel tempo di $\vec{q}$ si possono avere sia per variazioni di $\vec{v}$ con massa costante, sia per variazioni di massa oltre che, eventualmente, di velocità (problemi a massa variabile). Nel caso di massa costante l'espressione

$$\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

coincide con la prima formulazione del secondo principio della dinamica.

IV.5. Momento angolare e momento della forza

Consideriamo un punto materiale P che si muova in un sistema di riferimento inerziale. Sia $\vec{q} = m\vec{v}$ la sua quantità di moto, e scegliamo per

nostra comodità un punto Ω di riferimento (gli esempi che discuteremo in questo e in altri capitoli ci chiariranno con quali criteri il punto Ω possa essere scelto).

Momento angolare o momento della quantità di moto

Si chiama *momento angolare* o *momento della quantità di moto* del punto P rispetto al polo Ω il vettore

$$\vec{p} = \Omega P \times \vec{q} \qquad \text{[IV.20]}$$

Ci proponiamo di stabilire quale sia l'equazione dinamica che governa l'evoluzione di $\vec{p}$. Partiamo dal II principio della dinamica (eq. III.5), che possiamo scrivere anche come

$$\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt} \qquad \text{[IV.21]}$$

Moltiplicando vettorialmente a sinistra ambo i membri della [IV.21] per il vettore ΩP, si ha:

$$\Omega P \times \vec{f} = \Omega P \times \frac{d\vec{q}}{dt} \qquad \text{[IV.22]}$$

Momento della forza

Il primo membro di questa equazione è detto *momento della forza* $\vec{f}$ rispetto al polo Ω; lo indichiamo col simbolo $\vec{m}$:

$$\vec{m} = \Omega P \times \vec{f} \qquad \text{[IV.23]}$$

La [IV.22] può dunque essere scritta come:

$$\vec{m} = \Omega P \times \frac{d\vec{q}}{dt} \qquad \text{[IV.24]}$$

Ci proponiamo ora di scrivere il secondo membro della [IV.24] in termini della derivata del vettore $\vec{p}$. Deriviamo dunque la [IV.20] rispetto al tempo t:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\Omega P \times \vec{q}) = \frac{d\Omega P}{dt} \times \vec{q} + \Omega P \times \frac{d\vec{q}}{dt}$$

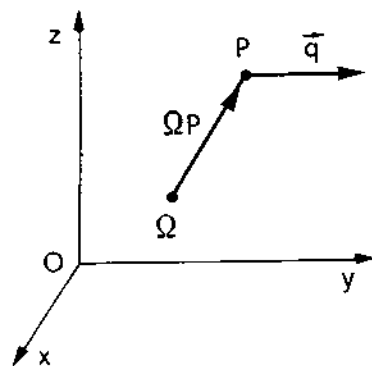
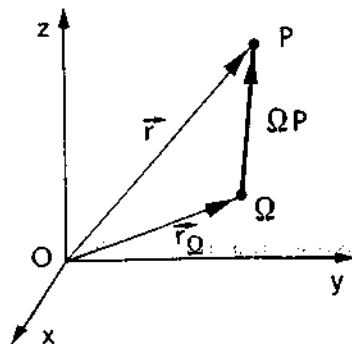
da cui possiamo vedere che il secondo membro della [IV.24] può essere espresso come

$$\Omega P \times \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} - \frac{d\Omega P}{dt} \times \vec{q}$$

Sostituendo nella [IV.24] si ha:

$$\vec{m} = \frac{d\vec{p}}{dt} - \frac{d\Omega P}{dt} \times \vec{q} \qquad \text{[IV.25]}$$

Ora osserviamo che il vettore ΩP può essere scritto come differenza fra il vettore posizione $\vec{r}$ del punto P e il vettore posizione $\vec{r}_\Omega$ del punto Ω: $\Omega P = \vec{r} - \vec{r}_\Omega$; da cui derivando

$$\frac{d\Omega P}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_\Omega$$

e sostituendo nella [IV.25]

$$\vec{m} = \frac{d\vec{p}}{dt} - (\vec{v} - \vec{v}_\Omega) \times \vec{q} \qquad \text{[IV.26]}$$

Ora osserviamo che il vettore $\vec{v}$ (velocità del punto P) e il vettore $\vec{q}$ (quantità di moto dello stesso punto P) sono fra di loro paralleli, per cui il loro prodotto vettoriale è nullo; per conseguenza la [IV.26] si riduce a

$$\vec{m} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{v}_\Omega \times \vec{q} \qquad \text{[IV.27]}$$

dove $\vec{v}_\Omega$ è la velocità del polo Ω nel sistema di riferimento inerziale considerato. Nel caso particolare che il polo sia un punto fermo nel sistema di riferimento in esame ($\vec{v}_\Omega = 0$), la [IV.27] si riduce a

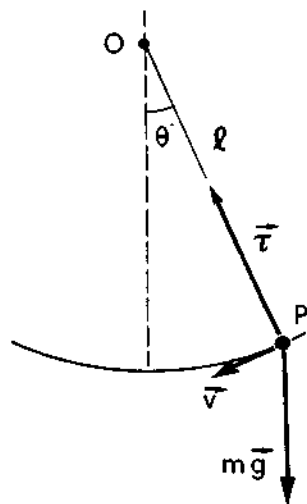
$$\boxed{\vec{m} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \qquad \text{[IV.28]}$$

In ogni sistema di riferimento inerziale, se si sceglie un punto fisso come polo, il momento della forza risultante agente su un punto materiale è pari alla derivata rispetto al tempo del momento angolare del punto materiale stesso.

Teorema del momento angolare

Questa conclusione va sotto il nome di *teorema del momento angolare* o *teorema del momento della quantità di moto*

Esempi

Pendolo semplice

E.IV.8. *Un oggetto puntiforme P di massa m è sospeso a un punto fisso O mediante un filo inestensibile, di massa trascurabile e flessibile, di lunghezza l. Spostando l'oggetto dalla posizione verticale di equilibrio e lasciandolo libero, esso viene richiamato verso la posizione di equilibrio dalla forza peso, e comincia ad oscillare (pendolo semplice). Nel caso di piccole oscillazioni (cioè se il valore dell'angolo θ espresso in radianti è molto minore di 1), le oscillazioni risultano isocrone, cioè hanno tutte la stessa durata. Trascurando la forza di smorzamento dovuta all'aria, scrivere l'equazione del moto, e verificare che la legge oraria rappresenta oscillazioni isocrone.*

Se non ci fosse il filo, la massa cadrebbe liberamente sotto l'azione della forza peso, che agisce lungo la verticale con intensità $m\vec{g}$ (vedi par. III.6). In realtà essa prende a muoversi in direzione della tangente a una circonferenza di raggio l; e ciò è dovuto al fatto che il filo esercita a sua volta una forza $\vec{\tau}$ che si aggiunge, e parzialmente si oppone, alla forza peso.

Reazioni vincolari

La forza $\vec{\tau}$ appartiene alla categoria delle *reazioni vincolari*, che introdurremo più sistematicamente nel prossimo capitolo. Le forze vincolari sono forze esercitate dai cosiddetti *vincoli*, cioè da sistemi meccanici che si oppongono con una forza comunque intensa (fino a che il vincolo non si rompe) a ogni tentativo di modificarne le caratteristiche geometriche: nel caso in esame, il filo reagisce alla sollecitazione che tende ad allungarlo. Delle reazioni vincolari non si conosce a priori l'intensità, che va ricavata analizzando le sollecitazioni (di natura dinamica e/o statica) che sul vincolo esplicano il sistema in esame (nel nostro caso il punto materiale P che si muove) e le forze che sul sistema agiscono.

Sui metodi che possono essere impiegati per calcolare le razioni vincolari torneremo in altri capitoli: qui ci limitiamo alle semplici considerazioni necessarie per risolvere il nostro problema.

Notiamo allora che per le sue caratteristiche meccaniche (completa flessibilità) il filo non può esercitare forze trasverse alla sua direzione: la reazione $\vec{\tau}$ ha necessariamente la direzione da P ad O. Per conseguenza, se scegliamo come polo Ω il punto di sospensione O, il primo membro dell'equazione [IV.28] diviene:

$$\vec{m} = OP \times \vec{f} = OP \times (\vec{\tau} + m\vec{g}) = OP \times m\vec{g} \qquad \text{[IV.29]}$$

avendo tenuto presente che, essendo OP e $\vec{\tau}$ fra di loro paralleli, il loro prodotto vettoriale è nullo ($OP \times \vec{\tau} = 0$). In effetti, è questo uno dei criteri generali per la scelta del polo per l'equaz. [IV.28]: se la reazione vincolare (che è a priori di intensità incognita) è costantemente diretta verso un punto fisso, la scelta di quel punto come polo dei momenti libera la [IV.28] del contributo incognito della reazione stessa.

In virtù della [IV.29], la [IV.28] si scrive nel nostro caso:

$$OP \times m\vec{g} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(OP \times m\vec{v}) \qquad \text{[IV.30]}$$

Se scegliamo un sistema di riferimento che abbia come piano xy il piano che contiene all'istante iniziale il vettore OP, notiamo che tutte le forze che agiscono sul punto P giacciono nel piano xy. Se anche la velocità iniziale giace nel piano xy (oppure se la velocità iniziale è nulla), tutto il moto si svolge nel piano xy: infatti l'accelerazione ha componente z nulla ($a_z = 0$), e quindi v_z resta nulla nel tempo, se essa è nulla all'istante $t = 0$.

Per conseguenza l'unica componente della [IV.30] che è diversa da zero è la componente z, e tale componente può essere scritta come:

$$-\,l\,mg \sin\theta = l\,m\frac{dv}{dt} = l\,m\frac{d}{dt}\left(l\frac{d\theta}{dt}\right) = l^2 m\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \text{[IV.31]}$$

Nello scrivere questa equazione (e nell'eseguire i passaggi intermedi in essa contenuti) abbiamo tenuto conto delle seguenti circostanze:

a) il vettore OP (di modulo pari a l) e il vettore $m\vec{g}$ formano un angolo θ: il modulo del loro prodotto vettoriale vale pertanto $|l\,mg \sin\theta|$;

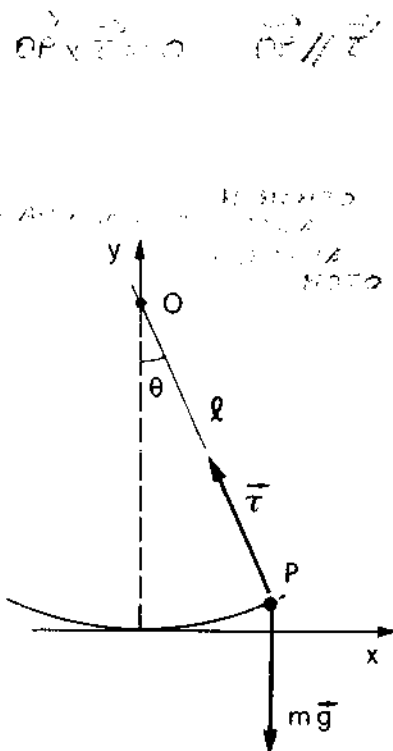
b) la proiezione lungo l'asse z di tale prodotto vettoriale (il cui valore assoluto coincide col modulo del prodotto vettoriale stesso) vale $-\,l\,mg\sin\theta$ (se θ è in senso orario il momento tende a far ruotare in senso antiorario, e viceversa);

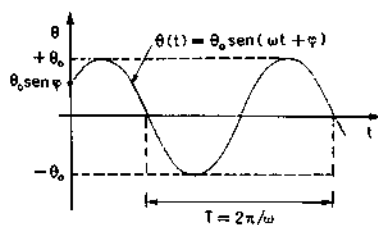
c) la velocità $\vec{v}$ del punto è tangenziale alla circonferenza di raggio l e centro O, ed è dunque ortogonale ad OP; pertanto la componente z del prodotto $OP \times m\vec{v}$ vale $l\,m$v. Inoltre $v = OP \cdot \frac{d\theta}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$.

Eseguendo le opportune semplificazioni, la [IV.31] diviene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad \text{[IV.32]}$$

Questa è una equazione differenziale nella funzione incognita $\theta = \theta(t)$. La soluzione di questa equazione consente di risolvere completamente il nostro problema: la posizione del punto P è infatti completamente nota se si conosce θ. In altri termini, nell'ipotesi fatta che la velocità iniziale giaccia nel piano xy, il pendolo semplice è un sistema a un solo grado di libertà.

Tuttavia, a dispetto della sua apparente semplicità, l'equazione [IV.32] non ammette soluzione semplice: essa è una equazione cosiddetta *trascendente*, la cui soluzione non è esprimibile attraverso un numero finito di operazioni elementari.

Se tuttavia θ (che sottintenderemo sempre essere espresso in radianti) è piccolo (θ << 1), allora si ha l'approssimazione $\sin\theta \simeq \theta$; e la equazione [IV.32] diviene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\theta = 0 \qquad [IV.33]$$

Questa equazione è una equazione differenziale del secondo ordine *lineare omogenea a coefficienti costanti*, che può sempre essere risolta con facilità (vedi appendice A). Qui ci limitiamo a verificare che una funzione del tipo

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi) \qquad [IV.34]$$

soddisfa la [IV.33] qualunque sia il valore dei parametri θ_0 e φ (sul cui significato torneremo fra poco), a patto che sia $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Per verificare l'affermazione, deriviamo la [IV.34] rispetto al tempo. Per fare ciò usiamo la regola di derivazione di «funzione di funzione», scrivendo $\theta = \theta_0 \sin\alpha$ con $\alpha = (\omega t + \varphi)$; otteniamo allora facilmente

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_0\, \omega \cos(\omega t + \varphi) \qquad [IV.35.a]$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0\, \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \qquad [IV.35.b]$$

Inserendo la [IV.35.b] e la [IV.34] nella [IV.33], si verifica immediatamente che quest'ultima risulta identicamente soddisfatta se $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Il parametro ω è detto *pulsazione* del moto, ed ha le dimensioni dell'inverso di un tempo: nel S.I. la pulsazione si misura in s^{-1}.

Pulsazione

Moto armonico

Un moto la cui legge oraria sia rappresentata dalla [IV.34] è detto *oscillatorio armonico*. Graficamente, tale legge oraria ha l'andamento rappresentato in figura. Vediamo che:

Ampiezza angolare

Fase iniziale

a) l'angolo θ varia fra i valori estremi $-\theta_0$ e $+\theta_0$: θ_0 rappresenta quella che si chiama l'*ampiezza angolare* della oscillazione.

b) All'istante $t = 0$ l'angolo θ vale $\theta_0 \sin\varphi$. L'angolo φ viene detto *fase iniziale*.

Periodo

Isocronismo

c) Il moto si ripete con regolarità ogni qualvolta trascorre un tempo caratteristico T (detto *periodo*) pari a $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$: ciò dimostra che le piccole oscillazioni sono isocrone, cioè non dipendono dall'ampiezza angolare θ_0. Che il periodo T sia legato alla pulsazione ω dalla relazione $T = 2\pi/\omega$, si verifica immediatamente imponendo che la funzione $\theta(t)$ assuma lo stesso valore al tempo t ed al tempo $(t + T)$. Deve verificarsi l'uguaglianza:

$$\theta(t) = \theta_0 \,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi) = \theta(t + T) = \theta_0 \,\mathrm{sen}\,[\omega(t + T) + \varphi],$$

che implica che, dovendo essere:

$$\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi) = \mathrm{sen}\,[\omega(t + T) + \varphi],$$

gli argomenti delle funzioni seno differiscano di 2π. Cioè

$$[\omega(t + T) + \varphi) - (\omega t + \varphi) = 2\pi$$

e quindi

$$\omega T = 2\pi$$

da cui

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

È superfluo ricordare che ω, pulsazione, è una costante del moto armonico, laddove la velocità angolare con cui si muove il segmento OP è una funzione sinusoidale

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_0\,\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Il valore da assegnare alle costanti θ_0 e φ è connesso con le modalità con cui il moto viene avviato: esse rappresentano in effetti le *costanti o condizioni iniziali* del moto. Il loro calcolo può essere effettuato facilmente se viene specificato a quale angolo $\bar{\theta}$ è stato abbandonato il pendolo all'istante $t = 0$, e con quale velocità angolare $\bar{\theta}'$. Ponendo infatti $t = 0$ nella [IV.34] e nella [IV.35.a], ed uguagliando rispettivamente a $\bar{\theta}$ e a $\bar{\theta}'$, abbiamo:

Condizioni iniziali

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \theta_0 \sin\varphi \\ \bar{\theta}' &= \theta_0\,\omega\cos\varphi \end{aligned} \qquad \text{[IV.36]}$$

Eliminando θ_0 da queste due relazioni possiamo determinare φ; dopo di che la prima di esse (o la seconda) ci consente di calcolare θ_0.

Osservazione: Negli sviluppi precedenti si è usato il fatto che, per angoli piccoli, è lecita l'approssimazione $\sin\theta \simeq \theta$. Quando si fa una approssimazione, è buona regola valutare l'ordine di grandezza dell'errore che si commette facendo l'approssimazione in questione. Per esempio, per un angolo di 30°, qual'è l'errore percentuale che si commette scrivendo $\sin\theta \simeq \theta$?

Sappiamo che $\sin\theta = 0{,}50$ e che, in radianti, 30° corrispondono a

$$\theta = \frac{\pi}{6} = \frac{3{,}14}{6} \simeq 0{,}52\,.$$

Dunque l'errore percentuale sarà di

$$\frac{0{,}52 - 0{,}50}{0{,}50} \simeq 0{,}04 = 4\%\,.$$

Pertanto, se un errore del 4% è accettabile nel contesto della precisione che ci si prefigge nel calcolo, allora l'approssimazione $\sin\theta \simeq \theta$ per un angolo di 30°, può essere fatta.

E.IV.9. *Un pendolo semplice è costituito da una massa puntiforme $m = 30$ g, appesa a un filo flessibile inestensibile di lunghezza $l = 50$ cm. Determinare il periodo T delle piccole oscillazioni. Sapendo che il pendolo viene portato inizialmente a formare un angolo $\theta = 4°$ rispetto alla verticale, e abbandonato con velocità iniziale nulla, esplicitare la funzione che descrive la legge oraria.*

La pulsazione vale

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}5\ \text{m}}} \simeq 4{,}43\ \text{s}^{-1};$$

il periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 1{,}42\ \text{s}\,.$$

Notare che le modalità del moto sono indipendenti dalla massa m.

Le condizioni iniziali assegnate corrispondono a $\bar{\theta} = 4° \simeq 0{,}07$ rad e $\bar{\theta}' = 0$; le [IV.36] divengono pertanto:

$$0{,}07 = \theta_0 \sin\varphi$$
$$0 \quad = \theta_0 \times 4{,}43 \times \cos\varphi$$

La seconda di queste relazioni ci dice che $\cos\varphi = 0$, cioè $\varphi = \pi/2$; dalla prima abbiamo $\theta_0 = 0{,}07$ rad. La [IV.34] si scrive dunque, nel nostro caso (t in secondi e θ in radianti):

$$\theta = 0{,}07 \sin(4{,}43\, t + \pi/2) = 0{,}07 \cos(4{,}43\, t)$$

IV.6. Lavoro di una forza. Teorema dell'energia cinetica

Consideriamo, per esempio, una automobile, lungo una strada non pianeggiante. Vi è una importante differenza pratica e di principio fra il caso in cui l'automobile *si muova* in salita e il caso in cui essa venga *mantenuta ferma*.

In entrambi i casi è necessario contrastare la forza peso, che tende a far scendere la macchina in discesa. Ma se la macchina si muove è necessario l'impiego di energia, il consumo di qualche forma di combustibile. Mentre se l'automobile è ferma non è necessario un motore acceso: basta tirare il freno a mano, che può contrastare il peso per un tempo indefinito, senza che ciò composti alcun consumo.

È questo un fatto del tutto generale. Se un punto materiale in un determinato sistema di riferimento è sottoposto a forze da parte di qualche sistema materiale presente nell'ambiente (sistema materiale che supporremo fermo nel sistema di riferimento considerato), allora il punto materiale può essere *mantenuto fermo* senza che ciò comporti alcun dispendio di energia; ma per *muoverlo* contro le forze è necessario compiere del lavoro, spendere dell'energia.

In questo e nei prossimi paragrafi di questo capitolo definiremo operativamente le grandezze fisiche (lavoro, energia, ecc.) atte a rendere quantitative e precise queste semplici considerazioni, e deriveremo le proprietà di queste grandezze fisiche e le relazioni che fra di esse intercorrono.

Lavoro elementare

Consideriamo dunque un punto materiale P di massa m che si muove in un sistema di riferimento inerziale, sottoposto a una forza $\vec{f}$. Sia $\vec{r}(t)$ il vettore posizione del punto all'istante t e $\vec{r}(t+dt)$ il suo vettore posizione all'istante $(t+dt)$. Nell'intervallo di tempo elementare dt il punto ha dunque subito uno spostamento elementare $d\vec{s}$ dato da:

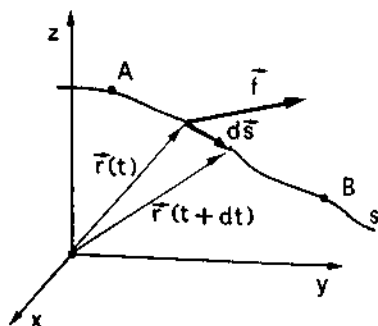
$$d\vec{s} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) \qquad \text{[IV.37]}$$

Chiameremo *lavoro elementare* dL relativo allo spostamento elementare $d\vec{s}$ la quantità

$$dL = \vec{f} \cdot d\vec{s} \qquad \text{[IV.38]}$$

cioè il prodotto scalare fra la forza $\vec{f}$ e lo spostamento elementare $d\vec{s}$.

Supponiamo ora che il punto materiale P si porti, percorrendo la traiettoria s, dal punto A al punto B. Immaginando di suddividere la traiettoria in tanti tratti elementari, il lavoro compiuto dalla forza lungo l'intero per-

corso può essere calcolato approssimativamente come somma dei lavori elementari dL relativi a ciascun tratto elementare $d\vec{s}$:

$$L_{AB} \simeq \sum \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

Il calcolo del lavoro diviene esatto se si effettua il limite per $d\vec{s}$ tendente a zero (in maniera analoga a quanto abbiamo visto per l'integrale definito nel par. IV.3): questo limite si scrive convenzionalmente come

Lavoro di una forza

Joule pari a Newton per metro: unità di misura del lavoro nel sistema SI.

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} \qquad \text{[IV.39]}$$

e lo si chiama *integrale di linea della forma differenziale $\vec{f} \cdot d\vec{s}$ fra i punti A e B lungo la traiettoria s.*

Integrale di linea di una forma differenziale

Sulle proprietà degli integrali di linea, e sulle tecniche per effettuarne il calcolo, torneremo in dettaglio nel prossimo paragrafo.

Qui nel seguito ricaviamo la relazione esistente fra la quantità dinamica *lavoro* definita dalla [IV.39] e le grandezze cinematiche che caratterizzano il moto del punto materiale P considerato.

Cominciamo con l'osservare che in generale sul punto materiale P considerato possono agire più forze $\vec{f}_i$. In questo caso il lavoro complessivo L compiuto dalle forze è definito molto naturalmente come somma dei lavori L_i compiuti separatamente dalle varie forze:

$$L = \sum L_i = \sum \int_A^B \vec{f}_i \cdot d\vec{s}_i$$

Poiché – come discende immediatamente dalla definizione – la somma di integrali è pari all'integrale della somma, e poiché tutte le forze $\vec{f}_i$ subiscono lo stesso spostamento elementare $d\vec{s}$ (tutte le forze sono applicate al medesimo punto P), abbiamo:

$$L = \sum L_i = \sum \int_A^B \vec{f}_i \cdot d\vec{s}_i = \int_A^B (\sum \vec{f}_i) \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

dove con $\vec{f}$ abbiamo indicato il risultante delle forze $\vec{f}_i$ ($\vec{f} = \sum \vec{f}_i$). *Il lavoro complessivo delle forze $\vec{f}_i$ che agiscono su un punto materiale è pari al lavoro del risultante $\vec{f}$ delle forze $\vec{f}_i$.* Va notato che questo risultato *non* vale, come vedremo, nel caso di un sistema materiale esteso (non puntiforme), poiché in quest'ultimo caso ciascuna delle forze agenti sul sistema subisce, in generale, uno spostamento diverso.

Lavoro totale delle forze agenti su un punto

Per trovare la relazione che intercorre fra il lavoro del risultante $\vec{f}$ delle forze agenti sul punto P e le caratteristiche cinematiche del punto, partiamo dall'eq. [III.5] che esprime il II principio della dinamica:

$$\vec{f} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Moltiplichiamo scalarmente questa equazione per lo spostamento elementare $d\vec{s}$:

$$\vec{f} \cdot d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} \qquad \text{[IV.40]}$$

Dalla definizione di velocità $\left(\vec{v} = \dfrac{d\vec{s}}{dt}\right)$, e tenuto conto delle proprietà dei differenziali stabilite nel par. IV.2, abbiamo $d\vec{s} = \vec{v}\,dt$; e sostituendo nel II membro della [IV.40]:

$$\vec{f} \cdot d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v} \qquad \text{[IV.41]}$$

Come si verifica facilmente, la quantità $\vec{v} \cdot d\vec{v}$ rappresenta il differenziale di $\frac{1}{2}\,v^2 = \frac{1}{2}\,\vec{v} \cdot \vec{v}$; per cui la [IV.41] può essere scritta come:

$$\vec{f} \cdot d\vec{s} = d\left(\frac{1}{2}\,m v^2\right)$$

Integrando questa equazione fra due punti A e B qualunque della traiettoria si ha:

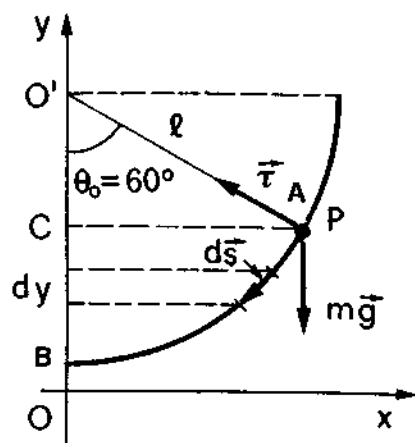
$$\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}\,m v^2\right) = \frac{1}{2}\,m v_B^2 - \frac{1}{2}\,m v_A^2$$

cioè

$$L_{AB} = K_B - K_A \qquad \text{[IV.42]}$$

Energia cinetica

dove con K abbiamo indicato la quantità cinematica $K \equiv \frac{1}{2}\,m v^2$, che viene chiamata *energia cinetica* del punto materiale. La [IV.42] esprime quello che viene comunemente chiamato il *teorema dell'energia cinetica* il cui enunciato è il seguente: *quando un punto materiale si muove lungo una certa traiettoria dal punto A al punto B, il lavoro compiuto dal risultante delle forze su di esso agenti è pari alla variazione di energia cinetica del punto stesso, cioè pari alla differenza fra l'energia cinetica che il punto ha nella posizione B e quella che aveva nella posizione A*

Teorema dell'energia cinetica

Esempi

E.IV.10. *Consideriamo il pendolo semplice di cui all'esempio E.IV.9, e supponiamo che esso venga portato inizialmente ad un angolo $\theta_0 = 60°$ e abbandonato da fermo.*

Con quale velocità esso passa dalla posizione verticale ($\theta = 0$)?

Poiché in questo caso non è soddisfatta la condizione $\theta << 1$ ($\theta_0 = 60°$ è maggiore di 1 radiante), non possiamo usare la [IV.34].

Il problema può però essere risolto facilmente mediante la [IV.42], poiché il lavoro compiuto dalle forze agenti sul punto P può essere calcolato con semplicità. La forza risultante $\vec{f}$ agente sul punto materiale è data dalla somma della reazione vincolare $\vec{\tau}$ e del peso $m\vec{g}$

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (\vec{\tau} + m\vec{g}) \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{\tau} \cdot d\vec{s} + \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s}$$

Lo spostamento $d\bar{s}$ è tangenziale alla circonferenza di raggio l e centro O; ed essendo $\bar{\tau}$ diretto radialmente, essi sono fra di loro ortogonali e dunque il loro prodotto scalare è nullo

$$\left(\int_A^B \bar{\tau} \cdot d\bar{s} \equiv 0\right).$$

Il lavoro si riduce dunque al solo lavoro della forza peso

$$L_{AB} = \int_A^B m\bar{g} \cdot d\bar{s}\,. \qquad [IV.43]$$

Notiamo ora che la forza peso $m\bar{g}$ è costante in modulo e direzione; e che la proiezione di $d\bar{s}$ nella direzione della forza è semplicemente $-dy$ ($m\bar{g}$ ha la stessa direzione dell'asse y da noi scelto, ma verso opposto); per cui $m\bar{g} \cdot d\bar{s} = -mg\,dy$. Dunque

$$L_{AB} = \int_A^B -mg\,dy = [-mgy]_A^B = mg\,(y_A - y_B)$$

Notiamo che il lavoro è positivo ($y_A - y_B$ è positivo, ed è pari al segmento $BC = l - l\cos\theta_0 = l/2$).

Tenuto conto che la velocità iniziale v_A è nulla, la [IV.42] diviene

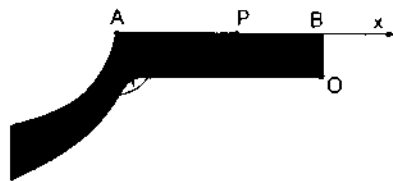
$$\frac{1}{2}\,m v_B^2 = mg\frac{l}{2}$$

da cui

$$v_B = \sqrt{g\,l} = \sqrt{9{,}8\,\frac{m}{s^2} \times 0{,}25\;m} = 1{,}58\,\frac{m}{s}$$

Notiamo che il punto giunge in B con la stessa velocità (in modulo) che avrebbe acquisito cadendo liberamente da C a B.

E.IV.11. *Un fucile a elastico è costruito così come mostrato schematicamente in figura. Per caricare il fucile, il proiettile puntiforme (di massa $m = 10\ g$) viene portato in A, tendendo l'elastico OA fissato in O. Azionando il grilletto, il proiettile prende a muoversi lungo il tratto rettilineo AB di lunghezza $l = 50\ cm$, tirato dall'elastico; e in B esso viene lasciato libero.*

Quando il proiettile si trova nella posizione generica P, la forza $\bar{f}_e$ che l'elastico esercita su di esso è data da $\bar{f}_e = -k\bar{r}$, dove $\bar{r}$ è il vettore $\overline{OP}$ e k è una costante (il cui valore numerico, nel nostro esempio, sia $k = 4\ N/m$). Trascurando gli attriti, calcolare la velocità con cui il proiettile viene sparato.

Assumiamo come riferimento un asse x coincidente con il percorso rettilineo AB compiuto dal proiettile sul fucile, con origine in B. Si ha allora $x_A = -l$ e $x_B = 0$; inoltre lo spostamento elementare $d\bar{s}$ del proiettile può essere scritto come $d\bar{s} = \hat{\imath}\,dx$, essendo $\hat{\imath}$ il versore dell'asse x.

Per il calcolo della velocità v_B usiamo la [IV.42], nella quale va posto $v_A = 0$; essa si scrive dunque

$$\frac{1}{2}\,m v_B^2 = L_{AB}\,. \qquad [IV.44]$$

Si tratta ora di calcolare L_{AB}. Oltre alla forza dell'elastico, agisce sul punto una reazione vincolare $\bar{R}$ che, impedendo al proiettile di muoversi verso O penetrando nel

fucile, lo costringe a muoversi in direzione AB. Tuttavia, in virtù della assenza di attriti questa reazione non ha componente lungo l'asse x (è questo, in effetti, il significato della locuzione «in assenza di attriti», come meglio vedremo nel prossimo capitolo). La reazione $\vec{R}$ non compie dunque alcun lavoro.

Per conseguenza, L_{AB} è dato dal solo contributo della forza dell'elastico $\vec{f}_e$. Pertanto:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f}_e \cdot d\vec{s} = \int_A^B - k\,\vec{r} \cdot \hat{\imath}\, dx = \int_A^B - k\,x\, dx = \left[-\frac{1}{2}\, k x^2\right]_A^B = \frac{1}{2}\, k\, l^2$$

Abbiamo tenuto conto del fatto che la proiezione di $\vec{r}$ lungo il versore $\hat{\imath}$ non è altro che la coordinata x del punto P.

Sostituendo nella [IV.44] si ha

$$\frac{1}{2}\, m v_B^2 = \frac{1}{2}\, k\, l^2, \text{ da cui } v_B = \sqrt{\frac{k}{m}}\, l = \sqrt{4 \cdot \frac{N}{m} \frac{1}{10 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}} \cdot 0{,}5\, m = 10\, \frac{m}{s}$$

IV.7. Calcolo del lavoro e integrale di linea

Integrale di linea

Nel precedente paragrafo abbiamo definito il lavoro di una forza; e nei due esempi discussi abbiamo visto che almeno in quei due casi particolari (caratterizzati il primo da una forza orientata in una direzione fissa, e il secondo da una traiettoria rettilinea per il punto materiale) il calcolo dell'integrale di linea che rappresenta il lavoro si riduceva al calcolo di un integrale definito convenzionale, eseguibile secondo le regole che avevamo sviluppato nel paragrafo IV.3.

Questo fatto vale in realtà anche nel caso generale, quando sia nota l'espressione che la forza ha come funzione (continua) delle coordinate, anche se la procedura per trasformare l'integrale di linea in un integrale convenzionale – procedura che ora specificheremo – può risultare leggermente più elaborata rispetto a quanto abbiamo visto in quei due esempi.

Consideriamo dunque un punto materiale, che si muove in una determinata porzione di spazio sottoposto all'azione di forze da parte di sistemi materiali presenti all'intorno. Supponiamo di conoscere l'espressione che la forza esercitata sul punto assume in funzione della posizione del punto stesso:

$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}) \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} f_x = f_x(x, y, z) \\ f_y = f_y(x, y, z) \\ f_z = f_z(x, y, z) \end{cases} \qquad \text{[IV.45]}$$

Campo di forze

Campo di forze stazionario

Si dice allora che nella porzione di spazio considerata agisce un *campo di forze noto*. In linea di principio tale campo di forze potrebbe dipendere esplicitamente anche dal tempo ($\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}, t)$). Tuttavia noi ci limiteremo a considerare il caso di *campi di forze indipendenti dal tempo* come quello rappresentato dalle [IV.45]; un tale campo è detto anche *stazionario*.

In termini delle componenti della forza $\vec{f}$, il lavoro può essere scritto, utilizzando la [II.14], come

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_A^B [f_x(x, y, z)\, dx + f_y(x, y, z)\, dy + f_z(x, y, z)\, dz] \qquad \text{[IV.46]}$$

essendo dx, dy, dz le componenti dello spostamento elementare $d\vec{s}$.

Per potere eseguire il calcolo dell'integrale di linea [IV.46], è ora necessario specificare quale traiettoria il punto materiale segue mentre si sposta da A a B.

Nel capitolo II abbiamo già visto, in alcuni esempi, come la traiettoria del punto possa essere espressa in termini matematici.

Nell'esempio E.II.26 (moto del proiettile) la traiettoria poteva essere scritta – nel sistema di riferimento che avevamo scelto – come:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = z(y) = ay^2 + by + z_0 \left(a = \dfrac{-g}{2\, v_0^2 \cos^2 \alpha}\,;\ b = \operatorname{tg} \alpha \text{: vedi eq. [II.49]} \right) \end{cases} \quad \text{[IV.47]}$$

Nell'esempio E.II.8 avevamo invece espresso la traiettoria del moto circolare tramite equazioni che potevano essere scritte come:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{[IV.48]}$$

Del tutto in generale, la traiettoria del punto può essere specificata esprimendo le tre coordinate del punto in funzione di un unico parametro h:

$$\begin{cases} x = x(h) \\ y = y(h) \\ z = z(h) \end{cases} \quad \text{[IV.49]}$$

dove h può assumere, di caso in caso, significato geometrico o fisico diverso.

Per ritornare ai nostri esempi, nel caso del moto del proiettile la traiettoria può essere espressa nella forma [IV.49] assumendo come parametro h la coordinata y, col che le [IV.47] si scrivono

$$\begin{cases} x = x(h) = 0 \\ y = y(h) = h \\ z = z(h) = a h^2 + b h + z_0 \end{cases}$$

Mentre nel caso del moto circolare, assumendo come parametro h l'angolo φ, le [IV.48] possono essere scritte come:

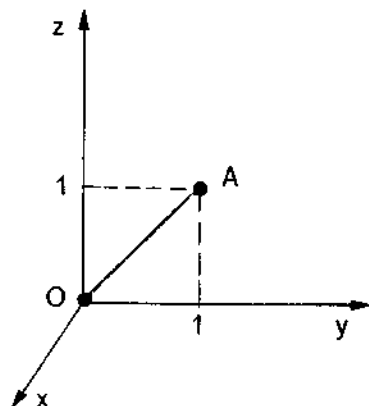
$$\begin{cases} x = x(h) = R \cos h \\ y = y(h) = R \sin h \\ z = z(h) = 0 \end{cases}$$

Una volta che ci siano note esplicitamente le [IV.45] che esprimono il campo di forze entro il quale il punto materiale si muove, e le [IV.49] che specificano quale traiettoria il punto materiale percorre all'interno del campo di forze, l'integrale [IV.46] che esprime il lavoro può essere calcolato con relativa semplicità sostituendo nella [IV.46] le [IV.49] al posto delle coordinate x, y, z e i differenziali delle [IV.49] stesse al posto di dx, dy, dz.

Esempi

E.IV.12. *Un punto materiale si muove in una regione di spazio in cui agisce un campo di forze di equazioni:*

$$\begin{cases} f_x = ax + z \\ f_y = by \\ f_z = cy \end{cases} \quad \text{[IV.50]}$$

con a, b, c coefficienti costanti e noti.

Calcolare il lavoro compiuto dal campo di forze se il punto materiale si muove dall'origine $O \equiv (0, 0, 0)$ al punto $A \equiv (0, 1, 1)$ lungo la traiettoria rettilinea indicata in figura, giacente nel piano yz.

Tenuto conto delle [IV.50], la [IV.46] si scrive nel nostro caso:

$$L_{OA} = \int_O^A \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_O^A ((ax + z)\, dx + by\, dy + cy\, dz) \qquad [IV.51]$$

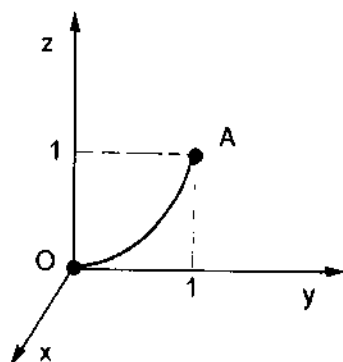
Le equazioni [IV.49] della traiettoria possono essere scritte nel nostro caso (tenuto conto che il segmento OA è caratterizzato dal fatto che $x = 0$ e $y = z$) nella forma:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = h \\ z = h\,; \end{cases} \qquad [IV.52.a]$$

da cui differenziando

$$\begin{cases} dx = 0 \\ dy = dh \\ dz = dh\,. \end{cases} \qquad [IV.52.b]$$

Sostituendo le [IV.52.a] e [IV.52.b] nelle [IV.51], abbiamo:

$$L_{OA} = \int_0^1 (0 + bh\, dh + ch\, dh) = (b + c)\left[\frac{1}{2} h^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(b + c)$$

E.IV.13. *Il punto materiale si muove ancora da O ad A nello stesso campo di forze, ma percorre l'arco di parabola giacente nel piano yz la cui equazione è $z = y^2$. Calcolare il lavoro.*

Nella forma [IV.49] le equazioni della traiettoria possono essere espresse mediante le equazioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = h \\ z = h^2 \end{cases}$$

da cui differenziando

$$\begin{cases} dx = 0 \\ dy = dh \\ dz = 2h\, dh \end{cases}$$

Sostituendo nella [IV.51] si ha:

$$L_{OA} = \int_0^1 (0 + bh\, dh + ch\, 2h\, dh) = \int_0^1 (bh\, dh + 2\, ch^2\, dh) =$$
$$= \left[\frac{1}{2} bh^2 + 2c\frac{h^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} b + \frac{2}{3} c$$

Notiamo che nonostante il punto si sia mosso dalla stessa posizione iniziale O alla stessa posizione finale A nello stesso campo di forze [IV.50], il lavoro compiuto risulta diverso per conseguenza del fatto che la traiettoria percorsa è stata diversa.

Gli esempi fatti mostrano che in generale *il lavoro* compiuto da una forza agente su un punto quando il punto si sposta da una posizione A a una posizione B, *dipende non solo dalla posizione iniziale e dalla posizione finale, ma anche dalla particolare traiettoria percorsa.*

Il lavoro dipende in generale dalla traiettoria

IV.8. Campi di forze conservativi. La funzione potenziale

Benché in generale il lavoro dipenda anche dalla traiettoria, può accadere che esso dipenda solo dalle coordinate degli estremi A e B del percorso considerato: se ciò accade, si dice che il campo di forze è un *campo conservativo.*

Campo di forze conservativo

Per un campo di forze conservativo, dunque:

$$\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = L_{AB} = f(A, B) \qquad \text{[IV.53]}$$

dove con A e B abbiamo indicato sinteticamente le coordinate x_A, y_A, z_A del punto A e, rispettivamente, le coordinate x_B, y_B, z_B del punto B.

In un campo di forze conservativo il lavoro L_{AB} è funzione solo delle coordinate del punto A e delle coordinate del punto B, per ogni A e B appartenenti al campo.

Per essere conservativo un campo di forze deve essere necessariamente stazionario, cioè indipendente dal tempo. Diverse traiettorie implicano infatti in generale diversi tempi di percorrenza; e ciò comporta che, in un campo non stazionario, il lavoro possa avere valore diverso a parità di estremi A e B per la traiettoria.

Tuttavia non è sufficiente che un campo di forze sia stazionario affinché esso sia conservativo: nel precedente paragrafo abbiamo visto esempi relativi a un campo stazionario che non era conservativo, poiché il lavoro risultava diverso a seconda della traiettoria seguita per andare da A a B.

È facile dimostrare che se il lavoro L_{AB} dipende solo dagli estremi A e B ($L_{AB} = f(A, B)$), allora deve essere necessariamente

$$f(A, B) = V(B) - V(A):$$

in un campo di forze conservativo, il lavoro per andare da A a B può essere espresso come differenza fra i valori che una stessa funzione V delle coordinate assume rispettivamente in B e in A.

Consideriamo infatti, all'interno del campo di forze (stazionario e conservativo) un percorso che, a partire da un punto generico O assunto come riferimento, porta ad A e poi prosegue fino a B. Se calcoliamo il lavoro per andare da O ad A potremo scrivere, in virtù della [IV.53]:

$$L_{OA} = f(O, A) \qquad \text{[IV.54]}$$

Analogamente, se calcoliamo il lavoro per andare da O a B, avremo:

$$L_{OB} = f(O, B).$$

D'altro canto, dalla definizione di integrale di linea, risulta immediatamente che il lavoro è una quantità additiva rispetto ai tratti del percorso; dunque $L_{OB} = L_{OA} + L_{AB}$; dunque

$$L_{OA} + L_{AB} = f(O, B) \qquad \text{[IV.55]}$$

Sottraendo membro a membro la [IV.55] e la [IV.54] abbiamo

$$L_{A,B} = V(B) - V(A) \qquad \text{[IV.56]}$$

Potenziale del campo di forze conservativo

avendo indicato con $V(P)$ (dove P è un punto generico) la funzione $f(O, P)$. La funzione $V(P) \equiv V(x, y, z)$ è detta *potenziale* del campo di forze conservativo considerato. Il potenziale è una funzione definita a meno di una costante additiva: infatti, ciò che ha significato fisico è solo la differenza fra i valori che essa assume in due diversi punti, e questa differenza resta invariata aggiungendo alla funzione una costante arbitraria.

Il potenziale esiste solo se il campo di forze è conservativo: se il campo di forze non è conservativo, non può essere definita alcuna funzione potenziale. La differenza di potenziale tra due punti di un campo conservativo è dunque, per definizione,

$$V(B) - V(A) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s},$$

lungo una qualsiasi traiettoria.

Lavoro lungo un percorso chiuso

La [IV.56] mostra, in particolare, che se B coincide con A il lavoro risulta nullo: *in un campo di forze conservativo, il lavoro lungo un percorso chiuso qualunque è nullo.*

Evidentemente, in un campo di forze conservativo il calcolo del lavoro risulta notevolmente semplificato rispetto al caso generale: basta conoscere, una volta per tutte, la funzione potenziale per poter calcolare immediatamente, per differenza, il lavoro relativo allo spostamento da un punto qualunque A a un altro punto qualunque B.

Quando si abbia a che fare con un campo di forze stazionario, è dunque importante verificare se si tratti di un campo di forze conservativo; e nel caso affermativo, determinarne una volta per tutte la funzione potenziale. Per questi scopi, la matematica ha sviluppato e ci fornisce precisi strumenti, che qui di seguito descriviamo per quanto ci sarà utile nel prosieguo del corso, pur senza entrare nel merito delle relative dimostrazioni.

IV.8.1. *Funzioni di più variabili. Derivate parziali e differenziale*

Funzioni di più variabili

Consideriamo una funzione V di più variabili, ad esempio delle tre variabili x, y, z:

$$V = V(x, y, z)$$

Derivata parziale

Si dice *derivata parziale* della V rispetto alla variabile x, e la si indica col simbolo $\frac{\partial V}{\partial x}$, la derivata della funzione $V(x, y, z)$ effettuata considerando costanti le variabili y e z.

Esempio

E.IV.14. *Consideriamo la funzione*

$$V = V(x, y, z) = a\,x^2 + b\,x\,y\,z + y^2\,z^2\,.$$

Calcolarne le derivate parziali.

Dalla definizione, segue immediatamente:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2\,a\,x + b\,y\,z$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = b\,x\,z + 2\,y\,z^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = b\,x\,y + 2\,y^2\,z$$

Le derivate parziali della funzione V sono a loro volta, in generale, funzioni delle tre variabili x, y, z, e se ne possono dunque calcolare le derivate parziali, ottenendo le *derivate seconde* della funzione V. Col simbolo $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, ad esempio, si indica la derivata parziale rispetto a x di $\frac{\partial V}{\partial x}$; col simbolo $\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}$ la derivata parziale rispetto a y di $\frac{\partial V}{\partial x}$; e così via. Le derivate seconde rispetto a una variabile diversa rispetto a quella di prima derivazione $\left(\text{ad esempio } \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}; \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}; \text{ecc.}\right)$ sono anche dette *derivate seconde miste*.

Derivate parziali seconde

Derivate seconde miste

Esempio

E.IV.15. *Calcolare* $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ *e* $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}$, *se* V *è la funzione di cui all'esempio E.IV.14.*

Poiché

$$\frac{\partial V}{\partial y} = b\,x\,z + 2\,y\,z^2,$$

la sua derivata rispetto a y vale

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2\,z^2.$$

Poiché

$$\frac{\partial V}{\partial z} = b\,x\,y + 2\,y^2\,z,$$

la sua derivata rispetto a x vale

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} = b\,y.$$

Un importante teorema, detto *teorema di Schwartz*, afferma, sotto ipotesi abbastanza ampie, che le derivate seconde miste sono indipendenti dall'ordine di derivazione. Si ha cioè:

Teorema di Schwartz

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}.$$

Noi non dimostreremo il teorema di Schwartz.

Esempio

E.IV.16. *Verificare la validità del teorema di Schwartz nel caso della funzione V di cui all'esempio E.IV.14.*

Essendo $\dfrac{\partial V}{\partial x} = 2\,a\,x + b\,y\,z$, si ha $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x} = b\,z$.

Essendo $\dfrac{\partial V}{\partial y} = b\,x\,z + 2\,y\,z^2$, si ha $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = b\,z$.

Dunque $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}$.

In maniera analoga si verificano le altre uguaglianze.

Differenziale totale di una funzione a più variabili

Si dice *differenziale totale* della funzione a più variabili $V(x, y, z)$ la somma delle derivate parziali moltiplicate per i differenziali delle variabili omologhe:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz. \qquad [IV.57]$$

Esempio

E.IV.17. Il differenziale della funzione $V(x, y, z)$ di cui all'esempio E.IV.14 è:

$$dV = (2\,a\,x + b\,y\,z)\,dx + (b\,x\,z + 2\,y\,z^2)\,dy + (b\,x\,y + 2\,y^2\,z)\,dz$$

Forma differenziale lineare

IV.8.2 *Forme differenziali lineari e differenziali esatti*

Gli integrali di linea, che abbiamo introdotto per definire il lavoro, possono essere posti nella forma [IV.46); cioè come integrali di espressioni del tipo

$$f_1(x, y, z)\,dx + f_2(x, y, z)\,dy + f_3(x, y, z)\,dz \qquad [IV.58]$$

effettuati col vincolo che $x, y\ z$ soddisfino le equazioni [IV.49] della traiettoria. Una espressione come la [IV.58] viene detta una *forma differenziale lineare*. Il differenziale di una funzione di più variabili, definito dalla [IV.57], rappresenta una particolare forma differenziale lineare.

Abbiamo visto che l'integrale di linea di una forma differenziale lineare come la [IV.58] dipende in generale dalla particolare traiettoria scelta, e siamo qui interessati a vedere quali siano *le condizioni affinché tale integrale dipenda solo dagli estremi A e B della traiettoria stessa.*

Tali condizioni si riducono sostanzialmente alla seguente:

la forma differenziale considerata deve essere il differenziale di una funzione V delle coordinate; deve cioè esistere una funzione $V(x, y, z)$ tale che

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f_1(x, y, z); \quad \frac{\partial V}{\partial y} = f_2(x, y, z); \quad \frac{\partial V}{\partial z} = f_3(x, y, z) \qquad [IV.59]$$

Se ciò accade, si dice che la forma differenziale [IV.58] rappresenta un *differenziale esatto*

Differenziale esatto

Quando questa condizione è soddisfatta, allora l'integrale di linea della [IV.58] può essere sviluppato come segue:

$$\int_A^B (f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz) = \int_A^B \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)dz\right] = \qquad \text{[IV.60]}$$

$$= \int_A^B dV = V(B) - V(A)$$

Un campo costituito da due pezzi separati *non è connesso*: i punti A e B non possono essere congiunti da una linea appartenente al campo.

ed esso risulta dunque indipendente dal percorso seguito per andare da A a B.

Date tre funzioni qualunque f_1, f_2 ed f_3 delle variabili x, y, z, non sempre le [IV.59] sono soddisfatte; cioè non sempre esiste una funzione $V(x, y, z)$ della quale le f_1, f_2, f_3 rappresentano le derivate parziali rispetto a x, y, z rispettivamente. Una condizione necessaria affinché ciò possa essere è imposta dal teorema di Schwartz. Derivando infatti la prima delle [IV.59] rispetto a y e la seconda rispetto a x, si ha:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Il teorema di Schwartz impone che queste due quantità siano fra di loro uguali; ed analoghe condizioni vengono imposte dalla uguaglianza fra le altre derivate miste. Dunque condizione necessaria per la validità delle [IV.59] è che sia

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x}; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}.$$

Un campo in due dimensioni che abbia un «buco» *non è semplicemente connesso*: la linea chiusa c non può restringersi con continuità fino a divenire un punto, continuando ciò facendo ad appartenere al campo.

Condizioni di questo tipo divengono sufficienti per l'esistenza della funzione V verificante le [IV.59] nel caso in cui l'insieme di definizione delle tre funzioni f_1, f_2 ed f_3 sia un campo *semplicemente connesso*; ciò significa che due punti qualunque appartenenti al campo devono essere congiungibili con una linea continua tutta appartenente al campo, e che qualunque linea chiusa appartenente al campo può essere fatta convergere a un punto continuando ad appartenere sempre al campo considerato.

Tutto quanto abbiamo fin qui visto sulle forme differenziali lineari ci consente di trarre le seguenti conclusioni a proposito delle condizioni cui un campo di forze deve soddisfare per essere conservativo.

Sia dato un campo di forze, individuato dalle funzioni f_x, f_y, f_z che rappresentano le componenti della forza e sono definite in un campo semplicemente connesso.

$$f_x = f_x(x, y, z); \qquad f_y = f_y(x, y, z); \qquad f_z = f_z(x, y, z)$$

allora condizione necessaria e sufficiente affinché si tratti di un campo di forze conservativo è che sia

Condizione necessaria e sufficiente perché un campo di forze sia conservativo

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}; \qquad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}; \qquad \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z} \qquad \text{[IV.61]}$$

Esempi

E.IV.18. *Consideriamo il campo di forze definito dalle relazioni [IV.50]:*

$$f_x = ax + bz$$
$$f_y = by$$
$$f_z = cy$$

con a, b, c coefficienti costanti diversi da zero. Verifichiamo se si tratti o meno di un campo di forze conservativo.

Si ha:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial f_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial f_z}{\partial y} = c \neq 0; \quad \frac{\partial f_x}{\partial z} = b \neq 0; \quad \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0 .$$

Poiché $\frac{\partial f_y}{\partial z} \neq \frac{\partial f_z}{\partial y}$ e $\frac{\partial f_x}{\partial z} \neq \frac{\partial f_z}{\partial x}$, il campo di forze non è conservativo.

E.IV.19. *Dato il campo di forze*

$$f_x = ax + by$$
$$f_y = cx$$
$$f_z = dx + cz$$

trovare quali relazioni devono soddisfare i coefficienti a, b, c, d, affinché si tratti di un campo di forze conservativo.

Il campo di definizione è tutto il dominio reale, ed è dunque semplicemente connesso; basta dunque imporre la validità delle [IV.61]. Si ha:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = b; \quad \frac{\partial f_y}{\partial x} = c; \quad \frac{\partial f_x}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial f_z}{\partial x} = d; \quad \frac{\partial f_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial f_z}{\partial y} = 0 .$$

Affinché valgano le [IV.61], deve dunque essere $b = c$ e $d = 0$.

Il campo di forze

$$f_x = ax + by$$
$$f_y = bx$$
$$f_z = cz$$

è dunque conservativo.

IV.8.3. *Calcolo della funzione potenziale*

Calcolo della funzione potenziale

Consideriamo un campo di forze conservativo, per il quale dunque sappiamo che esiste una funzione potenziale $V(x, y, z)$ definita a meno di una costante.

Qualora la funzione potenziale ci sia esplicitamente nota, ammesso che non conosciamo le espressioni che le componenti della forza hanno in funzione delle coordinate, noi possiamo facilmente caalcolarle mediante le [IV.59]; si ha cioè:

$$f_x = \frac{\partial V}{\partial x}; \qquad f_y = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad f_z = \frac{\partial V}{\partial z} \qquad \text{[IV.62]}$$

Dal potenziale alla forza

Le componenti di un campo di forze conservativo si ottengono a partire dal potenziale effettuandone la derivata parziale rispetto a ciascuna delle coordinate.

Molto spesso però si presenta il problema inverso: ci sono note a priori le componenti del campo di forze in funzione delle coordinate, e siamo interessati a calcolare la funzione potenziale $V(x, y, z)$. Ciò può essere fatto ricorrendo alla [IV.60]. Questa ci mostra infatti che calcolando il lavoro da un punto di riferimento A (per altro arbitrario) al punto generico $\bar{P}$ di coordinate $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, si ottiene un risultato che non dipende dal percorso seguito (essendo per ipotesi il campo conservativo), ma solo dalle coordinate $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

del punto $\bar{P}$, una volta fissato il punto A la cui arbitrarietà rende definito il risultato a meno di una costante additiva: la funzione delle coordinate così ottenuta rappresenta per l'appunto il potenziale:

$$V(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \int_A^{\bar{P}} (f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz) + V(x_A, y_A, z_A) \qquad \text{[IV.63]}$$

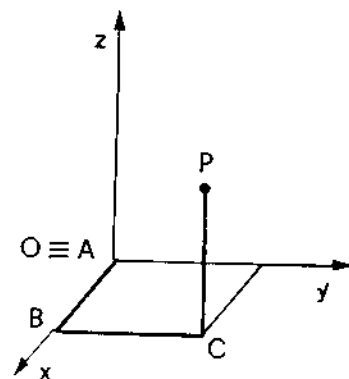
Dal campo di forze al potenziale

Per il calcolo esplicito del secondo membro della [IV.63] può essere comodo e conveniente scegliere come percorso una spezzata costituita da tre segmenti paralleli agli assi coordinati, così come rappresentato nella figura per il caso che il punto di riferimento A sia stato preso coincidente con l'origine.

Il calcolo dell'integrale di linea della [IV.63] può allora essere eseguito così come mostrato nell'esempio che segue.

Esempio

E.IV.20. *Calcolare il potenziale relativo al campo di forze conservativo:*

$$\begin{aligned} f_x &= ax + by \\ f_y &= bx \\ f_z &= cz \end{aligned} \qquad \text{[IV.64]}$$

Che si tratti di un campo di forze conservativo è stato mostrato nell'esempio E.IV.19. Calcoliamo l'integrale [IV.63] lungo la spezzata rappresentata in figura. Si ha:

$$\int_O^{\bar{P}} (f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz) = \int_O^B (f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz) + \int_B^C (f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz) + \int_C^{\bar{P}} (f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz)\,.$$

Per calcolare questi tre integrali, vanno usate le [IV.64] per f_x, f_y, f_z; sostituendo in essi i valori di x, y, z e dx, dy, dz caratteristici dei rispettivi tratti di traiettoria. Si ha precisamente:

Per il tratto OB:

$$\left.\begin{aligned} x &= x \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} dx &= dx \\ dy &= 0 \\ dy &= 0 \end{aligned}$$

dunque:

$$\int_O^B (f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz) = \int_O^{\bar{x}} a\,x\,dx = \frac{1}{2}\,a\,\bar{x}^2$$

Per il tratto BC:

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} = \text{cost} \\ y &= y \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} dx &= 0 \\ dy &= dy \\ dz &= 0 \end{aligned}$$

dunque:

$$\int_B^C (f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz) = \int_O^{\bar{y}} b\,\bar{x}\,dy = b\,\bar{x}\,\bar{y}$$

Per il tratto $C\bar{P}$:

$$\left.\begin{array}{l} x = \bar{x} = \text{cost} \\ y = \bar{y} = \text{cost} \\ z = z \end{array}\right\} \begin{array}{l} dx = 0 \\ dy = 0 \\ dz = dz \end{array}$$

dunque:

$$\int_C^{\bar{P}} (f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz) = \int_0^{\bar{z}} cz\,dz = \frac{1}{2}\,c\bar{z}^2$$

Dunque in definitiva

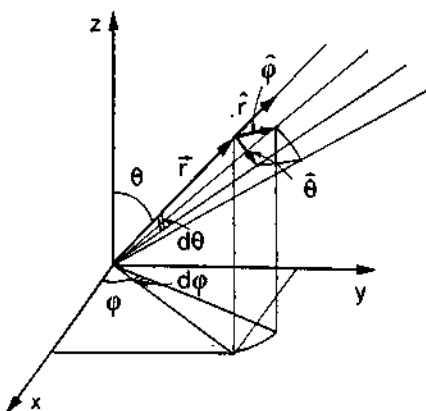
$$V(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - V(0, 0, 0) = \frac{1}{2} a\bar{x}^2 + b\bar{x}\bar{y} + \frac{1}{2}\,c\bar{z}^2$$

ovvero:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} ax^2 + bxy + \frac{1}{2} cz^2 + \text{costante}\,.$$

È immediato verificare che effettuando le derivate parziali di questa funzione si ottengono in effetti le [IV.64], così come richiesto dalle [IV.62].

IV.8.4. *L'operatore gradiente in coordinate cartesiane e polari*

Operatore gradiente

Abbiamo visto che, quando sia noto il potenziale in funzione delle coordinate cartesiane, le componenti della forza secondo i tre assi possono essere facilmente calcolate effettuando le derivate parziali del potenziale stesso secondo le tre coordinate.

Può essere utile, talvolta, trattare il problema in coordinate polari: avendo allora a disposizione l'espressione del potenziale in funzione di r, θ, φ, si dovranno trovare le componenti della forza secondo i versori $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ (vedi figura).

Ciò può essere fatto in maniera compatta introducendo l'*operatore vettoriale gradiente*. L'operatore gradiente, che si indica col simbolo $\vec{\nabla}$, è definito dalla relazione:

$$\vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = dV \qquad \text{[IV.65]}$$

Il gradiente di V è quel vettore che moltiplicando scalarmente per lo spostamento elementare $d\vec{r}$ fornisce il differenziale dV della funzione.

Nel caso che V rappresenti il potenziale di un campo di forze conservativo, essendo (per la IV.60) $dV = dL = \vec{f} \cdot d\vec{r}$, il gradiente di V rappresenta il campo di forze

$$\vec{f} = \vec{\nabla} V \qquad \text{[IV.66]}$$

In coordinate cartesiane, lo spostamento $d\vec{r}$ ha per componenti dx, dy, dz, per cui tenendo conto della definizione [IV.57] del differenziale, la [IV.65] diviene

$$\vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = \nabla_x V \cdot dx + \nabla_y V \cdot dy + \nabla_z V \cdot dz = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz$$

da cui discende, per confronto,

$$\nabla_x V = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad \nabla_y V = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \nabla_z V = \frac{\partial V}{\partial z} \qquad \text{[IV.67]}$$

Componenti cartesiane del gradiente

Le componenti cartesiane del gradiente di una funzione V sono le derivate parziali della funzione stessa rispetto alle tre coordinate.

Nel caso di coordinate polari, il differenziale della funzione $V(r, \theta, \varphi)$ è, secondo la [IV.57]

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\, dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}\, d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\, d\varphi \qquad \text{[IV.68]}$$

Mentre, come si vede in figura, le componenti dello spostamento $d\vec{r}$ sono

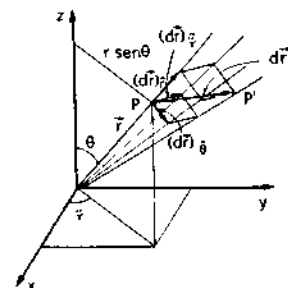
$$(d\vec{r})_{\hat{r}} = dr \qquad (d\vec{r})_{\hat{\theta}} = r\, d\theta \qquad (d\vec{r})_{\hat{\varphi}} = r \sin\theta\, d\varphi \qquad \text{[IV.69]}$$

Introducendo la [IV.68] e la [IV.69] nella [IV.65] si ha:

$$\nabla_r V \cdot dr + \nabla_\theta V \cdot r\, d\theta + \nabla_\varphi V \cdot r \sin\theta\, d\varphi = \frac{\partial V}{\partial r}\, dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}\, d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\, d\varphi$$

da cui per confronto risulta:

$$\nabla_r = \frac{\partial V}{\partial r} \qquad \nabla_\theta V = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \qquad \nabla_\varphi V = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \qquad \text{[IV.70]}$$

che costituiscono la *rappresentazione polare* (o *sferica*) del gradiente. Se V è il potenziale di un campo di forze conservativo, secondo la [IV.66] si ha che le [IV.70] rappresentano *le componenti polari del campo di forze.*

Componenti polari del campo (del gradiente)

IV.9. Il teorema di conservazione dell'energia meccanica

In un campo di forze conservativo, dunque, il lavoro $L_{A,B}$ può essere espresso tramite la [IV.56], cioè come differenza fra i valori che la funzione potenziale V assume in B e in A:

$$L_{AB} = V(B) - V(A)$$

Associando questa relazione con la [IV.42] - valida qualunque sia la natura delle forze agenti - che esprime il teorema dell'energia cinetica, si ha

$$K_B - K_A = V(B) - V(A)$$

ovvero

$$K_A - V(A) = K_B - V(B)$$

Introduciamo ora la funzione $U(x, y, z)$ definita come l'opposto del potenziale ($U = -V$), la precedente relazione diviene

$$K_A + U(A) = K_B + U(B) \qquad \text{[IV.71]}$$

e poiché i punti A e B sono due punti qualunque, questa equivale a scrivere

$$\boxed{K + U = E = \text{costante}} \qquad \text{[IV.72]}$$

Energia potenziale

La funzione delle coordinate $U = -V$ viene detta *energia potenziale* del campo di forze conservativo considerato. La [IV.71] (o l'equivalente [IV.72]) riassume il cosiddetto *teorema di conservazione dell'energia meccanica:*

Teorema di conservazione dell'energia meccanica

per un punto che si muova sottoposto alle sole forze esercitate da un campo conservativo, l'energia meccanica totale E (data dalla somma dell'energia cinetica K e dell'energia potenziale U) resta costante.

In virtù della sua definizione come opposto del potenziale, e in virtù delle [IV.62] e [IV.63], le relazioni che legano l'energia potenziale al campo di forze sono:

$$\left| \begin{aligned} f_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ f_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ f_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right. \qquad \text{[IV.73]}$$

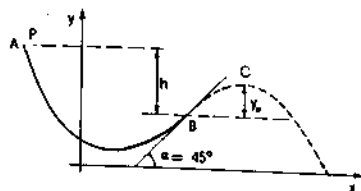
$$U(A) - U(P) = \int_A^P (f_x dx + f_y dy + f_z dz),$$

da cui, per il punto P di coordinate x, y, z si ha:

$$U(x, y, z) = -\int_A^P (f_x dx + f_y dy + f_z dz) + \text{costante} \qquad \text{[IV.74]}$$

Così come accadeva per il potenziale, anche l'energia potenziale è definita a meno di una costante.

Esempio

E.IV.21. *Un punto materiale P è posto, inizialmente fermo, in A; e viene abbandonato alla forza peso lasciandolo scivolare lungo la lamiera sagomata rappresentata in figura, che offre al moto una forza di attrito trascurabile. Calcolare la velocità con cui il punto arriva in B, che si trova più in basso, rispetto al punto A, per un dislivello pari ad h. Calcolare inoltre la quota massima y_0, rispetto a B, raggiunta dal punto P nel vertice C della traiettoria, se nel suo punto estremo la lamiera forma un angolo di 45° con l'orizzontale.*

Oltre alla forza peso, agisce sul punto la reazione vincolare esercitata dalla lamiera; tuttavia questa, in virtù della assenza di attrito, non compie alcun lavoro; cosicché nell'equazione [IV.42] che esprime il teorema dell'energia cinetica compare solo il lavoro della forza peso.

La forza peso $m\vec{g}$, nel sistema di riferimento indicato in figura, ha come componenti:

$$\begin{aligned} m g_x &= 0 \\ m g_y &= -mg \\ m g_z &= 0 \end{aligned}$$

Poiché tutte e tre le componenti sono costanti (indipendenti dalle coordinate) valgono ovviamente le [IV.61] (tutte le derivate parziali sono nulle): la forza peso è dunque conservativa.

L'energia potenziale della forza peso viene facilmente calcolata tramite la [IV.74].

$$U = -\int_A^P m\vec{g}\cdot d\vec{s} = -\int_A^P - mg\,dy = \int_{y_A}^{y} mg\,dy = mgy + \text{costante}$$

Per comodità, scegliamo valore zero per la costante, per cui:

$$U = mgy \qquad \text{[IV.75]}$$

La [IV.71] diviene dunque

$$\frac{1}{2}\,m v_A^2 + mgy_A = \frac{1}{2}\,m v_B^2 + mgy_B\,.$$

Tenuto conto che $v_A = 0$, e che $y_A - y_B = h$, si ricava da questa:

$$v_B^2 = 2\,g\,h \qquad v_B = \sqrt{2\,gh}\,. \qquad \text{[IV.76]}$$

Il punto P arriva dunque in B con la stessa velocità (in modulo) che avrebbe cadendo liberamente per un dislivello pari ad h.

Arrivato in B, il punto materiale comincia a muoversi liberamente sottoposto alla sola forza peso (moto del proiettile): il dislivello y_o potrebbe dunque essere calcolato ricorrendo all'equazione della traiettoria [II.49] (vedi esempio E.II.27), con $v_o = v_B$ e $\alpha = 45°$.

y_o può tuttavia essere calcolato anche usando il teorema di conservazione dell'energia, cioè scrivendo l'equazione [IV.71] fra i punti B e C:

$$\frac{1}{2}\,m v_B^2 + mgy_B = \frac{1}{2}\,m v_C^2 + mgy_C\,. \qquad \text{[IV.77]}$$

Notiamo infatti che:

$$\left.\begin{aligned} v_B^2 &= v_{Bx}^2 + v_{By}^2 \\ v_C^2 &= v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2 \end{aligned}\right| \qquad \text{[IV.78]}$$

Inoltre:

$v_{Bx} = v_{By}$ (essendo $\alpha = 45°$)

$v_{Cx} = v_{Bx}$ (il moto si svolge sotto l'azione della forza peso verticale, per cui la componente x della velocità resta costante)

$v_{Cy} = 0$ (il punto C è il vertice della traiettoria)

per cui in definitiva le [IV.78] ci dicono

$$v_C^2 = v_{Cx}^2 = \frac{1}{2}\,v_B^2\,.$$

Dalla [IV.77] ricaviamo finalmente:

$$y_o = y_C - y_B = \frac{1}{2g}\,(v_B^2 - v_C^2) = \frac{1}{2g}\left(v_B^2 - \frac{1}{2}\,v_B^2\right) = \frac{1}{2}\,\frac{v_B^2}{2g}\,;$$

tenendo conto della [IV.76]

$$y_o = \frac{1}{2}\,h\,.$$

Nella pratica, si presenta frequentemente il caso che sul punto materiale agisca oltre a una forza conservativa f_c (il cui lavoro può essere scritto come $L_c = V(B) - V(A) = U(A) - U(B)$) anche una forza non conservativa f_{nc} (il cui lavoro indichiamo con L_{nc}). La [IV.42] diviene allora

$$K_B - K_A = U(A) - U(B) + L_{nc} \qquad \text{[IV.42.a]}$$

da cui

$$K_B + U(B) = K_A + U(A) + L_{nc}$$

ovvero

$$E_B - E_A = L_{nc}$$

Avendo indicato rispettivamente con E_B ed E_A l'energia meccanica totale posseduta dal punto materiale rispettivamente nello stato finale B e nello stato iniziale A.

Non conservazione dell'energia meccanica in presenza di forze non conservative

Questa relazione mostra che *in presenza di lavoro di forze non conservative l'energia meccanica non si conserva* ($E_B \neq E_A$). Più precisamente, se $L_{nc} > 0$ (forza *attiva* o *motrice*) l'energia meccanica del sistema va aumentando; se invece $L_{nc} < 0$ (forza *dissipativa* o *resistente*), l'energia meccanica va diminuendo.

IV.10. Sistemi a un sol grado di libertà

Sistemi a un sol grado di libertà sottoposti a forze conservative

L'equazione [IV.72], che formalizza il teorema di conservazione dell'energia meccanica valido per un punto materiale mobile in un campo di forze conservativo, rappresenta, dal punto di vista matematico, una equazione differenziale del primo ordine nelle tre funzioni incognite $x(t)$ $y(t)$, $z(t)$. Tenendo conto che

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

la [IV.72] stessa può infatti essere scritta come

$$\frac{1}{2} m \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right) + U(x, y, x) = E \qquad \text{[IV.72]}$$

nella quale il valore della costante E è determinato se sono note le condizioni iniziali (e dunque l'energia cinetica iniziale) e una volta fissato, in maniera peraltro arbitraria, la costante che compare nella [IV.74].

Contrariamente all'equazione [III.5] $\vec{f} = m\vec{a}$, che essendo una equazione vettoriale sintetizza in sé tre equazioni scalari, la [IV.72] non è dunque in generale sufficiente a risolvere il problema del moto (una equazione in tre incognite).

Se tuttavia il punto è vincolato a muoversi lungo una traiettoria prestabilita (di cui siano note le equazioni [IV.49]) allora esso costituisce un sistema a un solo grado di libertà: per specificarne la posizione, basta infatti specificare il valore della variabile h. Sostituendo le [IV.49] nella [IV.72], si ottiene una equazione differenziale del primo ordine nell'unica variabile incognita, la cui soluzione risolve completamente il problema.

È spesso conveniente scegliere, come parametro h, la distanza s fra il punto materiale P e l'origine O misurata lungo la traiettoria: s è detto «*ascissa curvilinea*». In tal caso, tenendo conto che

Ascissa curvilinea

$$v = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|,$$

la [IV.72] può essere scritta come:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + U(s) = E \qquad [IV.79]$$

avendo indicato con $U(s)$ la funzione $U(x(s), y(s), z(s))$ ottenuta inserendo nell'energia potenziale $U(x, y, z)$ le equazioni [IV.49] della traiettoria.

Risolvendo la [IV.79] nella velocità $v = \frac{ds}{dt}$, si ottiene:

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(s))}$$

e separando le variabili e integrando (vedi parte III):

$$\int \frac{ds}{\pm \sqrt{\frac{2(E - U(s))}{m}}} = \int dt = t + \text{cost} \qquad [IV.80]$$

La [IV.80] rappresenta una relazione fra il parametro s e il tempo t, cioè in sostanza la legge del moto.

Osserviamo che le indeterminazioni presenti nella [IV.80] possono essere risolte una volta note le condizioni iniziali. Nota la velocità $\vec{v}_0$ che il punto materiale ha in una posizione s_0 di riferimento, si calcola l'energia E

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + U(s_0) \qquad [IV.81]$$

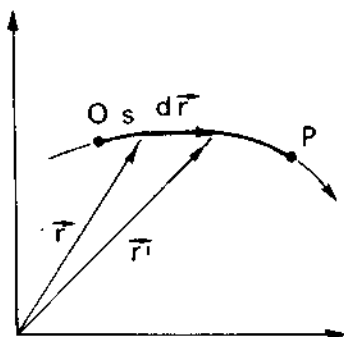
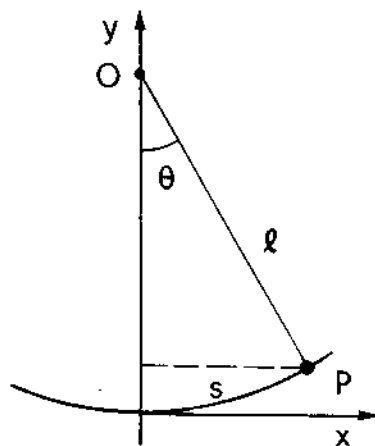
Va notato che la quantità sotto radice $(E - U(s))$ contiene *la differenza* $U(s_0) - U(s)$, e non dipende dunque dalla costante arbitraria a meno della quale è nota l'energia potenziale U (vedi eq. [IV.74]).

La costante che compare al secondo membro della [IV.80] può essere determinata quando sia noto *in quale istante* il punto P passa per la posizione s_0 (o per qualunque altra posizione di riferimento); mentre la conoscenza del *verso* della velocità $\vec{v}_0$ consente di risolvere l'ambiguità di segno al primo membro della [IV.80].

Esempio

E.IV.22. *Usando la [IV.80], ricavare la legge del moto [IV.34] che descrive le piccole oscillazioni di un pendolo semplice.*

L'energia potenziale della forza peso ha l'espressione [IV.75]:

$$U = mgy.$$

L'espressione della variabile y in funzione di s è, come risulta dalla figura:

$$y = l\left(1 - \cos\frac{s}{l}\right)$$

e dunque

$$U(s) = mgl\left(1 - \cos\frac{s}{l}\right) \qquad \text{[IV.82]}$$

Se con s_0 indichiamo l'elongazione massima del pendolo, essendo in corrispondenza nulla la velocità v_0, si ha (secondo la [IV.81]):

$$E = U(s_0) = mgl\left(1 - \cos\frac{s_0}{l}\right) \qquad \text{[IV.83]}$$

Usando la [IV.82] e la [IV.83], la [IV.80] si scrive nel nostro caso:

$$\int \frac{ds}{\pm\sqrt{2gl\left(\cos\frac{s}{l} - \cos\frac{s_0}{l}\right)}} = t + \text{cost} \qquad \text{[IV.84]}$$

D'altra parte, possiamo scrivere

$$\cos\frac{s}{l} = \left(1 - \sin^2\frac{s}{l}\right)^{1/2}$$

e per piccole oscillazioni $\left(\sin\frac{s}{l} \simeq \frac{s}{l}\right)$:

$$\cos\frac{s}{l} \simeq \left(1 - \left(\frac{s}{l}\right)^2\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{l}\right)^2 \qquad \text{[IV.85]}$$

avendo tenuto conto della relazione approssimata [IV.9.a].

Inserendo la [IV.85] nella [IV.84], si ha in definitiva

$$\int \frac{ds}{\pm\sqrt{\frac{g}{l}(s_0^2 - s^2)}} = t + \text{cost}$$

Da cui

$$\int \frac{ds}{\pm\sqrt{(s_0^2 - s^2)}} = \omega t + \text{cost} \qquad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \text{[IV.86]}$$

Eseguendo l'integrale (vedi appendice A) si ottiene:

$$\text{arc sin}\frac{s}{s_0} = \pm(\omega t + \text{cost})$$

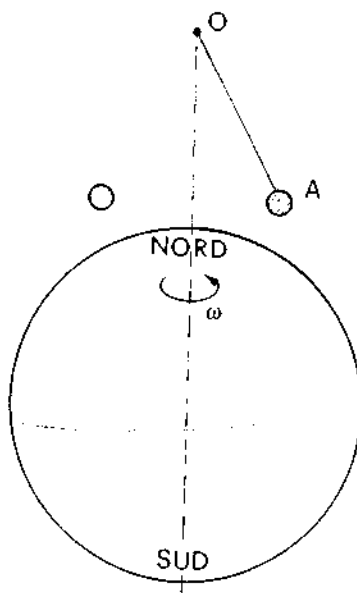
da cui

$$\frac{s}{s_0} = \pm\sin(\omega t + \text{cost})$$

$$s = s_0 \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{[IV.87]}$$

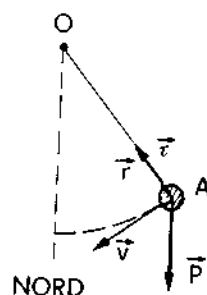
dove la costante φ (da determinarsi in base alle condizioni iniziali), ingloba anche l'ambiguità nel segno.

PENDOLO DI FOUCAULT

Il pendolo di Foucault costituisce una delle prove più evidenti della rotazione terrestre. Foucault eseguì pubblicamente l'esperimento nel 1851 nel Pantheon di Parigi (peraltro l'effetto era già stato evidenziato da Viviani, a Firenze, nel 1661) facendo uso di un pendolo semplice di rilevante lunghezza (varie decine di metri) e massa (qualche decina di kg). Si osserva che, se si realizza l'esperimento nell'emisfero Nord della Terra, il piano di oscillazione del pendolo ruota, se visto dall'alto, in senso antiorario rispetto al laboratorio (da Est ad Ovest, attraverso il Sud), con velocità angolare di precessione che dipende dalla latitudine λ del laboratorio stesso.

Il fenomeno si spiega tenendo conto della rotazione terrestre. Per semplicità, consideriamo un pendolo al polo Nord, con il punto fisso O centrato sull'asse terrestre ed ancorato in modo che il pendolo possa oscillare liberamente in qualsiasi direzione. Studiamo il moto del pendolo in un *sistema* di riferimento *inerziale* con origine nel punto O ed indichiamo con $\vec{P}$ la forza peso (uniforme e praticamente verticale verso il basso) e con $\vec{\tau}$ la tensione del filo del pendolo. In questo sistema si ha:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\tau}$$

e risulta che il piano di oscillazione del pendolo è fisso nel tempo. Infatti, supponiamo di dare inizio a piccole oscillazioni partendo da uno stato iniziale in cui la massa è scostata dalla posizione di equilibrio (verticale Nord-Sud) e lasciata andare da ferma rispetto al laboratorio solidale alla Terra, in cui si può immaginare che l'esperimento si esegua: così si ha velocità relativa iniziale nulla. Inoltre, poiché le oscillazioni considerate sono molto piccole, lo scostamento dall'asse terrestre è anche piccolo e così la velocità di trascinamento relativamente al sistema può essere trascurata. Dunque la velocità iniziale assoluta $\vec{v}_{in}$ è praticamente nulla. Dimostriamo allora che i vettori $\vec{v}$, $OA = \vec{r}$ e $\vec{P}$ sono sempre complanari. Per questo moltiplichiamo scalarmente ambo i membri dell'equazione del moto per il vettore $(\vec{r} \times \vec{P})$:

$$(\vec{r} \times \vec{P}) \cdot m\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{r} \times \vec{P}) \cdot \vec{P} + (\vec{r} \times \vec{P}) \cdot \vec{\tau}\,.$$

I due addendi del secondo membro sono entrambi nulli perché $(\bar{r}\times\bar{P})\perp\bar{P}$ e $(\bar{r}\times\bar{P})\perp\bar{\tau}$ perché $\bar{r}\,//\,\bar{\tau}$. Pertanto si ha:

$$\frac{d\bar{v}}{dt}\cdot(\bar{r}\times\bar{P}) = 0\,,$$

da cui segue:

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{v}\cdot(\bar{r}\times\bar{P})\right] = \frac{d\bar{v}}{dt}\cdot(\bar{r}\times\bar{P}) + \bar{v}\cdot(\bar{v}\times\bar{P}) + \bar{v}\cdot\left(\bar{r}\times\frac{d\bar{P}}{dt}\right) = 0\,,$$

dal momento che $(\bar{v}\times\bar{P})\perp\bar{v}$ e $\dfrac{d\bar{P}}{dt} = 0$ perché $\bar{P} = \bar{\text{cost}}$.

Si ottiene dunque:

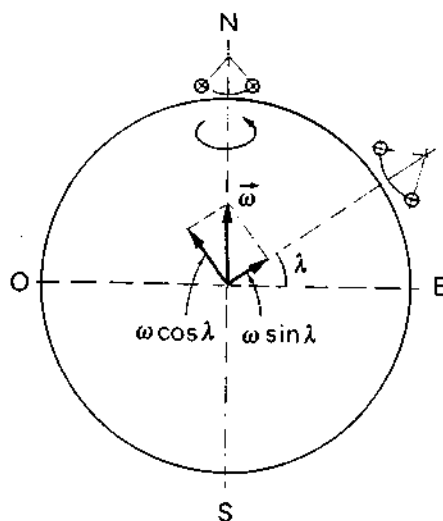
$$\bar{v}\cdot(\bar{r}\times\bar{P}) = \text{costante} = 0 \quad (\text{perché } \bar{v}_{in} = 0),$$

e quindi

$$\bar{v}\perp(\bar{r}\times\bar{P})$$

durante tutto il moto.

Pertanto i vettori $\bar{v}$, $\bar{r}$ e $\bar{P}$ sono sempre complanari ed il moto avviene in un piano fisso rispetto al sistema di riferimento inerziale scelto.

Al polo Nord, rispetto al sistema di riferimento inerziale, il piano di oscillazione è fisso ed il suolo terrestre gli ruota sotto. Per un osservatore solidale alla Terra il piano del pendolo ruota in senso orario con la velocità angolare ω della Terra e quindi con un periodo di 24 ore.

Se il pendolo si trova alla latitudine λ, si può ripetere il ragionamento sviluppato nel caso di pendolo al polo Nord, salvo che ora la componente di velocità angolare che interessa è quella radiale, il cui modulo è $(\omega\,\text{sen}\,\lambda)$.

Agli stessi risultati si perviene trattando il problema da un sistema di riferimento non inerziale solidale con la Terra. In questo caso l'equazione del moto si scrive tenendo conto delle forze fittizie:

$$\bar{P}+\bar{\tau}-2\,m\,\vec{\omega}\times\bar{v} = m\frac{d\bar{v}}{dt}$$

dove si è trascurato il termine d'inerzia in ω^2 e dove appare evidente che l'effetto di rotazione è imputabile alla forza di Coriolis.

IV.11. Condizioni di equilibrio per un punto materiale ed energia potenziale

Posizioni di equilibrio

Nel paragrafo III.3 abbiamo anticipato che le *posizioni di equilibrio* vengono definite in termini cinematici, cioè descrittivi: una posizione si dice di equilibrio se ponendo in essa il punto, inizialmente in quiete, esso permane indefinitamente in quiete.

Condizioni dinamiche per l'equilibrio

Benché la definizione di equilibrio sia cinematica, è però importante chiedersi quali siano le *condizioni dinamiche* per l'equilibrio stesso: quali siano cioè le condizioni cui devono soddisfare le forze che agiscono su un punto materiale affinché esso si trovi in equilibrio.

In linea di principio, tali condizioni si esprimono in termini assai semplici. Ponendo un punto materiale fermo ($\vec{v} = 0$) in una certa posizione, affinché esso resti fermo è necessario che la sua velocità resti costante; esso deve dunque avere accelerazione nulla ($\vec{a} = 0$), e affinché ciò accada *deve essere nullo*, in virtù della [III.5], *il risultante delle forze su di esso agenti.*

Tuttavia questa condizione dinamica, benché teoricamente ineccepibile, ha scarsa aderenza pratica con le posizioni di equilibrio effettivamente interessanti; o se vogliamo, con le posizioni di equilibrio effettivamente rispondenti alla definizione cinematica che abbiamo più sopra dato. Consideriamo, ad esempio, una sfera di materiale rigido, ad esempio di acciaio. Se disponiamo sul suo vertice V (cioè sulla posizione della superficie sferica appartenente alla verticale passante per il centro O), un punto materiale P, per esso la condizione dinamica per l'equilibrio risulta soddisfatta: la forza peso $m\vec{g}$ è infatti equilibrata dalla reazione vincolare, verticale e diretta verso l'alto, esercitata dalla sfera. Tuttavia se poniamo effettivamente il punto materiale P sul vertice, riscontriamo che esso non si mantiene in equilibrio: disponendolo in V inizialmente fermo, esso cade quasi subito. Ciò è dovuto al fatto che la condizione dinamica per l'equilibrio è soddisfatta solo in un punto geometrico (V); ma appena il punto si allontana da V, anche di pochissimo (cosa che prima o poi, a causa di qualche perturbazione, certamente accade), il risultante delle forze che viene ad agire sul punto P tende ad allontanarlo sempre più dalla posizione di equilibrio.

Per meglio adeguare la definizione di equilibrio alle esigenze pratiche, si fa distinzione fra tre possibili tipi di equilibrio:

a) *posizione di equilibrio stabile*. È una posizione S tale che, allontanando da essa di abbastanza poco il punto materiale, esso tende a ritornarvi. Dal punto di vista dinamico, ciò significa che il risultante delle forze, nullo in S, in una regione intorno ad S è orientato verso S stesso («forze di richiamo»).

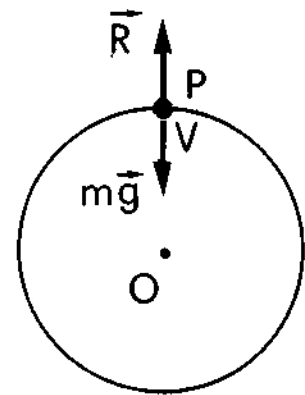
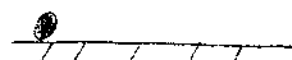
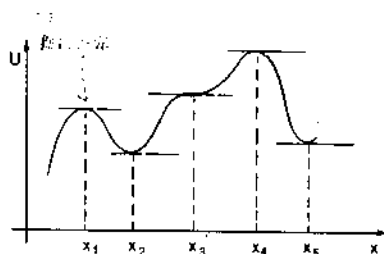
Equilibrio stabile

b) *posizione di equilibrio instabile*. È una posizione I tale che, per quanto poco si allontani da essa il punto materiale P, esso tende ad allontanarsene sempre più. Dal punto di vista dinamico, ciò significa che il risultante delle forze, nullo in I, è diretto in senso opposto (o comunque diverso) rispetto al vettore PI.

Equilibrio instabile

c) *posizione di equilibrio indifferente*. È una posizione di equilibrio N disposta all'interno di una regione di spazio tutta costituita da punti di equilibrio. Il risultante delle forze è nullo non solo in N, ma anche negli altri punti della regione circostante.

Equilibrio indifferente

Qualora il punto materiale sia immerso in un campo di forze conservativo, le condizioni dinamiche per i vari tipi di equilibrio si esprimono in maniera efficace e compatta in termini di condizioni sull'energia potenziale.

Cominciamo col considerare il caso in cui il punto materiale si muova lungo una traiettoria prestabilita, così da costituire un sistema con un solo grado di libertà: chiamiamo x l'unico parametro necessario a descrivere il moto, e sia $U(x)$ l'energia potenziale, di cui indichiamo in figura l'ipotetico andamento in funzione di x. Secondo la [IV.73], la componente della forza nella direzione x è data da:

$$f_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \text{[IV.73.a]}$$

Le posizioni di equilibrio ($f_x = 0$) sono quelle in cui $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, cioè quelle in cui la tangente alla funzione $U(x)$ sono orizzontali: nell'esempio di figura, ciò accade in x_1, x_2, x_3, dove la $U(x)$ ha rispettivamente un punto di massimo, di minimo e di flesso (dove la tangente alla curva interseca la curva stessa). Questi punti, dove la tangente è orizzontale, si dicono punti di stazionarietà.

Intorno a x_1 la forza è *repulsiva*. Infatti per $x < x_1$, $\frac{\partial U}{\partial x} > 0$ (U è crescente); pertanto per la [IV.73.a] $f_x < 0$, cioè è opposta all'asse delle x, e dunque tende ad allontanare il punto materiale della posizione x_1. Per $x > x_1$, risulta viceversa $f_x > 0$; e dunque ancora la forza tende ad allontanare il punto dalla posizione x_1.

Un punto di massimo per l'energia potenziale è dunque un punto di equilibrio instabile.

Minimi dell'energia potenziale: equilibrio stabile

Con ragionamento del tutto analogo si conclude che *un punto in cui l'energia potenziale è minima rappresenta una posizione di equilibrio stabile.*

Intorno a una posizione di flesso, la forza risulta attrattiva da una parte (nell'esempio di figura, per $x > x_3$); ma repulsiva dall'altra parte (per $x < x_3$); e ciò è sufficiente perché la posizione di equilibrio risulti instabile.

Infine, affinché un certo intervallo rappresenti una zona di equilibrio indifferente, deve essere su tutto quell'intervallo $0 = f_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, cioè la funzione potenziale deve essere costante in quell'intervallo.

Analoghi ragionamenti possono essere fatti nel caso generale di un punto che si muove liberamente nello spazio sottoposto a un campo conservativo la cui energia potenziale sia $U = U(x, y, z)$. Le posizioni di equilibrio sono quelle in cui le tre componenti del campo di forze siano nulle, e ciò comporta che sia

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0\,; \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0\,; \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0\,.$$

Fra le posizioni in cui queste tre condizioni sono soddisfatte, solo *le posizioni che rappresentano dei minimi per l'energia potenziale sono posizioni di equilibrio stabile*

Sono posizioni di equilibrio indifferente quelle posizioni circondate da un dominio all'interno del quale l'energia potenziale sia stazionaria (costante).

Tutte le altre posizioni di stazionarietà (quelle che rappresentano massimi del potenziale, o quelle in cui il piano tangente interseca la curva $U(x, y, z)$) sono posizioni di equilibrio instabile.

Queste conclusioni valgono anche nel caso che sul punto materiale agisca, oltre al campo di forza conservativo, anche una forza di attrito che si oppone al movimento (cioè con direzione sempre opposta alla velocità).

IV.12. La potenza

Potenza

Consideriamo un sistema fisico S che, esercitando delle forze su un sistema materiale M in movimento, compie lavoro L.

Si definisce come *potenza* W erogata a un certo istante dal sistema S *il rapporto in quell'istante fra il lavoro elementare e il tempo elementare in cui esso è stato svolto.*

Se indichiamo con ΔL il lavoro che il sistema S compie nell'intervallo di tempo compreso fra t e $t + \Delta t$, si ha dunque

$$W = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{dL}{dt} \qquad \text{[IV.88]}$$

Nel caso particolare che il sistema materiale M che subisce il lavoro sia un punto materiale, se $d\vec{s}$ è lo spostamento elementare che il punto compie nel tempo elementare dt e $\vec{f}$ il risultante delle forze che agiscono sul punto stesso, si ha:

$$dL = \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

per cui

$$W = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{f} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} \qquad \text{[IV.89]}$$

dove $\vec{v}$ è la velocità del punto. *La potenza che a un certo istante agisce su un punto materiale in movimento è pari al prodotto scalare fra il risultante $\vec{f}$ delle forze che agiscono sul punto e la velocità $\vec{v}$ del punto stesso.*

Watt

La potenza W ha le dimensioni di un lavoro diviso un tempo; nel sistema metrico internazionale S.I. essa si misura in *watt* W (un watt è pari a un Joule al secondo: 1 W = 1 Joule/s). Una unità di misura molto spesso usata nella pratica è anche il *cavallo vapore* Hp, pari a 735 watt: 1 Hp = 735 W = 0,735 kW.

Cavallo vapore

Esempio

E.IV.23. *Una automobile pesa 800 kg. Calcolare la potenza che deve erogare il motore per imprimere all'auto una accelerazione $a = 3\ m/s^2$ alla velocità di 36, 72 e 108 Km/h.*

La forza esercitata dal motore è parallela alla velocità; dalla [IV.89] si ha pertanto: $W = \vec{f} \cdot \vec{v} = f\text{v} = ma\text{v} = 800\ \text{Kg} \cdot \frac{3\ \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{v}$. In corrispondenza delle tre velocità considerate (pari rispettivamente a 10, 20 e 30 m/s, si ha:

$W_1 = 800 \cdot 3 \cdot 10\ \text{W} = 24.000\ \text{W} = 24\ \text{kW} \simeq 32{,}5\ \text{Hp}$ a 36 Km/h

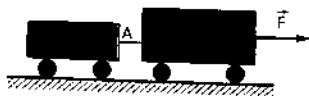
$W_2 = 800 \cdot 3 \cdot 20\ \text{W} = 48.000\ \text{W} = 48\ \text{kW} \simeq 65{,}0\ \text{Hp}$ a 72 Km/h

$W_3 = 800 \cdot 3 \cdot 30\ \text{W} = 72.000\ \text{W} = 72\ \text{kW} \simeq 97{,}5\ \text{Hp}$ a 108 Km/h

Esercizi del capitolo IV

IV.1. Un corpo puntiforme di massa $m = 0,2$ kg si muove su traiettoria rettilinea con velocità $v(t) = a + bt$, con a e b costanti ($a = 1$ m/s; $b = 0,5$ m/s^2). Quanto vale la forza applicata al corpo? (Risposta: 0,1 N)

IV.2. Un corpo puntiforme è inizialmente fermo all'origine di un sistema di riferimento cartesiano piano. Una forza $\vec{F} = (3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})\,N$ agisce sul punto (avendo indicato con $\hat{\imath}$ ed $\hat{\jmath}$ i versori degli assi coordinati) e, nell'intervallo di tempo $t = 5$ s, ne causa lo spostamento fino al punto P(125 m; 83,3 m). Calcolare la massa del corpo. (Risposta: 0,3 kg)

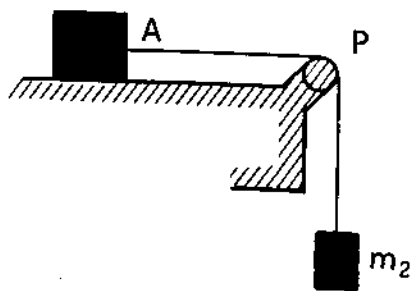
IV.3. Un corpo di massa $m = 10$ kg si sta muovendo su una traiettoria orizzontale con velocità $v_o = 3$ m/s, quando una forza f costante inizia ad agire in verso opposto al movimento fino a fermare completamente il corpo in 10 s. Quanto vale l'impulso della forza nei 10 s in cui agisce? Qual è il valore della forza? (Risposte: $-30\ N \cdot s$; $-3\ N$)

IV.4. Una forza orizzontale costante $F = 10\,N$ trascina due carrelli, di massa $M = 1$ kg ed $m = 2$ kg rispettivamente, collegati da un filo inestensibile e di massa trascurabile. I carrelli si muovono su un binario orizzontale. Nell'ipotesi che ogni altra forza sia trascurabile, calcolare la forza F che il filo esercita sul punto A (gancio) del carrello di massa m.

(Risposta: 1,67 N)

IV.5. Un'automobile di massa $M = 1000$ kg viaggia su una strada rettilinea orizzontale alla velocità v = 100 km/h. Quale forza frenante costante è necessario applicare all'auto perché si fermi in 100 m? (Risposta: 3858 N)

IV.6. Un corpo si muove con velocità $v_o = 10$ m/s, quando inizia a salire lungo la linea di massima pendenza di un piano inclinato liscio, che forma un angolo $\alpha = 30°$ con l'orizzontale. Tenendo conto del fatto che il piano inclinato, essendo liscio (cioè privo di attrito) non esercita sul corpo forze tangenziali, calcolare la distanza l percorsa dal corpo sul piano inclinato, prima di arrivare ad annullare la sua velocità. Calcolare anche la velocità con cui torna a transitare per il punto di partenza, alla base del piano inclinato.

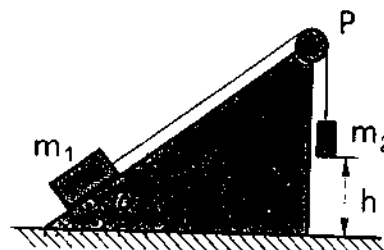
(Risposte: 10,2 m; 10 m/s)

IV.7. Un corpo è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito ed è inizialmente in quiete. Ad un certo istante sul corpo agisce una forza impulsiva orizzontale di brevissima durata ($\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}\,s$). Dopo questo colpo, il corpo si muove con velocità v = 20 m/s. Calcolare, in modo approssimato, di quanto si sposta il corpo nell'intervallo di tempo $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}\,s$ in cui la forza impulsiva agisce sul corpo. (Risposta: 2 cm)

IV.8. Un uomo lancia un sasso di massa $m = 0,2$ kg, verticalmente verso l'alto imprimendogli, con il braccio, una forza costante per un decimo di secondo. Il sasso arriva ad una quota $h = 10$ m, rispetto al punto di distacco dalla mano dell'uomo, prima di iniziare a ricadere al suolo. Calcolare il valore della forza applicata dall'uomo al sasso, nella ipotesi che sia trascurabile la resistenza dell'aria.

(Risposta: 30 N)

IV.9. Un corpo di massa $m_1 = 1$ kg è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito e, tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile, disposto come in figura, è trascinato lungo il piano da un corpo di massa $m_2 = 0,5$ kg sottoposto alla forza di gravità. Nel dispositivo considerato, il filo passa sopra un piolo P liscio e fissato al piano. Calcolare l'accelerazione con cui si muove il corpo m_1 e la tensione del filo. (Risposte: 3,27 m/s^2; 3,27 N)

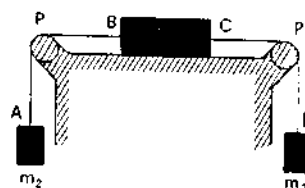
IV.10. Un piano liscio, inclinato di $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale, termina verso l'alto con un piolo liscio, su cui può scorrere, senza attrito, un filo inestensibile e di massa trascurabile, che collega la massa $m_1 = 2$ kg con la massa $m_2 = 4$ kg. Inizialmente il sistema è in quiete e da questa situazione inizia a muoversi sotto l'azione della gravità. Ad un certo istante la massa m_2 urta il suolo, dopo essere scesa di un tratto verticale $h = 2$ m. Calcolare lo spostamento totale della massa m_1 lungo il piano inclinato, dal momento in cui inizia a muoversi al momento in cui arriva alla massima quota.

(Risposta: 2 m)

IV.11. Con una normale bilancia a molla tarata, una persona si pesa in un ascensore che sale con accelerazione verticale $a = 2$ m/s^2. Se la bilancia indica un peso di 100 kgp, quanto indicherebbe se la pesata fosse fatta a terra?

(Risposta: 83 kgp)

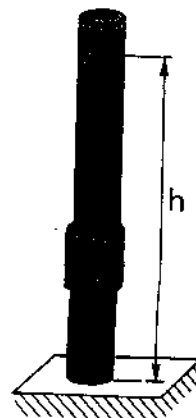
IV.12. Tre blocchi di massa m_1, m_2 ed m_3 sono disposti come indicato in figura. Il piano su cui si muove m_3 è orizzontale e privo di attrito. I pioli P su cui slittano i fili di collegamento tra le masse non offrono attrito tangenziale. I fili sono inestensibili e di massa trascurabile. Calcolare l'accelerazione con cui si muovono le masse, la tensione τ_1 del tratto di filo CD e la tensione τ_2 del tratto di filo AB.

($m_1 = 2$ kg; $m_2 = 1$ kg; $m_3 = 3$ kg)

(Risposte: 1,63 m/s^2; 16,3 N; 11,4 N)

Forza di attrito cinematico

IV.13. Una forza di attrito dinamico si manifesta quando un corpo si muove a contatto con un corpo esterno (per esempio quando un corpo si muove strisciando su un piano). Schematizzando l'*attrito* come una forza costante in modulo e diretta sempre in *verso contrario allo spostamento*, risolvere il seguente problema.

Un manicotto cilindrico di massa $m = 0{,}3$ kg può scorrere a contatto con un'asta cilindrica verticale. Per effetto di una forza impulsiva (di durata praticamente trascurabile) il manicotto, inizialmente fermo alla base dell'asta, viene lanciato verso l'alto e raggiunge una quota massima $h = 3$ m. Successivamente il manicotto ricade al suolo e lo raggiunge con una velocità $v = 5$ m/s. Calcolare il valore I dell'impulso della forza di lancio.

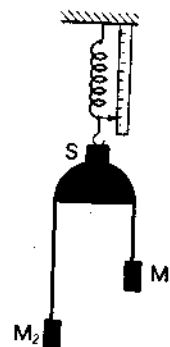
(Risposta: 2,89 $N\,s$)

IV.14. Su un corpo di massa m, inizialmente fermo, viene applicata, per un intervallo di tempo che va da $t = 0$ (istante iniziale) a $t = t^*$, una forza di direzione e verso costanti, il cui modulo dipende dal tempo secondo la legge $F = F_0 \operatorname{sen} \alpha t$, dove F_0 ed α sono costanti.

Calcolare il lavoro compiuto dalla forza nell'intervallo di tempo considerato.

$$\left(m = 1 \text{ kg}; \quad t = \frac{1}{6}\, s; \quad F_0 = 10\, N; \quad \alpha = \pi\, s^{-1}\right)$$

(Risposta: 1,26 J)

IV.15. Il sistema mostrato in figura consta di due masse $M_1 = 10$ kg ed $M_2 = 6$ kg, collegate da un filo inestensibile e di massa trascurabile, che può scorrere senza attrito su un supporto semicilindrico S di massa $M_s = 1$ kg. L'intero sistema è sostenuto da un dinamometro ancorato ad un sostegno fisso. Mentre le masse M_1 ed M_2 si muovono per effetto della forza peso, quale forza misura il dinamometro?

(Risposta: ~ 157 N)

IV.16. Un corpo puntiforme di massa $m = 1$ kg si muove su traiettoria rettilinea lungo l'asse x per effetto di una forza conservativa di energia potenziale $U(x)$ data dalla relazione:

$$U(x) = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x} \quad \text{con } A = 10\ \text{J} \cdot m^2 \text{ e } B = 5\ \text{J} \cdot m\,,$$

Graficare la funzione $U(x)$ per $x > 0$ e, sapendo che il massimo valore che assume la velocità del corpo è $v_{MAX} = 3$ m/s, calcolare l'energia meccanica totale E del corpo e la forza sul corpo quando la velocità è massima.
(Risposte: 3,87 J; 0 *N*)

IV.17. Un punto materiale si muove su traiettoria rettilinea (asse x) per effetto di una forza conservativa la cui energia potenziale è $U(x) = Ax^2 - Bx^4$ con $A = 10\ \text{J/m}^2$ e $B = 2\ \text{J/m}^4$.
Graficare la giunzione $U(x)$. Individuare le posizioni di equilibrio nella parte positiva dell'asse x. Di che tipi di equilibrio si tratta?
(Risposte: $x = 0$; $x = 1{,}58$ m)

IV.18. Un punto materiale di massa $m = 2$ kg si muove su una traiettoria rettilinea (asse x) essendo sottoposto ad una forza conservativa di energia potenziale $U(x) = Ax^2$. Se il punto passa per l'origine con velocità $v_o = 4$ m/s, diretta verso la parte positiva dell'asse x, dove si ferma?
($A = 4\ \text{J/m}^2$) (Risposta: $x = 2$ m)

IV.19. Un punto materiale di massa $m = 0{,}2$ kg si muove lungo l'asse x per effetto di una forza conservativa di energia potenziale $U(x) = \alpha x$, con $\alpha = 1$ J/m. Se il punto viene lasciato andare da fermo nella posizione di ascissa $x^* = 2$ m, con quale velocità passa per l'origine dell'asse x? (Risposta: 4,47 m/s)

Forze intermolecolari

IV.20. La forza tra due molecole dipende dalla loro mutua distanza ed è descritta dall'energia potenziale (di Lennard-Jones):

$$U(r) = A\left[\left(\frac{B}{r}\right)^{12} - \left(\frac{B}{r}\right)^{6}\right]$$

dove A e B sono costanti ed r è la distanza tra le due molecole. Calcolare la distanza di equilibrio r_o, sapendo che $B = 3 \cdot 10^{-10}$ m.
(Risposta: $3{,}37 \cdot 10^{-10}$ m)

IV.21. L'energia potenziale di un campo di forze conservativo è, in un riferimento cartesiano, $U(x, y, z) = -x^2 - xy + z^2$. Nel punto $P(1, 0, 0)$, qual'è l'angolo formato dalla forza con l'asse x? (Risposta: 26.6°)

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo IV

IV.1. Dalla velocità ricavare l'accelerazione. Poi applicare il secondo principio della dinamica.

IV.2. Applicare la relazione vettoriale che rappresenta il secondo principio della dinamica nel sistema di riferimento scelto. Per successive integrazioni, ricavare lo spostamento in funzione del tempo e, da questo, la massa.

IV.3. È conveniente usare il teorema dell'impulso.

IV.4. Dal punto di vista della forza F il sistema dei due carrelli può essere considerato come un singolo corpo di massa $(m + M)$. La forza F_A, invece, può essere considerata come l'unica responsabile del moto del singolo carrello di massa m

IV.5. È conveniente usare il teorema dell'energia cinetica.

IV.6. Applicare il teorema dell'energia cinetica, sia alla fase di salita (ricavando l), sia alla fase di discesa (ricavando v_f).

IV.7. L'approssimazione consiste nel considerare attiva una forza impulsiva media nell'intervallo di tempo Δt. Utilizzare le proprietà dell'impulso e del lavoro.

IV.8. Dalla conoscenza della quota si ricava la velocità di lancio. Supponendo costante la forza esercitata dall'uomo sul sasso durante il lancio, applicare il teorema dell'impulso per ricavare la forza.

IV.9. Considerare il moto delle masse m_1 ed m_2 come se fossero dei corpi singoli. La tensione del filo corrisponde alla forza che il filo esercita sulle masse nei punti di collegamento alle stesse.

IV.10. Il moto di salita di m_1 si svolge in due fasi, una con accelerazione positiva ed una con accelerazione negativa. Il calcolo dello spostamento di m_1 è facilitato dall'uso del teorema dell'energia cinetica.

IV.11. La bilancia è situata in un sistema di riferimento non inerziale e misura la risultante delle forze (reali e fittizie) applicate alla persona.

IV.12. È conveniente, mediante la schematizzazione di corpo singolo, ridursi all'analisi di tre problemi di dinamica del punto, relativi alle masse m_1, m_2 ed m_3 rispettivamente.

IV.13. È conveniente applicare il teorema dell'energia cinetica alle fasi di salita e discesa, facendo attenzione ai segni del lavoro della forza peso e del lavoro dell'attrito. Utilizzare anche il teorema dell'impulso.

IV.14. Occorre calcolare la velocità del corpo in funzione del tempo. Successivamente calcolare il lavoro, per esempio tramite il teorema dell'energia cinetica.

IV.15. Le azioni meccaniche che le masse M_1 ed M_2 trasmettono sul supporto sono descritte tramite la tensione del filo. Per il supporto S si tratta di situazioni di equilibrio.

IV.16. Utilizzare il teorema di conservazione dell'energia meccanica $T + U = E$ ed osservare che, laddove T è massimo, U è minimo.

IV.17. L'equilibrio corrisponde a situazioni di massimo o minimo di $U(x)$.

IV.18. Si conserva l'energia meccanica totale: $T + U = E$.

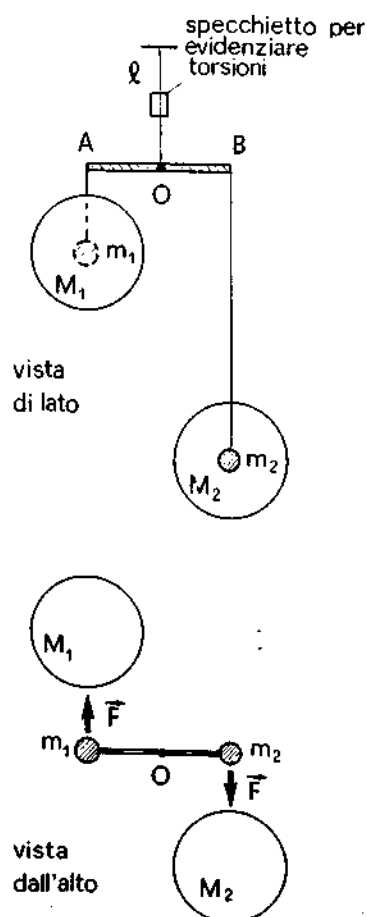
IV.19. Procedere come nel problema IV.18.

IV.20. L'equilibrio si ha per una distanza r_o per la quale sia nulla la derivata dell'energia potenziale.

IV.21. Calcolare le componenti cartesiane della forza nel punto P e da queste ricavare l'angolo richiesto.

Capitolo quinto

Le leggi delle forze

Bilancia di torsione

Nel paragrafo III.7 abbiamo anticipato come le leggi delle forze siano riconducibili a pochi principi fondamentali. In effetti, tutte le forze che si manifestano nei fenomeni meccanici sono praticamente riconducibili alla gravitazione o ad azioni elettromagnetiche; oltreché, naturalmente, a forze apparenti (vedi par. III.8) quando per un motivo o per l'altro il moto venga descritto in un sistema di riferimento non inerziale.

Le azioni elettromagnetiche che si esercitano fra oggetti che siano dotati di carica elettrica o di magnetizzazione, o che siano sede di correnti elettriche, verranno trattate nel volume dedicato all'elettromagnetismo.

Abbiamo già accennato, tuttavia, che azioni elettromagnetiche sono presenti anche fra oggetti elettricamente neutri, e privi di correnti elettriche, a causa del fatto che le cariche elettriche positive e quelle negative all'interno di un oggetto macroscopico sono dislocate - a livello microscopico - in posizioni diverse.

La trattazione di queste forze potrebbe, in linea di principio, essere ricondotta alla interazione fra i costituenti microscopici, elettricamente carichi, della materia: tuttavia, per la maggior parte dei fini pratici è conveniente ricorrere a una descrizione fenomenologica, che consente di esprimere le forze in termini approssimati, mediante parametri macroscopici.

In questo capitolo, oltre alla forza gravitazionale, discuteremo la fenomenologia di due importanti categorie di forze la cui natura è riconducibile, a livello microscopico, ad interazioni elettromagnetiche: le cosiddette *forze elastiche*, e le *forze di attrito*. Altre forze della stessa natura (*forze di pressione* nei liquidi; fenomeni di *attrito interno* nei fluidi in movimento; e le forze di *resistenza del mezzo* che un fluido esercita nel moto di oggetti in esso immersi) verranno discusse nel capitolo dedicato alla meccanica dei fluidi in questo stesso volume. Mentre le forze di pressione esercitate dai gas, e la loro relazione con i fenomeni termici, verranno discusse nel volume dedicato alla termodinamica.

V.1. Le leggi della gravitazione universale

Storicamente, le nostre conoscenze a proposito della forza di gravitazione si sono sviluppate a partire da osservazioni astronomiche relative al moto dei pianeti. Queste misure cinematiche, riassunte da Keplero in tre sintetiche leggi, furono il punto di partenza dei ragionamenti che portarono Newton a formulare il secondo principio della dinamica (eq. III.5), e ad ipotizzare l'espressione corretta per la forza di gravitazione che mutuamente si esercita fra due masse puntiformi. Solo più tardi l'ipotesi di Newton fu confortata anche da misure dinamometriche statiche eseguite in laboratorio.

Noi qui, tuttavia, procederemo all'inverso. Enunceremo in questo paragrafo la legge della forza gravitazionale immaginando che essa sia stata dedotta da misure statiche di forze eseguite in laboratorio; e discuteremo le proprietà che discendono da tale legge. Nel paragrafo V.3. enunceremo le leggi (cinematiche) di Keplero, e vedremo che esse sono coerenti con la legge che esprime la forza di gravitazione universale.

Dato dunque un oggetto puntiforme di massa M mantenuto fisso nel laboratorio, poniamo in sua presenza un secondo oggetto puntiforme di massa m. Prendiamo un sistema di riferimento con origine nella posizione occupata da M; sia $\vec{r}$ il vettore posizione della massa m. Disponendo di un dinamometro dotato di grande sensibilità, si riscontra che la massa m subisce ad opera di M una forza di attrazione $\vec{f}$. La forza $\vec{f}$ risulta proporzionale alla massa m, e dipende dalla posizione $\vec{r}$ di m rispetto a M:

$$\vec{f} = \vec{g}(\vec{r}) \cdot m \qquad \text{[V.1]}$$

Il vettore $\vec{g}(\vec{r}) = \vec{f}/m$ rappresenta la forza che la massa M esercita sulla massa unitaria situata in $\vec{r}$: esso viene detto *campo della forza gravitazionale* esercitata da M, e il suo valore dipende dalla posizione $\vec{r}$. Essendo la forza attrattiva, la direzione di $\vec{g}$ è uguale e di verso opposto rispetto ad $\vec{r}$; mentre il suo modulo risulta proporzionale alla massa M e inversamente proporzionale al quadrato della distanza r fra le due masse:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\hat{r} \qquad \text{[V.2]}$$

dove $\hat{r}$ indica il versore di $\vec{r}$.

G, detta *costante di gravitazione universale*, ha valore pari a

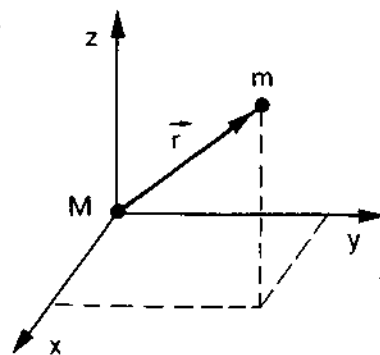
$$G = 6{,}66 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{\text{kg}^2}.$$

La costante G non dipende dal materiale di cui le masse m ed M sono costituite, né da un eventuale mezzo (fluido) in cui esse siano immerse. In virtù della [V.2], la forza $\vec{f}$ (eq. [V.1]) che la massa m subisce ad opera di M può essere scritta come

$$\vec{f} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \qquad \text{[V.3]}$$

La forza gravitazionale $\vec{f}$ è dunque una forza *radiale* (o *centrale*): in coordinate polari, l'unica componente diversa da zero è quella secondo $\hat{r}$, mentre

La bilancia di torsione, usata da Cavendish, consta di un filo l, capace di reazioni elastiche alla torsione (evidenziabile con opportuna amplificazione ottica), che sostiene un equipaggio AB al quale sono appese, a quote notevolmente diverse, due masse sferiche uguali m_1 ed m_2.
Due grosse masse M_1 ed M_2, uguali tra loro, sono poste in vicinanza di m_1 ed m_2 rispettivamente. Il dislivello tra m_1 ed m_2 ha lo scopo di rendere prevalenti le interazioni di M_1 su m_1 e di M_2 su m_2, rispetto alle interazioni di M_1 su m_2 e di M_2 su m_1. Per la disposizione geometrica scelta, sull'equipaggio della bilancia di torsione si esercita una coppia di forze che produce una torsione del filo, dalla quale si risale al valore delle forze e della costante G [V.2].

Campo della forza gravitazionale

Costante di gravitazione universale

Legge di gravitazione universale

sono nulle le componenti secondo $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ (i versori $\hat{r}$, $\hat{\theta}$,$\hat{\varphi}$ sono stati definiti nel par. IV.8.4):

$$f_r = -\frac{GMm}{r^2}; \quad f_\theta = 0; \quad f_\varphi = 0 \qquad [V.4]$$

In coordinate cartesiane, le componenti f_x, f_y, f_z della forza gravitazionale possono essere immediatamente ricavate dalla [V.4] tenendo conto che $r = \sqrt{x^2 + x^2 + z^2}$ e che le componenti di $\vec{r}$ sono rispettivamente x, y, z. Si ottiene:

$$f_x = -\frac{GMmx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad f_y = -\frac{GMmy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
$$f_z = -\frac{GMmz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad [V.5]$$

Il campo di gravitazione è conservativo

Il campo di forze gravitazionale è definito per qualunque valore di x,y,z escluso che nell'origine; è inoltre facile verificare, derivando le [V.5], che esse soddisfano le condizioni [IV.61]: il *campo di forze gravitazionale è un campo di forze conservativo*.

Questa stessa conclusione può essere raggiunta anche direttamente rifacendosi alla definizione di campo di forze conservative: dimostrando cioè che il campo di forze gravitazionale (come del resto qualunque campo centrale, per il quale cioè sia $f_r = f(r)$; $f_\theta = f_\varphi = 0$) compie un lavoro indipendente dalla traiettoria, e funzione solo della posizione A di partenza e B di arrivo.

Si ha infatti:

$$L = \int_A^B -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{s} = -GMm\int_A^B \frac{dr}{r^2} = +GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \quad [V.6]$$

Nel calcolo delle [V.6] abbiamo tenuto conto del fatto che la proiezione di $d\vec{s}$ su $\hat{r}$ ($d\vec{s}\cdot\hat{r}$) dà semplicemente la variazione dr del modulo r di $\vec{r}$; e inoltre del fatto che

$$\int\frac{dr}{r^2} = \int r^{-2}\,dr = -\frac{1}{r} + \text{cost} \quad \text{(vedi appendice A).}$$

Confrontando la [V.6] con la [IV.60] vediamo che il potenziale V della forza gravitazionale è dato da

$$V = +\frac{GMm}{r} + \text{cost}$$

Il valore della costante viene di solito posto uguale a zero per rendere questa espressione la più semplice possibile. L'energia potenziale $U = -V$ è allora data da:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \qquad [V.7]$$

e risulta tendere a zero all'aumentare indefinitamente di r (o, come si dice, è «nulla al limite di r infinito»).

Esempi

E.V.1. *Un meteorite di massa $m = 2$ tonnellate proviene dallo spazio con una velocità $v_1 = 5000$ m/s, e passa a una distanza minima dalla Terra $r_o = 60.000$ km. Quale è la forza di attrazione f_o che esso subisce da parte della Terra nel punto di minima distanza, e quale è la sua velocità v_o in tale posizione? Con quale velocità v_2 si allontana verso lo spazio? (La massa della Terra è $M_T \simeq 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg).*

$\vec{v}_2$ $\vec{v}_o$ r_o $\vec{v}_1$

Si ha dalla [V.3]:

$$f_o = \frac{GMm}{r_o^2} = \frac{6{,}66 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{N\,\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot 2 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}}{(60 \cdot 10^6)^2\,\mathrm{m}^2} = 2{,}21 \cdot 10^2\,N$$

Per il calcolo della velocità v_o, usiamo il teorema di conservazione dell'energia $\frac{1}{2} m v^2 + U =$ costante. Quando il meteorite è molto lontano dalla Terra, sia in fase di avvicinamento che in fase di allontanamento, l'energia potenziale [V.7] è trascurabile; per cui si ha:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_o^2 - \frac{GMm}{r_o} = \frac{1}{2} m v_2^2$$

Da qui vediamo che $v_2 = v_1$; inoltre:

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{GMm}{r_o};$$

da cui

$$v_o^2 = v_1^2 + \frac{2\,GM}{r_o} = 25 \cdot 10^{26}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} +$$

$$+ \frac{2 \cdot 6{,}66 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{N\,\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{60 \cdot 10^6\,\mathrm{m}} = (25 \cdot 10^6 + 13{,}3 \cdot 10^6)\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}.$$

Dunque

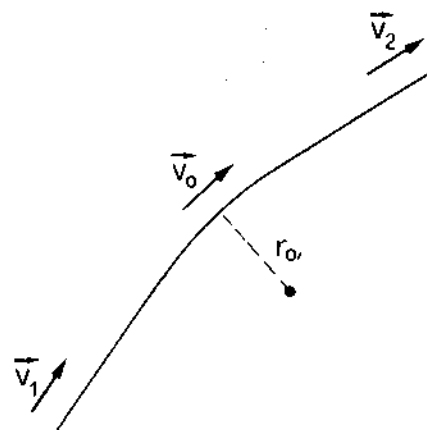
$$v_o \simeq 6190\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

E.V.2. *Sapendo che la Luna compie la sua rivoluzione intorno alla Terra in circa 27 giorni e un quarto, e conoscendo la massa M_T della Terra e la costante G di gravitazione universale (vedi esempio E.V.1), calcolare il raggio dell'orbita lunare nell'ipotesi che la sua traiettoria sia circolare.*

Poiché la forza [V.3] subita dalla Luna è orientata verso la Terra, e dunque verso il centro della traiettoria circolare, anche l'accelerazione della Luna sarà puramente centripeta; e dunque nell'approssimazione di traiettoria circolare il moto sarà anche uniforme, essendo nulla la componente tangenziale dell'accelerazione. L'equazione del moto si scrive dunque

$$\vec{f} = -\,m\omega^2\,\vec{r}$$

cioè

$$\frac{-\,G M_T m\,\hat{r}}{r^2} = -\,m\omega^2\,\vec{r}$$

dove m è la massa della Luna e r il raggio della sua orbita; da cui:

$$r^3 = \frac{GM_T}{\omega^2}$$

Essendo

$$G = 6{,}66 \cdot 10^{-11} \frac{N\,\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}; \quad M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg};$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{27{,}25 \cdot 8{,}64 \cdot 10^4\,\mathrm{sec}} = 22{,}68 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{sec}^{-1}$$

(un giorno contiene $24 \cdot 3600 = 8{,}64 \cdot 10^4$ sec). Sostituendo si ottiene

$$r^3 = 55{,}3 \cdot 10^{24}\,\mathrm{m}^3; \text{ da cui } r = 381.000\ \mathrm{km}$$

In realtà, durante la sua rivoluzione intorno alla Terra, la Luna ha una distanza dalla Terra stessa che varia fra 356.410 km e 406.670 km, con un valore medio $\bar{r}$ = 381.540 km, in ottimo accordo con il calcolo approssimato da noi effettuato.

V.2. Il teorema di Gauss e il campo gravitazionale generato da una massa avente simmetria sferica

Consideriamo un campo vettoriale $\vec{V}(\vec{r}) = \vec{V}(x, y, z)$, cioè un vettore $\vec{V}$ espresso in funzione della posizione. Consideriamo inoltre una superficie geometrica S disposta entro il campo vettoriale. Considerato un elemento dS della superficie S, definiamo il vettore $d\vec{S}$ come quel vettore che ha come modulo l'area dS dell'elemento di superficie e come direzione quella del versore $\hat{n}$ normale alla superficie elementare dS.

$$d\vec{S} = dS\,\hat{n}$$

Il verso di $\hat{n}$ viene scelto convenzionalmente, assegnando una faccia positiva (ovvero un verso convenzionale) alla supeficie S.

Flusso elementare

Si definisce come *flusso elementare* $d\Phi$ del vettore $\vec{V}$ attraverso l'elemento di superficie $d\vec{S}$ la quantità

$$d\Phi = \vec{V} \cdot d\vec{S} = \vec{V} \cdot \hat{n}\,dS = V dS \cos\theta$$

Flusso di un vettore attraverso una superficie

Dividiamo ora l'intera superficie S in tanti elementi di superficie dS. Si definisce come flusso Φ del vettore $\vec{V}$ attraverso la superficie finita S la somma dei flussi elementari attraverso gli elementi di superficie dS in cui S è stata suddivisa, al tendere a zero dell'area di ciascun elemento dS:

$$\Phi = \lim_{dS \to 0} \sum \vec{V} \cdot \hat{n}\,dS$$

Integrale di superficie

Il limite di questa sommatoria (detto *integrale di superficie*) viene indicato come segue

$$\Phi = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{S} \qquad [V.8]$$

Ci proponiamo ora di calcolare il flusso del campo gravitazionale $\vec{g}$ (generato da una massa puntiforme M) attraverso una superficie chiusa S contenente M al suo

interno, e orientata positivamente verso l'esterno: con questa convenzione sull'orientamento di S il flusso viene detto *flusso uscente* da S.

Flusso uscente

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_S g\,(dS \cos\theta) = -GM \int_S \frac{dS_n}{r^2} \qquad [V.9]$$

Nello scrivere la [V.9], abbiamo tenuto conto della espressione [V.2] di $\vec{g}$. Con dS_n abbiamo indicato la quantità $dS \cos\theta$. Dal punto di vista geometrico, dS_n rappresenta la proiezione dell'elemento di superficie dS sulla sfera di raggio r; o, in altri termini, la porzione di superficie della sfera intercettata dal cono elementare con centro in M.

Notiamo ora che, fissato un determinato cono, il rapporto $\frac{dS_n}{r^2}$ fra l'elemento di superficie sferica dS_n che esso intercetta e il quadrato r^2 del raggio r della sfera stessa, è una quantità $d\Omega$ (detta *angolo solido* del cono) indipendente dal raggio r della sfera

Angolo solido

$$d\Omega = \frac{dS_{n_1}}{r_1^2} = \frac{dS_{n_2}}{r_2^2} = \frac{dS_n}{r^2} \qquad [V.10]$$

Ciò è del tutto analogo al caso di due rette che si intersecano nel piano: il rapporto fra l'arco ds e il raggio r è indipendente dal raggio r, e rappresenta l'angolo $d\alpha$ fra le due rette.

In virtù della [V.10], il flusso [V.9] si scrive dunque:

$$\Phi = -GM \int d\Omega$$

L'integrale $\int d\Omega$ su tutta la sfera risulta pari al rapporto fra la superficie totale S_n di una sfera ($S_n = 4\pi r^2$) e il raggio r^2 della sfera stessa. In definitiva dunque:

$$\Phi = -GM\,4\pi \qquad [V.11]$$

Come risulta dalla [V.11], *il flusso del campo gravitazionale $\vec{g}$ generato da una massa puntiforme M uscente da una qualunque superficie che contenga M al suo interno, è proporzionale alla massa M e indipendente dalla posizione che la massa M occupa all'interno di S*. In maniera del tutto analoga si dimostra che *il flusso è nullo se la massa M è esterna alla superficie S.*

Questo risultato, nel suo complesso, va sotto il nome di *teorema di Gauss* relativo al flusso.

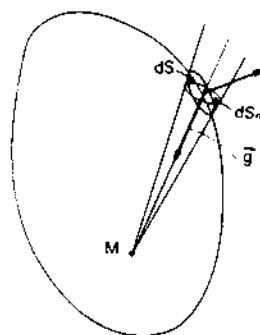
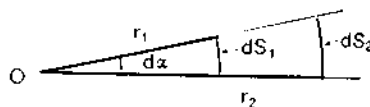
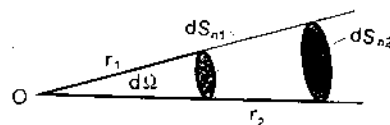
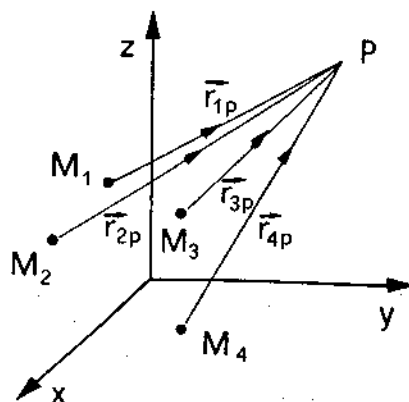
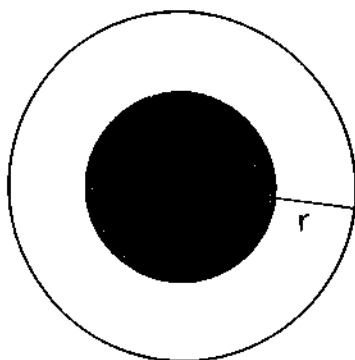
Teorema di Gauss

Il teorema di Gauss può essere facilmente generalizzato al caso che la massa M sia non puntiforme, ma estesa. Cominciamo col considerare il caso di un certo numero di masse puntiformi $M_1, M_2, \dots M_n$.

In un punto generico P, il campo gravitazionale totale (cioè la forza risultante esercitata sulla massa unitaria puntiforme dalle masse $M_1, M_2, \dots M_n$) è dato dalla somma dei campi gravitazionali generati da ciascuna delle masse:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}_1(\vec{r}_{1p}) + \vec{g}_2(\vec{r}_{2p}) + \dots \vec{g}_n(\vec{r}_{np}) \qquad [V.12]$$

Il flusso di $\vec{g}$ attraverso una qualunque superficie chiusa S sarà dato dalla somma dei flussi relativi ai singoli campi gravitazionali generati da ciascuna massa; e quindi il risultato sarà ancora dato dalla [V.11], dove con M si intenda la somma di tutte le masse puntiformi contenute all'interno di S. Lo stesso risultato vale anche per una massa M estesa, poiché questa può essere immaginata come suddivisa in un grande numero di parti, ciascuna piccola quanto si vuole.

Usando il teorema di Gauss l'espressione [V.2] del campo gravitazionale può essere facilmente generalizzata al caso di una massa M estesa, purché questa sia dotata di simmetria sferica.

Consideriamo dunque una massa M estesa: supponiamo che essa abbia simmetria sferica, e sia tutta contenuta entro la sfera di raggio R. Consideriamo anche una superficie geometrica sferica, concentrica con la prima e di raggio $r > R$. Calcoliamo il flusso del campo gravitazionale $\vec{g}(\vec{r})$ uscente dalla sfera di raggio r.

Per ragioni di simmetria, il campo $\vec{g}(\vec{r})$ sarà lo stesso su ogni punto della sfera: esso non dipenderà cioè dal raggio vettore $\vec{r}$, ma solo dal suo modulo r

$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}(r)$$

Inoltre, sempre per ragioni di simmetria, il campo $\vec{g}(r)$ in ogni punto non può che essere orientato secondo il versore $\hat{r}$ del raggio, e in verso opposto ad esso (forza attrattiva)

$$\vec{g}(\vec{r}) = -g(r)\,\hat{r} \qquad \text{[V.12]}$$

Tenuto conto di ciò, il calcolo del flusso di $\vec{g}$ uscente dalla sfera può essere eseguito in maniera assai semplice ricorrendo alla definizione [V.8]:

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_S -g(r) \quad \hat{r} \cdot d\vec{S} = -g(r) \int_S dS = -g(r)\ 4\pi r^2 \qquad \text{[V.13]}$$

Nei passaggi intermedi, abbiamo tenuto conto del fatto che $g(r)$ è costante su tutta la superficie sferica e può pertanto essere portato fuori dal segno di integrale; e inoltre del fatto che $\hat{r}$ e $d\vec{S}$ sono fra di loro paralleli.

Usando ora il teorema di Gauss, possiamo uguagliare la [V.13] e la [V.11] ottenendo:

$$-g(r)\,4\pi\,r^2 = -G\,M\,4\pi$$

da cui

$$g(r) = \frac{GM}{r^2}$$

per cui in definitiva la [V.12] diviene:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\,\hat{r} \qquad (r \geq R) \qquad \text{[V.14]}$$

Campo gravitazionale generato da una massa estesa sferica

espressione che coincide con la [V.2]. *Una massa estesa dotata di simmetria sferica genera al suo esterno lo stesso campo gravitazionale generato da un oggetto puntiforme di pari massa disposto al centro della sfera.*

Con ragionamento analogo si può calcolare il *campo gravitazionale presente all'interno della massa sferica.* Considerata una sfera geometrica di raggio $r < R$, il calcolo del flusso Φ uscente da essa può ancora essere effettuato come nel caso precedente, prevenendo ancora alla [V.13]. Quando tuttavia si applica il teorema di Gauss, va tenuto conto del fatto che nella [V.11] va posto, al secondo membro, *solo la massa $m(r)$ contenuta all'interno della sfera di raggio r.*

Si ottiene in definitiva

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{G\,m(r)}{r^2}\,\hat{r} \qquad (r \leq R) \qquad \text{[V.15]}$$

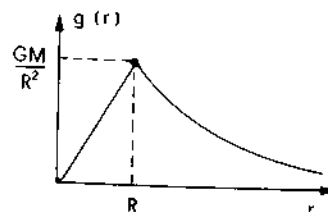
Ricordiamo che i risultati [V.14] e [V.15] valgono per una massa dotata di simmetria sferica: una massa cioè contenuta dentro una sfera e avente, all'interno della sfera, una densità dipendente dal modulo r del vettore posizione $\vec{r}$, ma non dal vettore posizione $\vec{r}$ stesso. Un caso particolare notevole si ha quando la massa sferica è

omogenea, cioè quando la sua densità è costante (indipendente dal r). Allora la massa contenuta entro un certo volume è proporzionale al volume stesso, per cui

$$m(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M}{R^3} r^3$$

Sostituendo nella [V.15] si ha

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{R^3}\vec{r} \qquad (r \leq R) \qquad \text{[V.16]}$$

Mettendo insieme la [V.16] e la [V.14], si ottiene per $g(r)$ l'andamento mostrato in figura.

Esempio

E.V.3. *Quanto più velocemente un grave viene lanciato verso l'alto, tanto più in alto esso arriva prima di ricadere. Esiste una velocità limite v_f tale che, se il grave viene lanciato con velocità $v \geq v_f$, esso arriva tanto in alto da sfuggire alla attrazione terreste, e si allontana allora sempre più dalla Terra. La velocità limite v_f viene detta «velocità di fuga». Trascurando la resistenza dell'aria, e considerando la Terra un sistema inerziale, calcolare v_f.*

Il grave si trova inizialmente sulla superficie terrestre, e la Terra non può dunque essere trattata come un oggetto puntiforme. Tuttavia, si può ritenere che essa abbia simmetria praticamente sferica, per cui il campo gravitazionale che essa genera intorno a sé è dato dalla [V.14], con M massa della terra e r distanza fra la posizione del grave e il centro della Terra. Il grave è dunque soggetto alla forza (conservativa) [V.3], la cui energia potenziale è la [V.7].

Applichiamo ad esso il teorema di conservazione dell'energia.

Inizialmente, esso ha velocità v_i (velocità di lancio) e la sua distanza dal centro della Terra è pari al raggio terrestre R_T; dunque la sua energia totale è:

$$E = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GMm}{R_T}$$

Supponiamo che la velocità di lancio v_i sia superiore alla velocità di fuga v_f: ciò significa che il grave arriverà tanto lontano che l'azione della attrazione terrestre sarà trascurabile. A tal punto, la sua energia potenziale sarà nulla, e gli resterà solo energia cinetica $\frac{1}{2} m v_\infty^2$, dove con v_∞ indichiamo la velocità con cui continua a muoversi quando si trova ormai libero dalla attrazione terrestre. Per la conservazione dell'energia deve dunque essere

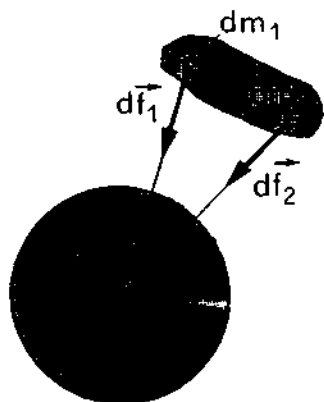
$$E = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GMm}{R_T} = \frac{1}{2} m v_\infty^2$$

Il secondo membro di questa relazione è senz'altro positivo; affinché dunque il grave arrivi all'infinito, la velocità di lancio deve essere sufficientemente elevata perché sia

$$E = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GMm}{R_T} \geq 0$$

In corrispondenza del segno di uguale, si ha la velocità di fuga v_f (il grave arriva all'infinito senza energia residua). Numericamente si ha:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,GM}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}66 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6{,}3 \cdot 10^{6}}} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{1{,}26 \cdot 10^{8}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq 11.200\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq 40.000\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

È opportuno fare le seguenti osservazioni:

a) l'espressione [V.3] per la forza gravitazionale è corretta solo se il corpo di massa M ha simmetria sferica e se il corpo di massa m è *puntiforme*. Se anche il corpo m è esteso, allora ogni suo elemento di massa dm è sottoposto alla forza [V.3]. Due diversi elementi di massa dm_1 e dm_2 sono sottoposti a forze diverse e diversamente orientate essendo entrambe dirette verso il centro C della massa sferica. Qualora interessi calcolare la forza attrattiva risultante subita dalla massa estesa m si dovrà calcolare il risultante delle forze elementari. Il risultato non è semplicemente espresso dalla [V.3].

b) Il procedimento adottato per risolvere l'esempio E.V.3. è corretto solo nell'ipotesi (evidentemente soddisfatta in quel caso) che la massa m del grave sia molto piccola rispetto alla massa M_T della Terra: $m \ll M_T$. Vedremo infatti, quando discuteremo la dinamica dei sistemi di punti, che se un corpo subisce una certa forza ad opera di un altro corpo, quest'ultimo subisce ad opera del primo una forza uguale ed opposta (principio di azione e reazione). Se uno dei due corpi si muove, in un sistema inerziale, soggetto alla forza esercitata dall'altro, quest'ultimo si muove sotto l'azione della forza esercitata dal primo. Poiché a parità di forza l'accelerazione è inversamente proporzionale alla massa, solo nel caso che uno dei due corpi abbia una massa molto maggiore dell'altro è lecita l'approssimazione di considerarlo fermo nel sistema inerziale scelto. In tutte le considerazioni che faremo in questo capitolo supporremo che questa approssimazione sia sempre valida (ad esempio la massa M_S del Sole è circa $3{,}3 \cdot 10^5$ volte più grande rispetto alla massa M_T della Terra, e circa 10^3 volte maggiore della massa di Giove, che è il pianeta più massivo del sistema solare). Nel capitolo dedicato alla dinamica dei sistemi vedremo quale semplice correzione debba essere introdotta nel caso che le due masse siano confrontabili.

Sistemi gravitazionali legati

c) Sempre rifacendoci all'esempio E.V.3., notiamo che qualora la velocità del grave sia inferiore alla velocità di fuga, allora la sua energia totale $E = \frac{1}{2}\,m v^2 - \frac{GMm}{r}$ *è negativa*. In tal caso si usa dire che il grave costituisce un *sistema legato* alla Terra. La caratteristica dei sistemi legati è quella di avere energia totale negativa: è negativa, ad esempio, l'energia totale di un satellite che orbiti attorno alla Terra; o l'energia totale di un pianeta che orbiti attorno al Sole.

V.3. Le leggi di Keplero e la loro giustificazione dinamica

Analizzando i risultati di osservazioni astronomiche sul moto dei pianeti (in particolare di quelle effettuate dal suo maestro Tycho Brahe

(1546-1601)), Giovanni Keplero (1571-1630) giunse a formulare le sue tre famose leggi empiriche, che si enunciano come segue:

Leggi di Keplero

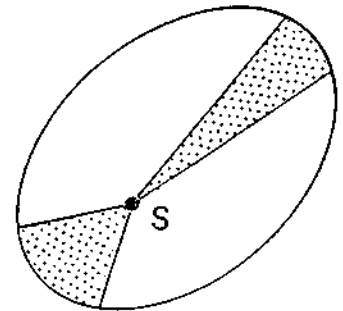
I. I pianeti compiono, nel loro moto intorno al Sole, orbite piane di forma ellittica, di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

II. Il moto dei pianeti avviene con *velocità areolare* costante: ciò significa che il raggio vettore, scelto con origine nel Sole, spazza aree uguali in tempi uguali.

Velocità areolare

III. Per i vari pianeti è costante il rapporto fra il quadrato del periodo T di rivoluzione e il cubo del semiasse maggiore a dell'orbita:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{costante (uguale per tutti i pianeti)} \qquad [V.17]$$

Queste leggi empiriche, di carattere cinematico, possono essere tutte dedotte dalla legge [V.4] della gravitazione universale.

a) *Orbita piana e velocità areolare costante* sono conseguenza del fatto che la forza gravitazionale che il Sole esercita sui pianeti è una forza centrale. Pertanto, scegliendo come polo il Sole stesso, il momento $\vec{m} = \vec{r} \times \vec{f}$ della forza è nullo ($\vec{r}$ ed $\vec{f}$ sono fra di loro paralleli, o meglio antiparalleli). La [IV.28] diviene dunque (essendo $\vec{r}$, $\vec{v}$ ed m rispettivamente il raggio vettore, la velocità e la massa del pianeta):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \text{da cui} \quad \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{costante}$$

Il fatto che l'orbita sia piana segue dal fatto che la *direzione* di $\vec{p}$ è costante: in effetti, la direzione di $\vec{p}$ è ortogonale al piano che contiene $\vec{r}$ e $\vec{v}$; e se la direzione di $\vec{p}$ non cambia, non può cambiare la giacitura di tale piano. Il fatto che la velocità areolare è costante è invece conseguenza del fatto che è costante il modulo di $\vec{p}$.

Orbita piana

Come vediamo in figura, l'area A spazzata dal raggio vettore $\vec{r}$ nell'intervallo elementare di tempo Δt è data, a meno di infinitesimi di ordine superiore, da

$$\Delta A = \frac{1}{2} r \cdot \Delta s \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta\vec{s}|$$

Infatti r e $\Delta s \cdot \sin\alpha$ rappresentano rispettivamente la base e l'altezza del triangolo cui ΔA si approssima a meno di infinitesimi di ordine superiore.

La velocità areolare $A' = \dfrac{dA}{dt}$ vale dunque:

$$A' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} \right| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}|$$

Come si vede, la velocità areolare A' risulta essere proporzionale al modulo p di $\vec{p}$ ($p = m|\vec{r} \times \vec{v}|$); la costanza di p implica dunque la costanza di A'.

Velocità areolare costante

Dimostrazione che l'orbita è ellittica

b) *Traiettoria ellittica.* Il fatto che la traiettoria sia ellittica può essere dimostrato a partire dal teorema di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = E = \text{costante} \qquad [V.18]$$

dove M è la massa del Sole.

Esplicitiamo questa equazione in coordinate polari. Trattandosi di un moto piano, possiamo scegliere il piano xy coincidente col piano dell'orbita; per descrivere il moto, sono sufficienti i due parametri r (raggio) e φ (anomalia). Le componenti della velocità v_r e v_φ secondo i versori $\hat{r}$ e $\hat{\varphi}$ sono rispettivamente

$$\begin{cases} v_r = v\cos\alpha = \dfrac{dr}{dt} \\ v_\varphi = v\sin\alpha = r\dfrac{d\varphi}{dt} \end{cases} \qquad [V.19]$$

per cui la [V.18] diviene

$$\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = E + \frac{GMm}{r} \qquad [V.20]$$

Notiamo ora che il modulo di $\vec{p}$, $p = rmv\sin\alpha$, può essere scritto anche come $p = rm\left(r\dfrac{d\varphi}{dt}\right)$ per la seconda delle [V.19] per cui

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p}{mr^2} \qquad [V.21]$$

dove p, lo ricordiamo, è una quantità costante durante il moto.

Sostituendo la [V.21] nella [V.20] si ha:

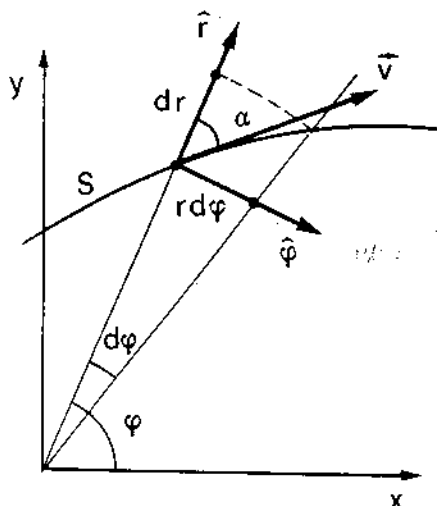
$$\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{p^2}{m^2r^2}\right] = E + \frac{GMm}{r} \qquad [V.20]$$

da cui

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{p^2}{m^2r^2} = \frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r}$$

e infine

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{p^2}{m^2r^2}} \qquad [V.22]$$

L'equazione differenziale [V.22] del primo ordine potrebbe essere risolta con relativa facilità per separazione di variabili, ottenendo così la legge oraria $r(t)$ per il raggio r; e sostituendo $r(t)$ al secondo membro della [V.21], anche quest'ultima potrebbe essere risolta per separazione di variabili fornendo la legge oraria $\varphi(t)$ per l'anomalia.

Noi qui tuttavia siamo interessati solo a ricavare la equazione della traiettoria, cioè una relazione $r(\varphi)$ che leghi il raggio r all'anomalia φ durante il moto. Ciò può essere fatto dividendo membro a membro la [V.21] e la [V.22]; si ottiene:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{p}{mr^2} \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{p^2}{m^2 r^2}}}$$

$$d\varphi = \frac{dr}{r^2} \frac{\pm b}{\sqrt{-1 + \frac{2a}{r} - \frac{b^2}{r^2}}} \qquad \text{[V.23]}$$

dove

$$\begin{cases} b^2 = -\dfrac{p^2}{2Em}; \quad b = \sqrt{\dfrac{-p^2}{2Em}} \\ a = -\dfrac{GMm}{2E} \end{cases}$$

Notiamo che a e b hanno entrambi le dimensioni di una lunghezza; essi sono entrambi reali e positivi, in virtù della osservazione c) fatta alla fine del precedente paragrafo.

La [V.23] può essere integrata membro a membro. Il risultato è:

$$\varphi + \varphi_0 = \arccos \frac{b^2 - ar}{r\sqrt{a^2 - b^2}}$$

dove φ_0 è una costante di integrazione che può essere assunta pari a zero pur di scegliere opportunamente l'orientamento degli assi coordinati. In definitiva si ha

Equazione dell'orbita ellittica

$$\cos\varphi = \frac{b^2 - ar}{r\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$r(a + \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \cos\varphi) = b^2$$

Questa rappresenta l'equazione di una ellisse con asse maggiore pari ad a e asse minore pari a b.

Terza legge di Keplero

c) *La terza legge di Keplero*. La terza legge di Keplero potrebbe essere dimostrata nel caso generale risolvendo l'equazione [V.22]. Per non appesantire troppo di calcoli questo paragrafo, noi preferiamo limitarci al caso particolare in cui il pianeta compia un'orbita circolare, nel qual caso il suo moto diviene un moto circolare uniforme come discende immediatamente dalla [V.21] considerando che sia p che r sono costanti.

Applicando al moto del pianeta l'equazione $\vec{f} = m\vec{a}$, si ha

$$-\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = -m\omega^2\vec{r}$$

avendo ricordato che nel moto circolare uniforme l'accelerazione (centripeta) vale $-\omega^2 \vec{r}$ $\left(\text{con } \omega = \frac{d\varphi}{dt}\right)$. Da questa equazione discende:

$$r^3 \omega^2 = GM$$

e ricordando che $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2}$$

che essendo indipendente dalla massa m del pianeta dimostra, nel caso particolare considerato, la terza legge di Keplero.

Va notato che l'eccentricità dell'orbita ellittica dei pianeti è in realtà molto modesta: il rapporto fra l'asse maggiore a e quello minore b ha il suo valore massimo nel caso di Plutone, per cui si ha $\frac{a}{b} \simeq 1{,}03$; nel caso della Terra è $\frac{a}{b} \simeq 1{,}0002$. L'approssimazione di orbita circolare fornisce dunque una descrizione assai prossima alla realtà.

V.4. La forza peso

Forza peso

Secondo Voltaire, fu osservando la caduta di una mela nel suo giardino che Newton ebbe una intuizione rivoluzionaria rispetto alla cultura dei suoi tempi: che cioè la forza peso altro non è se non la forza gravitazionale con cui la Terra attrae i corpi ad essa circostanti, ed è dunque anche la stessa forza in virtù della quale - ad esempio - la Luna orbita intorno alla Terra.

La forza peso con cui ogni oggetto viene attratto dalla Terra può in effetti essere espressa come

$$\vec{f}_p = m\vec{g}$$

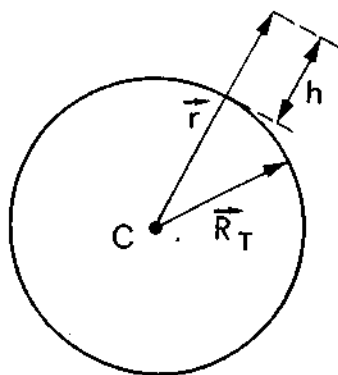
dove m è la massa dell'oggetto e $\vec{g}$ (detto accelerazione di gravità) altro non è - a meno di termini correttivi, che fra poco discuteremo, dovuti al fatto che la Terra non è un sistema di riferimento inerziale - se non il campo gravitazionale generato dalla Terra.

Poiché la Terra può essere considerata, in buona approssimazione, come dotata di simmetria sferica, il campo gravitazionale $\vec{g}$ da essa generato può essere espresso tramite la [V.14]

$$\vec{g} = -\frac{GM\hat{r}}{r^2} \qquad \text{[V.14]}$$

h
$\vec{r}$
C
$\vec{R}_T$

dove M è la massa della Terra e r la distanza del punto considerato dal centro C della Terra. Di solito, è più comodo riferire la posizione alla superficie terrestre; r verrà allora espresso come

$$r = R_T + h$$

INERZIA E GRAVITAZIONE

La materia gode di due proprietà che appaiono distinte: da un lato ogni corpo, sottoposto all'azione di qualsiasi forza, mostra un'inerzia a cambiare il suo stato di moto (massa inerziale), dall'altro ogni corpo è capace di attrarre altra materia per effetto dell'interazione gravitazionale (massa gravitazionale). È un fatto sperimentale che, per un dato corpo, le due masse – inerziale e gravitazionale – siano proporzionali. Concettualmente tali esperimenti partono dall'osservazione che la forza peso $\vec{P}$ su un dato corpo fermo rappresenta, nel sistema non inerziale solidale alla Terra a cui ogni laboratorio di misura può ricondursi, la risultante di un contributo di tipo gravitazionale newtoniano $\vec{N}$ e di un contributo centrifugo $\vec{C}$. Con ovvio significato dei simboli si ha

$$N = G\frac{M_T m}{R_T^2} \qquad (m = \text{massa gravitazionale})$$

$$C = m_i \omega^2 r \qquad (m_i = \text{massa inerziale})$$

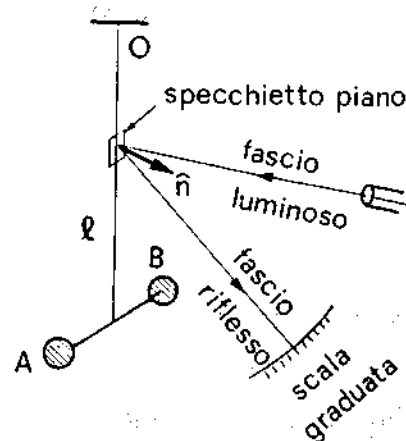
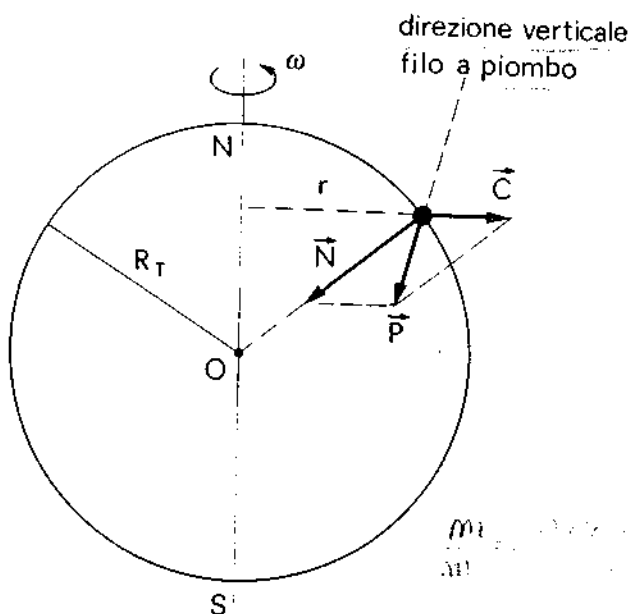
La direzione di $\vec{P} = \vec{N} + \vec{C}$ rappresenta la direzione della verticale nel luogo considerato, così come si misurerebbe con il filo a piombo. Tale direzione dipende, ovviamente, dal rapporto dei moduli di $\vec{N}$ e $\vec{C}$:

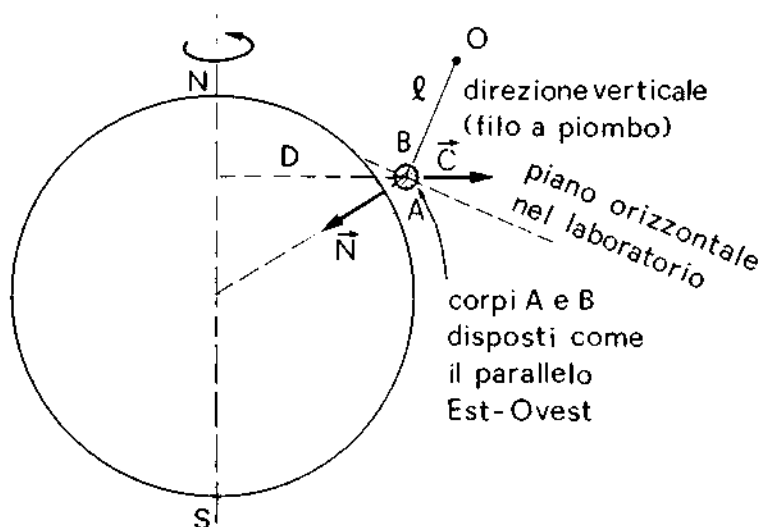
$$\frac{N}{C} = \left(\frac{G M_T}{R_T^2 \omega^2 r}\right) \cdot \left(\frac{m}{m_i}\right)$$

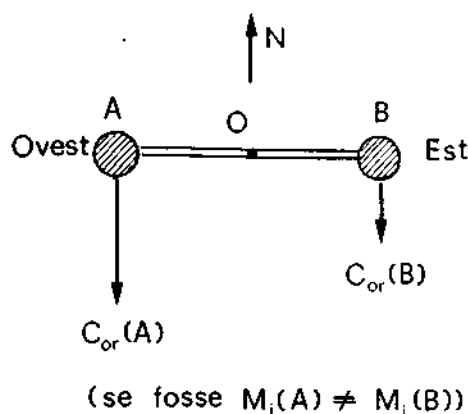
e quindi dal rapporto (m/m_i) tra massa gravitazionale e massa inerziale del corpo, dal momento che il fattore $GM_T/R_T^2 \omega^2 r)$ non dipende dal corpo considerato. L'esperienza prova che la direzione della verticale è la stessa, quale che sia il corpo considerato: dunque il rapporto (m/m_i) è lo stesso per tutti i corpi, grandi e piccoli, e di ogni possibile composizione chimica.

A risultati di grande accuratezza (qualche unità in 10^{-11}) si perviene con l'uso della *bilancia di Eötvös.*

Il pendolo di Eötvös è sostanzialmente una bilancia di torsione, cioè un filo l capace di reazione elastica alla torsione con un estremo ancorato collegato al punto di mezzo di una sbarretta rigida ed omogenea, agli estremi della quale sono bloccati due corpi diversi A e B che, negli esperimenti di Eötvös, avevano le stesse masse gravitazionali $(M(A) = M(B))$. La situazione di equilibrio del sistema si ha in corrispondenza del filo l verticale e della sbarretta orizzontale disposta in un piano determinato dalla reazione elastica del filo. Un sistema di leva ottica (fascio luminoso allineato - specchietto solidale al filo - scala graduata) permette di apprezzare rotazioni anche piccole del piano OAB. Poiché le forze centrifughe $\vec{C}(A)$ e $\vec{C}(B)$ dipendono dalle masse inerziali $M_i(A)$ e $M_i(B)$ dei due corpi considerati, è chiaro che, a parità di massa gravitazionale $M(A) = M(B)$, se venisse a mancare la proporzionalità tra massa inerziale e massa gravitazionale, si avrebbe $M_i(A) \neq M_i(B)$ e quindi $\vec{C}(A) \neq \vec{C}(B)$.

In questa ipotesi, il piano OAB della bilancia di torsione ruoterebbe rispetto alla posizione di equilibrio. Per convincersi di questo, supponiamo per esempio di disporre i corpi A e B allineati secondo la direzione del parallelo Ovest-Est passante per il laboratorio e di osservare il pendolo di torsione dall'alto della verticale

passante per il punto fisso O. Le proiezioni sul piano orizzontale delle forze centrifughe $\vec{C}(A)$ e $\vec{C}(B)$, indicate nella figura con $C_{or}(A)$ e $C_{or}(B)$ rispettivamente, se fosse $M_i(A) \neq M_i(B)$, sarebbero diverse e darebbero luogo ad un momento risultante tendente a far ruotare il piano OAB. Questo non è ciò che si rileva sperimentalmente; di fatto l'esperienza mostra che, variando ampiamente le masse e la composi-

zione chimica dei corpi A e B, si trova sempre confermata, per ciascun corpo, la diretta proporzionalità tra massa inerziale M_i e massa gravitazionale M.

La possibilità di identificare massa inerziale e massa gravitazionale, adottando per entrambe la stessa unità di misura oltre che facendole coincidere numericamente, mette in chiara evidenza l'esistenza di un

(se fosse $M_i(A) \neq M_i(B)$)

profondo legame tra inerzia e gravitazione. Questo legame è stabilito addirittura in forma di principio in *relatività generale*. Per sistemi di riferimento non inerziali, la teoria della relatività generale postula l'impossibilità di distinguere forze di inerzia da forze gravitazionali implicando, di conseguenza, l'identità concettuale di massa inerziale e massa gravitazionale. Questo punto verrà ripreso alla fine del capitolo XI dedicato alla teoria della relatività.

dove R_T è il raggio della Terra e h la quota di P rispetto al livello del mare. La [V.14] si scrive allora come

$$\vec{g} = -\frac{GM\hat{r}}{(R_T+h)^2} = -\frac{GM\hat{r}}{R_T^2\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} \simeq \vec{g}_o\left(1-\frac{2h}{R_T}\right) \qquad [V.24]$$

Accelerazione di gravità in funzione della quota

dove $\vec{g}_o$ rappresenta il valore di $\vec{g}$ a livello del mare ($h = 0$). Nello scrivere l'ultimo passaggio della [V.14] abbiamo tenuto conto della [IV.9.a] che ci consente di porre

$$\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-2} \simeq \left(1-\frac{2h}{R_T}\right) \text{ per } \frac{h}{R_T} \ll 1 .$$

La [V.24] mostra che $\vec{g}$ cambia di direzione spostandosi sulla superficie terrestre, e cambia in modulo allontanandosi dal livello del mare. Tuttavia, tenuto conto che il raggio R_T della Terra vale circa $R_T \simeq 6{,}37 \cdot 10^6$ m, se ci si sposta orizzontalmente di qualche chilometro ne risulta una variazione non superiore a 10^{-3} rad nella direzione di $\vec{g}$; mentre per uno spostamento verticale di qualche chilometro il termine correttivo $1-\frac{2h}{R_T}$ incide sul modulo g di $\vec{g}$ per meno dell'1‰ (un per mille).

Entro tale approssimazione, $\vec{g}$ può essere considerato costante in direzione e modulo all'interno di un volume con dimensioni lineari dell'ordine dei chilometri; e il modulo di $\vec{g}$ può essere considerato pari a g_o:

$$g_o = \frac{GM}{R_T^2} = \frac{6{,}66 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{(6{,}37)^2 \cdot 10^{12}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \simeq 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad [V.25]$$

Accelerazione di gravità e termini correttivi da forze apparenti.

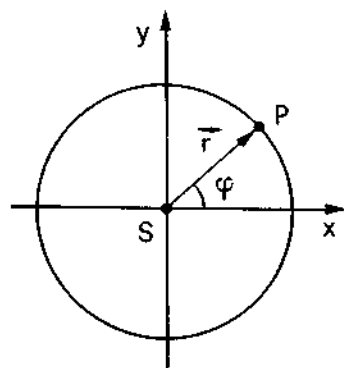
Come abbiamo accennato più sopra, al campo gravitazionale terrestre si sovrappongono, in un laboratorio fermo rispetto alla superficie terrestre, dei termini correttivi dovuti a forze apparenti conseguenti al fatto che ci si trova in un sistema di riferimento non inerziale. Se si esegue una misura statica di forza, cosicché la velocità relativa $\vec{v}$ sia nulla (vedi eq. [III.33]), la forza di Coriolis non dà alcun contributo e l'unica forza apparente è la forza di trascinamento. Trascurando il contributo del moto di rivoluzione intorno al Sole, la forza di trascinamento è rappresentata dalla forza centrifuga $m\omega^2\vec{d}$ dovuta alla rotazione della Terra intorno al suo asse

$$\left(\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8{,}64 \cdot 10^4\ \text{s}};\ d = R_T\cos\alpha,\ \text{con } \alpha \text{ latitudine}\right).$$

La forza peso $\vec{f}_p$ si scriverà dunque come:

$$\vec{f}_p = m\vec{g}_{eff} = m\vec{g} + m\omega^2\vec{d} = m\left(-\frac{GM}{r^2}\hat{r} + \omega^2 r\cos\alpha\,\hat{d}\right) \qquad [V.26]$$

Il termine correttivo $\omega^2 r\cos\alpha\,\hat{d}$ è nullo ai poli ($\alpha = \pi/2$) e massimo all'equatore ($\alpha = 0$) dove risulta opposto in direzione alla forza gravitazionale e di modulo pari a circa $3{,}37 \cdot 10^{-2}$ m/s². Alle latitudini intermedie esso modifica leggermente sia il modulo che la direzione di $\vec{g}$. Il valore di g_{eff} cal-

	m/s^2	
Latitudine α	g_{eff} teorico	g_{eff} sperimentale
90° (Polo)	9,81	9,83
45°	9,785	9,80
0° (equatore)	9,78	9,78

colato secondo la [V.26] viene confrontato coi valori sperimentali nella tabella. La leggera discrepanza ai poli è dovuta all'effetto dello schiacciamento della Terra, che si discosta dalla forma sferica. Nel prosieguo del libro, col simbolo $\vec{g}$ indicheremo ciò che nella [V.26] è stato indicato con $\vec{g}_{eff}$ (includendo cioè in esso l'effetto delle forze apparenti).

V.5. Il potenziale efficace e la forza di richiamo verso l'orbita di equilibrio

Come abbiamo visto, ogni pianeta percorre intorno al Sole un'orbita ellittica solo leggermente eccentrica, e dunque molto prossima al cerchio. Questa configurazione di moto è una configurazione stabile: se immaginiamo cioè che qualcuno cercasse di aumentare o diminuire il raggio dell'orbita, il pianeta verrebbe riattratto verso la sua orbita originaria da una forza radiale di richiamo.

Questo effetto può essere analizzato assai facilmente descrivendo il moto in un sistema di riferimento non inerziale, con origine nel sole S e uno degli assi (chiamiamolo asse $\vec{r}$) diretto da S verso la posizione P occupata istante per istante dal pianeta. Si tratta dunque di un sistema di riferimento ruotante con velocità angolare $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, continuando ad usare le notazioni introdotte nel paragrafo (V.3). Per conseguenza in questo sistema di riferimento non inerziale il pianeta, che può muoversi solo nella direzione $\vec{r}$, è soggetto oltre che alla forza gravitazionale $-\frac{GMm\,\hat{r}}{r^2}$, anche a una forza apparente centrifuga data da $m\omega^2\vec{r}$; cosicché la componente radiale F_r del risultante delle forze che su di esso agiscono è data da

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2} + m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r$$

Come abbiamo visto, il moto del pianeta può avere velocità angolare $\frac{d\varphi}{dt}$ non costante (se l'orbita non è circolare); ma è in ogni caso costante il momento angolare $\vec{p}$. Conviene pertanto esprimere la forza centrifuga $m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r$ in termini di p; cosa che può essere fatta facilmente tramite la [V.21]. Si ottiene:

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{p^2}{mr^3} \qquad \text{[V.27]}$$

Energia potenziale efficace

Questa forza è una forza conservativa, la cui energia potenziale U_{eff} (detta *energia potenziale efficace*) può essere facilmente calcolata integrando la [V.27] (e cambiando segno); si ottiene:

$$U_{eff}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{p^2}{2mr^2} \qquad \text{[V.28]}$$

avendo scelto come al solito pari a zero il valore della costante di integrazione, in modo che l'energia potenziale sia nulla al limite di r infinito.

La funzione [V.28] ha l'andamento qualitativamente mostrato in figura; essa si annulla per $\bar{r} = \dfrac{p^2}{2\,GMm^2}$ e presenta un minimo in corrispondenza di $r = r_0 = 2\bar{r} = \dfrac{p^2}{GMm^2}$, come si ottiene uguagliando a zero la [V.27] che rappresenta (a meno del segno) la derivata della [V.28].

Il valore $r = r_0$ del raggio (in corrispondenza del quale la funzione U_{eff} ammette il suo valore minimo $U_0 = -\dfrac{G^2m^3M^2}{2p^2}$) individua dunque, secondo quanto discusso nel par. IV.11, una posizione di equilibrio stabile nel sistema di riferimento ruotante. Fissato cioè un certo valore per il momento angolare p, esiste un solo preciso valore r_0 per r tale che se in esso viene posto il pianeta con velocità radiale nulla (e dunque solo con la velocità tangenziale corrispondente a quel valore di p) esso resta in quella posizione stabilmente percorrendo dunque - dal punto di vista del sistema inerziale - un'orbita circolare. Se il pianeta, essendo dotato di momento angolare p, viene posto su un'orbita di raggio diverso da r_0 (o se viene posto in r_0 con una componente radiale non nulla della velocità) esso viene richiamato verso r_0: nel sistema ruotante esso compie una oscillazione intorno a r_0; nel sistema inerziale, la sua orbita è ellittica anziché circolare.

Notiamo che intorno al punto di minimo l'energia potenziale è ben approssimata da una funzione del tipo $U(r) = k(r - r_0)^2 + U_0$, dove k è una opportuna costante. La forza di richiamo F_r, in vicinanza di r_0, può dunque essere espressa approssimativamente come:

$$F_r = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} \simeq -\frac{\partial}{\partial r}\left(k\,(r-r_0)^2\right) = -2\,k\,(r-r_0) \qquad \text{[V.29]}$$

Una forza di richiamo di questo tipo (proporzionale in modulo allo spostamento, e opposta ad esso in segno) viene detta una *forza elastica*.

Forza elastica di richiamo

V.6. Forze elastiche

Schematizzazione di corpo rigido

Molti degli oggetti solidi con cui abbiamo a che fare nella vita di tutti i giorni ci appaiono come sostanzialmente *indeformabili*: una schematizzazione adeguata a descrivere la maggior parte delle loro manifestazioni è quella di considerarne la forma e le dimensioni geometriche come immutabili (schematizzazione di corpo rigido).

Nella realtà, però, anche gli oggetti solidi subiscono delle deformazioni più o meno significative quando su di essi vengono esercitate delle forze.

Poniamo l'attenzione, ad esempio, su un oggetto metallico di forma parallelepipeda. Se appoggiando l'oggetto su un sostegno che impedisca alla sua base di muoversi, noi esercitiamo sull'altra sua base una forza $\vec{F}$ normale e distribuita sulla base stessa (ciò può essere fatto, ad esempio, comprimendo il campione fra le ganasce di un torchio) si riscontra sperimentalmente che la sua altezza h si accorcia: chiamiamo Δh la variazione di h.

Una volta deformato, il corpo esercita a sua volta sulla morsa una forza $\vec{f}$ uguale ed opposta alla forza $\vec{F}$ che dall'esterno esercitiamo su di esso: $\vec{f} = -\vec{F}$.

Sollecitazione a compressione

Fino a che l'intensità F della forza è tale che la deformazione Δh sia molto piccola rispetto all'altezza h, la deformazione stessa è reversibile: eli-

Deformazioni reversibili

minando la forza, l'oggetto riassume la forma primitiva. La deformazione Δh risulta inoltre ben descritta dalla legge:

$$\Delta h = \frac{h}{E}\frac{F}{S} \quad [V.30]$$

Modulo di Young

dove S è la superficie di base del campione e E è una costante caratteristica del materiale detta *coefficiente di elasticità* o *modulo di Young*. E ha le dimensioni di una forza diviso una superficie, e nel sistema S.I. si misura in N/m^2.

Sollecitazione a trazione

Se un campione dello stesso materiale viene sollecitato a *trazione* anziché a *compressione*, esso si allunga: e l'allungamento Δh è ancora descritto dalla [V.30]. Ciò significa che, chiamando F_h la proiezione di $\vec{F}$ nella direzione di h, si può scrivere

$$\Delta h = \frac{h}{E}\frac{F_h}{S} \quad [V.30.a]$$

che rappresenta una relazione che lega Δh, in valore e segno, alla proiezione della forza F_h esercitata sulla base del campione.

Tenuto conto che la forza $\vec{f}$ che il materiale esercita verso l'esterno è uguale e opposta alla forza $\vec{F}$ che su di esso viene applicata, dalla [V.30.a] si ricava:

$$\begin{cases} f_h = -K\Delta h \\ \text{con } K = \dfrac{ES}{h} \end{cases} \quad [V.31]$$

Legge di Hooke

La forza f_h longitudinale con cui il campione reagisce a un allungamento Δh è proporzionale e opposta in segno all'allungamento Δh stesso. Questa legge viene detta *legge di Hooke.*

Osserviamo che la legge di Hooke è espressa da una equazione formalmente identica alla [V.29]. Ciò non deve meravigliarci: l'analogia può essere facilmente giustificata, almeno in termini qualitativi, in base a considerazioni microscopiche.

Un atomo può essere assimilato a un sistema solare in miniatura, il cui «sole» è costituito dal *nucleo* (elettricamente positivo) e i «pianeti» dagli *elettroni* (elettricamente negativi). Come si vedrà nel volume dedicato all'elettromagnetismo, la forza che si esercita fra cariche puntiformi di segno opposto è descritta da una legge (*legge di Coulomb*) formalmente identica alla legge [V.3] di gravitazione universale.

Interpretazione microscopica della forza elastica

D'altra parte la struttura cristallina di un metallo è formata da atomi disposti ai vertici di poliedri regolari; e l'orbita degli elettroni più periferici di ogni atomo si trova a stretto contatto con l'orbita degli atomi contigui. Una forza di compressione (o trazione) esercitata sul campione macroscopico tende dunque a restringere (o dilatare) l'orbita degli elettroni: provocando una forza di richiamo degli elettroni stessi verso l'orbita di equilibrio, analoga a quella descritta dall'equazione [V.29]. La risultante di tutte queste forze microscopiche è quella che a livello macroscopico si manifesta come forza elastica con cui ogni oggetto reagisce alla forza esterna tendente a deformarlo.

Limite di elasticità
Carico di rottura

A proposito della legge di Hooke, vale la pena fare le seguenti osservazioni:

a) la [V.31] vale solo fino a che $f_{||}/S$ (o, equivalentemente, fino a che F/S della [V.30]) non supera un certo valore massimo L caratteristico del materiale in esame. Il valore di F/S per cui la legge di Hooke cessa di valere si chiama *limite di elasticità* L. Il limite di elasticità si misura in N/m^2, così come il modulo di Young E.

b) Aumentando la forza per unità di superficie F/S oltre il limite di elasticità, si raggiunge un valore per cui l'oggetto si rompe. Tale valore C_R si chiama *carico di rottura*, e si misura anch'esso in N/m^2.

c) La legge di Hooke vale solo fino a che la sollecitazione esercitata sul campione non ne modifica la forma geometrica. In particolare, se la superficie di base (sezione) del campione non è sufficientemente estesa, una forza di compressione tende a fare piegare il campione: in questo caso, che si presenta usualmente se ad esempio il campione è realizzato in gomma, la relazione fra F e Δh non è ovviamente descritta dalla legge di Hooke.

Un modo per garantirsi che il campione reagisca con legge elastica alle sollecitazioni, è quello di usare un sostegno rigido che impedisca le deformazioni trasversali consentendo solo le variazioni di lunghezza (ad esempio un astuccio telescopico come quello rappresentato schematicamente in figura).

Dotando il sostegno rigido telescopico di opportuna geometria, le sollecitazioni elastiche (sia a trazione che a compressione) possono anche essere trasmesse in qualunque desiderata direzione.

Astuccio telescopico contenente il materiale elastico

Tabella

Costanti elastiche di alcuni materiali

	$E(10^{10}\,N/m^2)$	$G(10^{10}\,N/m^2)$	Limite di elasticità $L(10^7\,N/m^2)$	Carico di rottura $10^7\,N/m^2$	
				a trazione	a compressione
Ferro	20	8	20	35	–
Acciaio	22	8,5	30	$50 \div 200$	–
Alluminio	7	2,5	–	10	–
Rame	10	4	$7 \div 30$	$20 \div 40$	–
Ottone	8	3	$7 \div 40$	$15 \div 50$	–
Piombo	1,5	0,5	$0,5 \div 1$	1	5
Vetro	6	2,5	–	$3 \div 9$	$60 \div 120$
Caucciù	$\simeq 10^{-4}$	–	$\simeq 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-1}$	–

Esempi

E.V.4. *Un filo di acciaio di sezione circolare e diametro $d = 1,5$ mm è appeso a un sostegno rigido. All'altro estremo si appende un oggetto di massa $M = 20$ kg. Quale allungamento subisce il filo, se la sua lunghezza originaria l era 1,5 m? Quale massa provocherebbe, con la sua forza peso, il raggiungimento del limite di elasticità? E quale massa corrisponde al carico di rottura?*

La sezione del filo è

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} = 1{,}77 \text{ mm}^2 = 1{,}77 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.$$

Il peso p dell'oggetto vale a sua volta

$$p = M \cdot g = 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 19{,}6\ N.$$

La [V.30] si scrive dunque nel nostro caso:

$$\Delta l = \frac{l}{E} \cdot \frac{p}{S} = \frac{1{,}5 \text{ m}}{22 \cdot 10^{10} \frac{N}{\text{m}^2}} \cdot \frac{19{,}6\ N}{1{,}77 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} \simeq 0{,}75 \text{ mm}$$

Il limite di elasticità L vale per l'acciaio (vedi tabella) $L = 30 \cdot 10^7 \frac{N}{\text{m}^2}$. Esso viene raggiunto per un valore M_L della massa tale che

$$\frac{M_L \cdot g}{S} = L\,; \quad M_L = \frac{SL}{g} = \frac{1{,}77 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 30 \cdot 10^7 \frac{N}{\text{m}^2}}{9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \simeq 54 \text{ kg}$$

Il carico di rottura, come si vede in tabella, è compreso fra $\simeq 2$ e $\simeq 7$ volte il limite di elasticità; e dunque la massa che lo fa raggiungere è compresa fra circa 100 e 350 kg.

Notare che la massa di 20 kg, che produceva meno dell'1‰ di allungamento, non era molto lontana (fattore $2 \div 3$) a quella che portava al limite di elasticità. Nel caso di fili di acciaio, la legge di Hooke vale dunque per allungamenti percentuali massimi dell'ordine di qualche millesimo.

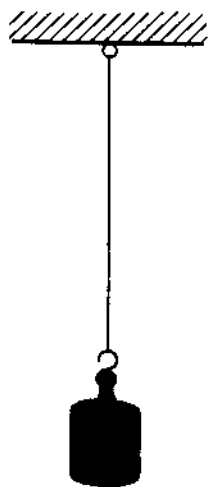
E.V.5. *Ad un elastico di caucciù, di sezione $S = 20$ mm² e lunghezza a riposo $l = 20$ cm, viene appeso un corpo di massa $m = 1$ kg. 1) Che allungamento subisce? 2) In corrispondenza di quale allungamento Δl_L si raggiunge il limite di elasticità? 3) Quale massa può sostenere al massimo l'elastico prima di rompersi?*

1) Si ha:

$$\Delta l = \frac{l}{E} \frac{mg}{S} = \frac{0{,}2 \, \cdot 1 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{10^6\ N/\text{m}^2 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 0{,}1 \text{ m}.$$

L'allungamento percentuale è

$$\frac{\Delta l}{l} = 0{,}5 = 50\%.$$

2) Si ha $\Delta l_L = \frac{l}{E} \cdot L$; cioè $\frac{\Delta l_L}{l} = \frac{L}{E} \simeq 1$. L'elastico può dunque subire un allungamento pari circa alla sua lunghezza a riposo, prima di raggiungere il limite di elasticità. Va notato che nel caso di un filo di acciaio il limite di elasticità sarebbe raggiunto per $\frac{\Delta l}{l} \simeq 10^{-3}$.

3) La massa M_R che sollecita l'elastico col carico di rottura C_R è tale che

$$\frac{M_R \cdot g}{S} = C_R ;$$

da cui

$$M_R = \frac{C_R \cdot S}{g} = 3 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \cdot \frac{20 \cdot 10^{-6}\ m^2}{9{,}8\ m/s^2} \simeq 6\ kg .$$

E.V.6. *Due elastici, ciascuno di lunghezza $L = 10$ cm e modulo di Young $E = 1{,}0 \cdot 10^6\ N/m^2$, hanno in comune un estremo P e sono vincolati all'altro estremo a due punti fissi A e B distanti fra di loro 2 L = 20 cm. Il primo elastico ha sezione $S_1 = 10\ mm^2$; il secondo ha sezione $S_2 = 20\ mm^2$. Si sposta il punto di giunzione P dalla posizione neutra N, muovendolo ortogonalmente alla direzione AB, fino a che la lunghezza di ciascun elastico non diviene pari a 2 L. Determinare la forza $\vec{f}$ di richiamo subita dal punto P.*

Nella configurazione ipotizzata, i punti ABP si trovano ai vertici di un triangolo equilatero di lato 2 l. Ogni elastico ha subito un allungamento Δl pari ad l; per cui si ha:

$$f_1 = \frac{\Delta l}{l} \cdot E \cdot S_1 = \frac{L}{L} \cdot E \cdot S_1 = 10^6 \frac{N}{m^2} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\ m^2 = 10\ N$$

(nella direzione PA)

$$f_2 = \frac{\Delta l}{l} \cdot E \cdot S_2 = \frac{L}{L} \cdot E \cdot S_2 = 10^6 \frac{N}{m^2} \cdot 20 \cdot 10^{-6}\ m^2 = 20\ N$$

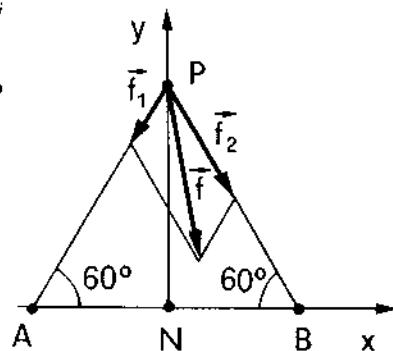
(nella direzione PB).

Scegliendo inoltre un sistema di riferimento cosi come indicato in figura, si ha:

$$\begin{cases} f_{1x} = -f_1 \sin 30° = -5\ N \\ f_{1y} = -f_1 \sin 60° = -5 \cdot \sqrt{3}\ N \end{cases} \qquad \begin{cases} f_{2x} = +f_2 \sin 30° = 10\ N \\ f_{2y} = -f_2 \sin 60° = -10 \cdot \sqrt{3}\ N \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{cases} f_x = f_{1x} + f_{2x} = 5\ N \\ f_y = f_{1y} + f_{2y} = -25{,}95\ N \end{cases}$$

Il modulo della forza risultante subita da P è $f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{700} = 26{,}46\ N$; essendo $f_x \neq 0$, vediamo anche he tale forza risultante *non* è diretta verso il punto neutro N.

Fino ad ora, abbiamo considerato la forza elastica esercitata da un corpo la cui forma sia quella di un prisma o di un cilindro retto, quando venga sollecitato ortogonalmente alle basi. Per forme e per sollecitazioni diverse, la reazione elastica può essere studiata analizzando l'allungamento (o accorciamento) subito da ciascuna delle fibre elementari che costituiscono il corpo. Consideriamo ad esempio una sbarretta parallelepipeda di lunghezza h sufficientemente grande rispetto alle dimensioni trasversali a e b; supponiamo che essa sia bloccata a una delle sue basi. Esercitando all'altro estremo una forza trasversale, essa si flette: sia $\Delta \vec{s}$ lo spostamento trasversale che supponiamo molto minore di h. Per conseguenza della flessione, il bordo AB subisce un allungamento Δh e il bordo $A'B'$ un accorciamento pari circa a $-\Delta h$; e se b è

Δs << h

molto minore di h, Δh è molto minore di Δs. Mediante considerazioni geometriche relativamente semplici, di cui qui tuttavia evitiamo di entrare nel merito, si può trovare la relazione che intercorre fra la flessione Δs e la variazione di lunghezza di ciascuna fibra longitudinale della sbarretta; e poiché queste variazioni di lunghezza sono in relazione univoca con le forze f_i con cui ciascuna fibra reagisce alla compressione (o trazione), si ricava infine una relazione fra il risultante $\vec{f}$ di tutte le forze $\vec{f}_i$ e la flessione $\Delta\vec{s}$. Nel caso in esame (flessione trasversale) si ricava

Sollecitazione a flessione

$$\vec{f} = -K\Delta\vec{s} \qquad \text{con } K = \frac{Eab^3}{4h^3} \qquad \begin{array}{l} a\text{: profondità della sbarretta} \\ b\text{: spessore} \\ h\text{: lunghezza.} \end{array} \tag{V.33}$$

Analogamente per una molla ad elica si trova fra la forza $\vec{f}$ e l'elongazione $\Delta\vec{s}$ una relazione del tipo

$$\vec{f} = -K\Delta\vec{s}$$
$$K = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{l R^2} \tag{V.34}$$

Modulo di rigidità

dove G è anch'essa una costante caratteristica del materiale (*modulo di rigidità*); r è il diametro del filo con cui la molla è realizzata; R è il raggio dell'elica; l la lunghezza della molla.

In molti casi, anche in presenza di forze molto intense la deformazione indotta sul corpo si mantiene, nel suo complesso, trascurabile; e se si prova ad esercitare forze così intense da provocare sensibili modifiche della forma, in quelle fibre del corpo sottoposte a maggiore elongazione si generano deformazioni irreversibili, e per elongazioni ancora maggiori si manifestano lacerazioni e rotture. In questi casi, la schematizzazione più efficace per descrivere quel corpo è quella di considerarlo rigido: si cercherà di utilizzarlo assicurandosi sempre che non venga superato quel livello di sollecitazione capace di provocarne un danneggiamento irreversibile. Dal punto di vista dinamico, esso non è adatto come strumento per esercitare su corpi in movimento una forza calibrata e regolabile; esso può venire usato solo come *vincolo*, cioè come strumento per imporre al moto di corpi in movimento precise caratteristiche geometriche: un asse che costringe un corpo a ruotare intorno a una retta fissa; un appoggio che costringe un oggetto a muoversi su una superficie piana, ecc.

Vincoli

Il modo in cui i vincoli possono essere trattati dal punto di vista dinamico verrà discusso nel paragrafo V.8.

Per realizzare strumenti che consentano di esercitare su oggetti in movimento una forza elastica riproducibile e controllabile, è necessario ricorrere a particolari accorgimenti nella scelta dei materiali e delle geometrie in modo che siano consentite grandi elongazioni prima di raggiungere il limite di elasticità. Abbiamo già visto (esempio E.V.5) che una fettuccia di caucciù può subire allungamenti confrontabili con la propria lunghezza prima che venga raggiunto il limite di elasticità. Nel caso dell'acciaio (e della maggior parte dei materiali di uso comune), il limite di elasticità viene raggiunto per allungamenti percentuali molto modesti (esempio E.V.4): per avere allungamenti significativi, si dovrà ricorrere a geometrie particolari, ad esempio a una molla elicoidale. Nell'un caso e nell'altro, come abbiamo già accennato, per evitare deformazioni trasversali è di solito necessario

costringere il mezzo elastico, mediante opportune guide, a subire deformazioni in una sola direzione. Per conseguenza, la forza elastica si manifesta nella maggior parte dei casi con una forza *unidimensionale*; scegliendo l'asse x coincidente con l'unica direzione consentita per il moto, (con l'origine coincidente col punto neutro del dispositivo elastico), la legge della forza si scrive come

Forza elastica unidimensionale

$$f = -Kx \qquad \text{[V.35]}$$

Usando particolari accorgimenti, si possono realizzare dispositivi che consentono spostamenti in uno spazio bidimensionale, esercitando una forza di richiamo opposta allo spostamento $\vec{r}$ rispetto al punto neutro N

$$\vec{f} = -K\vec{r}$$

L'esempio E.V.6 ci mostra che, per ottenere ciò, è necessario tenere in particolare cura la simmetria del sistema. In caso contrario, la forza di richiamo non è più diretta verso il punto neutro N: la forza elastica cessa in questo caso di essere una forza centrale, ed assume espressioni di volta in volta diverse.

Limitiamoci qui a considerare la forza elastica unidimensionale [V.35]. Tale forza è conservativa: per essa infatti le [IV.61] sono ovviamente sempre soddisfatte (poiché f_x è funzione della sola variabile x, mentre $f_y = f_z = 0$). La [IV.74] si riduce a:

$$U(x) = -\int_a^x f\,dx = -\int_a^x -Kx\,dx = \frac{1}{2}Kx^2 \qquad \text{[V.36]}$$

avendo scelto per comodità pari a zero la costante arbitraria di integrazione.

La legge del moto di un punto materiale che si muove sotto l'azione di una forza elastica unidimensionale come la [V.35] può essere ricavata a partire dalla equazione [III.5] che esprime il secondo principio della dinamica, ovvero a partire dalla [IV.79] che esprime il principio di conservazione dell'energia. Tenuto conto della [V.35] e della [V.36], la [III.5] e la [IV.79] si scrivono rispettivamente, per un punto materiale sottoposto a forza elastica unidimensionale, come:

Equazioni dinamiche dell'oscillatore armonico

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \qquad \text{secondo principio della dinamica} \qquad \text{[V.37]}$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = E \qquad \text{teorema di conservazione dell'energia} \qquad \text{[V.38]}$$

La [V.37] viene scritta di solito nella forma (equazione dell'*oscillatore armonico*):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0 \qquad \text{[V.39]}$$

Come vediamo, la [V.39] è formalmente identica alla [IV.33]; la sua soluzione sarà dunque del tutto analoga alla [IV.34]:

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{[V.40]}$$

con $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$, mentre x_0 (elongazione massima) e φ (fase iniziale) vanno determinate a partire dalle condizioni iniziali analogamente a quanto mostrato nell'esempio E.IV.9.

Esempi

E.V.7. *Verificare che la legge oraria [V.40] soddisfa, come deve, la equazione di conservazione dell'energia [V.38].*

Partendo dalla [V.40], e derivando, si ha

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Sostituendo queste relazioni nella [V.38] si ha:

$$E = \frac{m}{2}\,\omega^2 x_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}\,K x_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Tenendo conto che $\omega^2 = \dfrac{K}{m}$, la precedente relazione diviene:

$$E = \frac{1}{2}\,K x_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}\,K x_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}\,K x_0^2 (\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)) = \frac{1}{2}\,K x_0^2 = \text{costante}$$

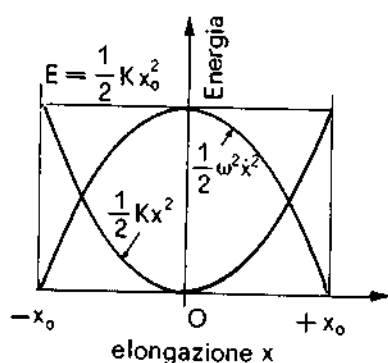
(Avendo tenuto conto del fatto che $\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) = 1$).

E.V.8. *Un punto materiale di massa $m = 20$ g si muove sottoposto a una forza elastica unidimensionale $f = -Kx$, con $K = 0{,}5$ N/m. Determinare il periodo T delle sue oscillazioni.*

Si ha $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (vedi esempio E.IV.8); e nel nostro caso si ha

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{0{,}5\ N/m}{20 \cdot 10^{-3}\ kg}} = \sqrt{25\ s^{-2}} = 5\ s^{-1}.$$

Dunque $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{6{,}28}{5}\ s \simeq 1{,}26\ s$.

Poiché l'oscillatore armonico è un sistema a un solo grado di libertà sottoposto a forze conservative, la sua legge oraria [V.40] poteva essere ricavata anche – come abbiamo più sopra accennato – a partire dalla legge di conservazione dell'energia.

Tenuto conto del risultato ottenuto nell'esempio E.V.7 $\left(E = \frac{1}{2} K x_0^2\right)$, la [V.38] può essere scritta come

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K x_0^2$$

da cui

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{K}{m}(x_0^2 - x^2)}$$

Separando le variabili e integrando

$$\int \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{K}{m}(x_0^2 - x^2)}} = t + \text{cost} .$$

Questa relazione è formalmente identica alla [IV.86]; eseguendo l'integrale si perviene dunque alla [V.40], analogamente a come, a partire dalla [IV.86], eravamo giunti alla [IV.87].

V.7. Forze viscose di resistenza del mezzo

Molto spesso nella pratica quotidiana ci capita di osservare oggetti che si muovono immersi in un fluido (nell'aria atmosferica, in acqua, ecc.): il fluido esercita allora una forza frenante che si oppone al moto (forza di *resistenza del mezzo*).

Resistenza del mezzo

Questa forza dipende in maniera assai complessa da una quantità di parametri caratteristici dell'oggetto che si muove (dimensioni geometriche, forma, caratteristiche superficiali), del fluido entro cui il moto avviene (densità, viscosità, ecc), delle condizioni di moto dell'oggetto relativamente al fluido. Per la trattazione della forza di resistenza del mezzo è necessario di norma ricorrere a metodi empirici: benché le caratteristiche generali delle relazioni che legano fra di loro i parametri in gioco possano essere talvolta ricavate in base a considerazioni di carattere dimensionale, i valori numerici dei parametri devono essere ricavati da misure dirette (ad esempio nella «galleria del vento»).

Solo per geometrie molto semplici e condizioni di moto molto particolari la forza di resistenza del mezzo può essere determinata in base a considerazioni puramente teoriche: alcuni esempi verranno trattati nel capitolo dedicato alla meccanica dei fluidi.

Qui ci limitiamo a considerare in termini fenomenologici un caso molto semplice che si presenta quando la forma dell'oggetto sia sufficientemente regolare e la sua velocità sufficientemente bassa perché gli spostamenti di fluido provocati dal passaggio dell'oggetto in movimento non siano accompagnati da alcun vortice (moto laminare).

Moto laminare

In questo caso la forza di resistenza del mezzo (se il corpo è dotato di simmetria intorno alla direzione di moto) risulta essere ben descritta dalla seguente espressione

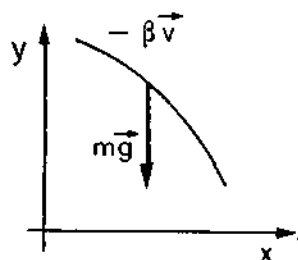
$$\vec{f} = -\beta \vec{v} \qquad \text{[V.41]}$$

dove β è un coefficiente dipendente dalla forma dell'oggetto e dalle caratteristiche fisiche del fluido.

La forza [V.41] non è una forza conservativa: condizione necessaria (anche se non sufficiente) perché una forza sia conservativa è che essa sia *posizionale*, cioè dipenda solo dalle coordinate del punto; mentre la [V.41] in ogni posizione assume valore diverso a seconda della velocità con cui il punto materiale passa da quella posizione. La forza [V.41] ha verso sempre opposto alla velocità, e dunque anche allo spostamento elementare $d\vec{s} = \vec{v}\,dt$; essa compie pertanto un lavoro sempre negativo, e tende dunque a far diminuire continuamente l'energia meccanica del punto materiale in movimento.

Analizziamo in maggior dettaglio l'effetto che la forza di resistenza del mezzo produce sul moto facendo riferimento a due esempi concreti.

V.7.1. *Moto di un grave sottoposto a forza di resistenza viscosa*

La equazione del moto $\vec{f} = m\vec{a}$ si scrive in questo caso:

$$m\vec{g} - \beta\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{[V.42]}$$

Scegliamo un sistema di riferimento con asse x orizzontale e asse y verticale orientato verso l'alto. Proiettando la [V.42] sugli assi si ha

$$\begin{cases} -\beta v_x = m\dfrac{dv_x}{dt} \\ -mg - \beta v_y = m\dfrac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} v_x = -\dfrac{m}{\beta}\dfrac{dv_x}{dt} \\ \dfrac{mg}{\beta} + v_y = -\dfrac{m}{\beta}\dfrac{dv_y}{dt} \end{cases} \qquad \text{[V.43]}$$

Le [V.43] sono due equazioni differenziali disaccoppiate del tipo:

$$a + v = -b\frac{dv}{dt} \qquad \text{[V.44]}$$

con

$$\begin{cases} b = \dfrac{m}{\beta};\; a = 0 & \text{nella prima delle [V.43]} \\ b = \dfrac{m}{\beta};\; a = \dfrac{mg}{\beta} & \text{nella seconda delle [V.43]} \end{cases} \qquad \text{[V.45]}$$

La [V.44] è una equazione differenziale del primo ordine nella incognita $v(t)$; essa può essere facilmente integrata per separazione di variabili:

$$\frac{dv}{a+v} = -\frac{dt}{b}; \qquad \text{integrando}$$

$$\ln(a+v) = -\frac{t}{b} + \text{cost}$$

Passando dai logaritmi ai numeri:

$$a + v = e^{-t/b+\text{cost}} = Ce^{-t/b} \qquad \text{[V.46]}$$

La costante di integrazione C può essere determinata conoscendo le condizioni iniziali, cioè il valore v_o che la variabile v assume per $t = 0$; ponendo infatti $t = 0$ nella [V.46] si ha

$$a + v_o = C$$

che sostituita nella [V.46] ci dà

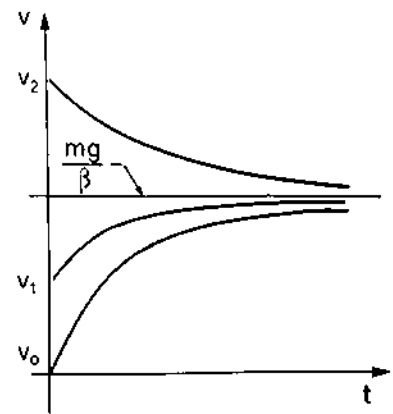
$$a + v = (a + v_o)\, e^{-t/b}$$

ovvero

$$v(t) = (a + v_o)\, e^{-t/b} - a$$

Tenuto conto delle [V.45], la soluzione delle [V.43] risulta dunque infine:

$$\begin{cases} v_x = v_{ox}\, e^{-\frac{\beta}{m}t} \\ v_y = \left(\dfrac{mg}{\beta} + v_{oy}\right) e^{-\frac{\beta}{m}t} - \dfrac{mg}{\beta} \end{cases} \qquad \text{[V.47]}$$

Qualunque sia il valore iniziale della velocità (ad es. v_o, v_1 o v_2) per $t \to \infty$ v tende al valore $\frac{mg}{\beta}$.

Velocità limite in caduta libera

Vediamo che all'aumentare del tempo t la componente orizzontale della velocità v_x diminuisce con legge esponenziale, e tende a zero per $t \to \infty$. Quanto alla componente verticale della velocità, v_y, qualunque sia il valore v_{oy} che essa ha all'istante $t = 0$, per $t \to \infty$ essa tende al valore asintotico limite $v_{y\infty} = -\frac{mg}{\beta}$. La velocità limite è negativa (il corpo cioè viaggia verso il basso), e il suo modulo è tanto più piccolo quanto più grande è il rapporto $\frac{\beta}{m}$: poiché, fissato il fluido (aria), il parametro β dipende solo dalla forma dell'oggetto, la velocità limite di caduta libera di un oggetto di forma stabilita è tanto maggiore quanto più grande è la sua massa. Fissata invece la massa, la velocità di caduta libera è tanto minore quanto più grande è β. Il parametro β aumenta all'aumentare della area della sezione che l'oggetto in moto ha normalmente alla direzione del moto; questo è il motivo per cui un paracadute ha l'effetto di far diminuire notevolmente la velocità con cui un oggetto pesante cade liberamente.

V.7.2. *Moto oscillatorio smorzato*

Oscillatore smorzato

Consideriamo un oscillatore armonico unidirezionale lungo l'asse x. La presenza di una forza viscosa di resistenza del mezzo introduce al secondo membro della [V.37] un termine del tipo $f = -\beta v = -\beta \frac{dx}{dt}$; per cui la [V.37] stessa diviene

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - \beta\frac{dx}{dt}$$

ovvero

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}x = 0 \qquad [V.48]$$

La [V.48] è una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti; essa ammette soluzione generale del tipo (vedi appendice A):

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \qquad [V.49]$$

dove A e B sono due costanti di integrazione determinabili attraverso le condizioni iniziali; mentre α_1 e α_2 sono le soluzioni della equazione algebrica associata

$$\alpha^2 + \frac{\beta}{m}\alpha + \frac{K}{m} = 0 \qquad [V.50]$$

per cui

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\Delta} \quad \text{con } \gamma = \frac{\beta}{2m}; \quad \Delta = \frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{K}{m} \qquad [V.51]$$

Le caratteristiche del moto risultano diverse a seconda che α_1 e α_2 siano reali o complessi; cioè a seconda del segno di Δ.

a) $\Delta < 0$, cioè $\frac{K}{m} > \frac{\beta^2}{4m^2}$

Ponendo $\omega^2 = \frac{K}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}$, si ha

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\omega \qquad [V.52]$$

dove i è l'unità immaginaria. Inserendo la [V.52] nella [V.49] otteniamo

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}e^{+i\omega t} + Be^{-\gamma t}e^{-i\omega t}.$$

Ricordando che $e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$, la precedente relazione diviene

$$x(t) = e^{-\gamma t}((A+B)\cos\omega t + i(A-B)\sin\omega t)$$

Energia di un oscillatore smorzato.

Al tempo t, l'energia meccanica dell'oscillatore è

$$E(t) = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Nell'intervallo dt, la variazione (negativa) di energia è:

$$dE = \frac{dE}{dt}dt = Kxv\,dt + mv\frac{dv}{dt}dt$$

ma,

$$m\frac{dv}{dt} = -Kx - \beta v,$$

per cui

$$dE = dt\,[(-\beta v)\,v],$$

per cui il termine tra parentesi quadre rappresenta la potenza (negativa) della forza di attrito.

e ponendo $(A + B) = x_0 \sin\varphi$; $i(A - B) = x_0 \cos\varphi$:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t}(\cos\omega t \sin\varphi + \sin\omega t \cos\varphi) = x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad [V.53]$$

con
$$\gamma = \frac{\beta}{2m}; \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4Km}}$$

essendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

Si vede che l'attrito riduce la pulsazione rispetto al caso di oscillatore libero.

La [V.53] rappresenta una sinusoide di ampiezza $x_0 e^{-\gamma t}$, cioè di ampiezza decrescente esponenzialmente col tempo. Il suo grafico è del tipo rappresentato in figura.

Nel caso di piccolo smorzamento, cioè per $\frac{\beta^2}{4Km} \ll 1$, si può scrivere:

$$x(t) \simeq x_0 e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi).$$

b) $\Delta > 0$, cioè $\frac{\beta^2}{4m^2} > \frac{K}{m}$

In questo caso le due radici $\alpha_{1,2}$ sono reali e negative; la [V.49] diviene la somma di due esponenziali decrescenti

$$x(t) = A e^{-|\alpha_1| t} + B e^{-|\alpha_2| t}$$

avendo indicato con $|\alpha_1|$ e $|\alpha_2|$ i valori assoluti di α_1 ed α_2. La forza di resistenza viscosa domina completamente il moto, portandolo a smorzarsi prima che abbia modo di avvenire anche una sola oscillazione.

L'ampiezza delle elongazioni di un oscillatore smorzato decade come $e^{-\gamma t}$. La costante $\tau = \frac{1}{\gamma}$ ha le dimensioni di un tempo; essa è detta costante di tempo dello smorzamento. Graficamente, τ è rappresentato dalla tangente dell'angolo θ mostrato in figura.

c) $\Delta = 0$, cioè $\frac{\beta^2}{4m^2} = \frac{K}{m}$

Le due radici α_1 ed α_2 sono coincidenti e negative

$$\alpha_{1,2} = -\gamma$$

La soluzione generale diviene

$$x(t) = (a + bt)\, e^{-\gamma t}$$

ed ha un andamento qualitativamente simile a quello caratteristico del caso precedente.

elongazione massima

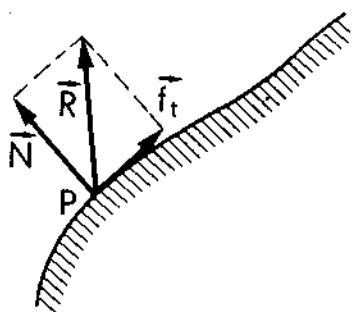
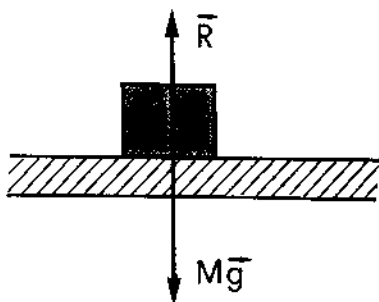
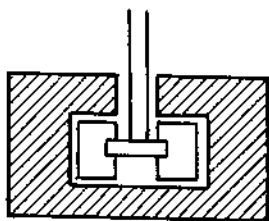
V.8. Reazioni vincolari

Sovente, il moto di un sistema (e in particolare di un punto) materiale è condizionato dalla presenza di vincoli: esso è cioè costretto, mediante opportuni sostegni rigidi, a soddisfare precise condizioni geometriche. Ad esempio il tavolo da biliardo costringe le biglie a muoversi su un piano (e più in particolare su una porzione di piano a forma rettangolare); il braccio inestensibile di un pendolo semplice costringe la massa puntiforme a muoversi su una circonferenza (o su una sfera); i binari di una linea ferroviaria costringono il treno a muoversi su una traiettoria prestabilita; ecc.

Vincoli

IL MOTO DI UN SISTEMA ...

Vincoli unilaterali

Vincoli bilaterali

Alcuni vincoli sono *unilaterali*, cioè impediscono al sistema di accedere a certe porzioni di spazio, ma non costringono il sistema stesso a mantenersi a contatto col vincolo: ad esempio un tavolo di sostegno impedisce a un oggetto di scendere sotto il piano di appoggio, ma nulla vieta di sollevare l'oggetto sopra il piano stesso. Altri vincoli sono *bilaterali*, cioè costringono il sistema a mantenersi sempre in contatto con essi: ad esempio una cerniera, o un binario bilaterale come quello schematizzato in figura.

I condizionamenti geometrici che i vincoli esplicano sul moto del sistema materiale considerato sono esercitati tramite l'azione di forze che agiscono *per contatto* fra il sistema e il vincolo. Ad esempio, quando appoggiamo un oggetto pesante su un tavolo, il peso $M\vec{g}$ dell'oggetto deforma leggermente il tavolo: questo esercita dunque sull'oggetto una forza elastica di richiamo $\vec{R}$ ortogonale al piano, forza che equilibra la forza peso e impedisce così all'oggetto di cadere. Tuttavia le deformazioni subite dal vincolo sono così modeste che è difficile parametrizzare queste forze vincolari in funzione delle deformazioni stesse. Il modo più conveniente – ed anzi l'unico modo praticamente attuabile – per calcolare o misurare le forze vincolari è quello di ricorrere a metodi dinamici, basati cioè sulla misura delle altre forze che agiscono sul sistema materiale, nonché sulla misura dello stato di moto del sistema materiale stesso. Nell'esempio testé fatto di un oggetto appoggiato su un tavolo, sapendo che su di esso agisce (oltre alla forza vincolare $\vec{R}$ incognita) anche la forza peso $M\vec{g}$ nota, e constatando che l'oggetto è fermo (e dunque la sua accelerazione $\vec{a}$ è nulla), potremo scrivere il secondo principio della dinamica come:

$$M\vec{g} + \vec{R} = M\vec{a} = 0$$

ricavando così che

$$\vec{R} = -M\vec{g}$$

Forze attive e reazioni vincolari

Le forze vincolari vengono così analizzate in termini della loro capacità di opporsi alle forze note (forze *attive*) che agiscono sul sistema: per questo motivo esse vengono normalmente designate col nome di *reazioni* vincolari. L'analisi delle reazioni vincolari risulta semplificata scomponendo la reazione $\vec{R}$ stessa nella sua componente N normale al vincolo e nella componente f_t tangente al vincolo stesso. La componente tangenziale f_t viene detta *forza di attrito*. Poiché la reazione $\vec{R}$ è presente solo fino a che il punto P si muove a contatto col vincolo, la componente N (quando è diversa da zero), è sempre ortogonale allo spostamento elementare $d\vec{s}$ del punto; il lavoro elementare dL che la reazione vincolare compie è dunque dato da

Forza di attrito

$$dL = \vec{R} \cdot d\vec{s} = f_t\, ds$$

Solo la componente tangenziale (forza di attrito) contribuisce al lavoro (che come vedremo è sempre negativo, cioè dissipativo) compiuto dalla reazione vincolare. Mediante opportuni accorgimenti (lubrificazione, cuscinetti, ecc.) si cerca di solito di ridurre quanto più possibile la forza di attrito; cosicché almeno in prima approssimazione conviene limitare l'analisi della forza vincolare alla sola componente normale N. Discutiamo qui di seguito come questa analisi possa essere condotta: lo faremo introducendo il metodo generale che può essere impiegato, e sviluppando un paio di esempi. Nel prossimo paragrafo vedremo come, una volta nota la componente N, possa essere valutata la forza di attrito f_t.

Cominciamo con l'analizzare il caso di vincoli bilaterali.

Caso di vincolo bilaterale

Consideriamo dunque un punto materiale P che si muove sottoposto a certe forze di risultante $\vec{f}$. Per esso, dunque, l'equazione del moto si scrive:

$$\vec{f} = m\vec{a} \qquad \text{[V.54]}$$

Se il moto del punto non è sottoposto a vincoli, esso può muoversi liberamente nello spazio; la legge oraria è specificata dalle tre funzioni:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \text{[V.55]}$$

fra di loro indipendenti. Queste tre funzioni rappresentano le incognite del sistema di tre equazioni differenziali [V.54], in cui il primo membro $\vec{f}$ (forze attive) è noto in funzione della posizione del punto (ed eventualmente della sua velocità e del tempo). Il sistema di equazioni [V.54] può dunque essere risolto (prescindendo dalle difficoltà matematiche che ciò possa eventualmente comportare).

In presenza di un vincolo bilaterale, al primo membro della [V.54] compare la reazione vincolare incognita $\vec{R}$:

$$\vec{R} + \vec{f} = m\vec{a} \qquad \text{[V.56]}$$

Notiamo che in assenza di attrito la reazione $\vec{R}$ è normale al vincolo. Pertanto se il vincolo costringe il punto a giacere su una superficie (vincolo superficiale), la reazione vincolare rappresenta una sola incognita scalare (la sua direzione è nota in ogni posizione, una volta nota la forma del vincolo; e dunque resta incognito solo il suo valore N); mentre se il vincolo costringe il punto a muoversi su una traiettoria prestabilita (vincolo lineare), la reazione $\vec{R}$ rappresenta due incognite scalari (si sa infatti che essa giace nel piano ortogonale alla traiettoria).

Incognite cinematiche e incognite dinamiche nella equazione del moto

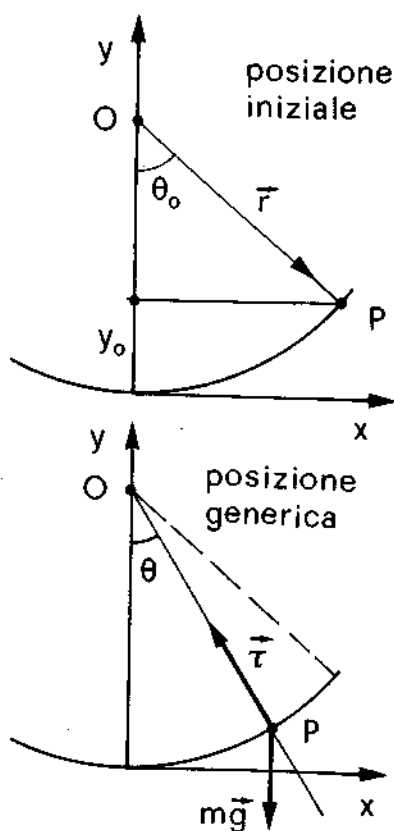
Tuttavia il vincolo, imponendo precise condizioni geometriche al moto, introduce delle relazioni che legano fra di loro le coordinate x, y, z del punto: e dunque le tre funzioni [V.55] non sono più fra di loro indipendenti. Più precisamente, un vincolo superficiale introduce una relazione fra le tre funzioni [V.55]; mentre un vincolo lineare introduce due relazioni.

In altri termini possiamo dire che la presenza di un vincolo introduce delle incognite dinamiche al primo membro della [V.56]; ma elimina, in pari numero, incognite cinematiche al secondo membro. In presenza di un vincolo superficiale, bastano così due equazioni dinamiche per risolvere il moto; e introducendo le soluzioni al secondo membro delle [V.56] si può determinare l'unica incognita dinamica al primo membro. In presenza di un vincolo lineare (traiettoria prestabilita) basta una sola equazione dinamica per determinare completamente il moto; e introducendo la soluzione al secondo membro della [V.56] si possono determinare le due incognite dinamiche presenti al primo membro.

La equazione (o le equazioni) che può essere usata per risolvere il moto, potrà essere una (o due) delle componenti della [V.56], se tale componente non contiene la reazione vincolare; oppure una opportuna elaborazione delle [V.56] che elimini la reazione stessa. Nel caso particolare di moto su traiettoria prestabilita sotto l'azione di forze attive conservative,

per la soluzione della legge del moto conviene usare l'equazione di conservazione dell'energia (secondo il metodo discusso nel par. IV.10) considerato che in assenza di attrito la reazione vincolare non compie alcun lavoro.

Esempio

Reazione vincolare nel pendolo semplice

E.V.9. *Un pendolo semplice di lunghezza r viene abbandonato da fermo in posizione formante un angolo θ_0 con la verticale. Determinare la reazione vincolare (tensione τ del filo) in funzione della posizione del pendolo.*

Il pendolo compie un moto piano; per cui l'equazione del moto [V.56]:

$$\vec{\tau} + m\vec{g} = m\vec{a} \qquad [V.57]$$

proiettata sugli assi si riduce a due sole equazioni scalari (la componente sull'asse z essendo identicamente nulla)

$$\begin{cases} \tau_x = m a_x \\ \tau_y - mg = m a_y \end{cases} \qquad [V.58]$$

Nello scrivere le [V.58] abbiamo tenuto conto del fatto che – per come sono stati scelti gli assi – la forza peso ha proiezione nulla sull'asse x e proiezione $-mg$ sull'asse y.

Il vincolo, che costringe il punto a compiere una traiettoria circolare, introduce una relazione fra le coordinate x e y; infatti entrambe queste variabili sono esprimibili in funzione dell'unico parametro θ:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \\ y = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad [V.59]$$

e basta dunque determinare come θ dipende dal tempo per conoscere $x(t)$ e $y(t)$. D'altra parte anche le componenti τ_x e τ_y della reazione vincolare $\vec{\tau}$ non sono fra di loro indipendenti; essendo $\vec{\tau}$ diretta secondo il raggio (e in verso opposto), si ha infatti:

$$\begin{cases} \tau_x = -\tau\sin\theta \\ \tau_y = \tau\cos\theta \end{cases} \qquad [V.60]$$

Introducendo le [V.60] e le [V.59] (dopo averle derivate due volte) nelle [V.58], queste ultime possono essere scritte in termini della incognita dinamica τ e della incognita cinematica $\theta(t)$. La soluzione potrebbe poi essere trovata – in linea di principio – impiegando tecniche usuali nella soluzione dei sistemi: ricavando τ dalla prima e sostituendo nella seconda, si ottiene una equazione differenziale avente come unica incognita la funzione $\theta(t)$; una volta risolta questa, introducendo la $\theta(t)$ nella prima delle [V.58] si ricaverebbe τ.

Tuttavia il problema può essere risolto più facilmente come segue.

Trattandosi di un sistema a un solo grado di libertà sottoposto a forze conservative, la legge del moto può essere trovata usando il teorema di conservazione dell'energia. Questo si scrive:

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgy = E = mgy_0 \quad \text{(l'energia cinetica iniziale essendo nulla)}$$

da cui

$$\frac{1}{2} m v^2 = mg(y_0 - y) = mgr(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad [V.61]$$

D'altra parte, proiettando la [V.57] sul raggio $\bar{r}$, si ha:

$$- \tau + mg \cos\theta = m a_{\bar{r}} \qquad [V.62]$$

con $a_{\bar{r}}$ accelerazione radiale. Ma l'accelerazione radiale in un moto circolare di raggio r è centripeta e il suo modulo vale $\frac{v^2}{r}$:

$$a_{\bar{r}} = -\frac{v^2}{r}$$

Dal confronto fra questa relazione e la [V.61] si ha

$$m a_{\bar{r}} = -2\, mg (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

che inserita nella [V.62] ci dà

$$- \tau + mg \cos\theta = -2\, mg (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

da cui infine

$$\tau = mg (3 \cos\theta - 2 \cos\theta_0)$$

che, fornendoci la reazione vincolare τ in funzione dell'angolo θ, risolve il quesito del problema.

Il caso di vincoli unilaterali

Contrariamente ai vincoli bilaterali, per i quali la componente normale N della reazione vincolare può essere sia positiva che negativa (i vincoli bilaterali possono sia *tirare* che *spingere*), nel caso dei vincoli unilaterali la reazione vincolare normale può essere diretta in un verso solo. Notiamo, per inciso, che nel caso del pendolo semplice trattato nell'esempio E.V.9 eravamo a stretto rigore in presenza di un vincolo unilaterale (si avrebbe un vincolo bilaterale se il filo fosse sostituito con una sbarretta rigida); tuttavia almeno in tutto l'emisfero inferiore, cioè fino a che il punto materiale P non viene sollevato al di sopra del punto di sospensione O, la configurazione delle sollecitazioni è tale per cui il punto P non abbandona la superficie della sfera, e il vincolo si comporta di fatto come un vincolo bilaterale.

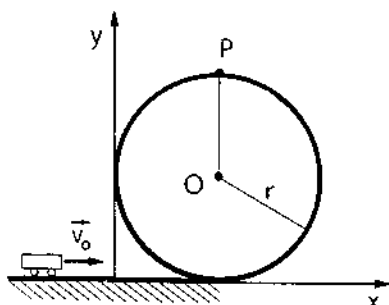
Nel caso generale, il moto in presenza di vincoli unilaterali può essere trattato come segue:

a) Si risolve il problema ipotizzando che il vincolo unilaterale sia sostituito con un vincolo bilaterale. Utilizzando la metodologia introdotta sopra, e illustrata anche nell'esempio E.V.9, si calcola il valore della componente N della reazione vincolare proiettata sulla normale *uscente* dal vincolo.

b) Si verifica il segno di N. Fino a che $N > 0$, il vincolo bilaterale *spinge*. Questa stessa azione può essere svolta anche dal vincolo unilaterale; anche in presenza di vincolo unilaterale, il punto in moto mantiene dunque il contatto col vincolo. Quando invece $N < 0$, il vincolo bilaterale *tira*. Questa azione non può essere svolta dal vincolo unilaterale; e dunque se la natura del vincolo è unilaterale il punto materiale abbandona il contatto col vincolo, e a partire dalla posizione in cui è $N = 0$ prende a muoversi come un punto libero da vincoli.

Esempio

Giro della morte

E.V.10. *Un carrello viene lanciato con velocità iniziale* v_0 *lungo un binario orizzontale che poi presenta un avvolgimento circolare di raggio* r. *Calcolare (nell'ipotesi di assenza di attrito) il minimo valore che deve essere dato alla velocità* v_0 *affinché il carrello compia il «giro della morte» senza staccarsi dai binari.*

Il teorema di conservazione dell'energia consente di calcolare facilmente la velocità del carrello in funzione della posizione, e in particolare in funzione della quota y:

$$\frac{1}{2}\, m v_0^2 = \frac{1}{2}\, m v^2 + m g y\,; \quad \text{da cui} \quad v^2 = v_0^2 - 2 g y\,.$$

Per assicurarsi che il carrello non cada, distaccandosi dal binario, basta verificare che ciò non accada nel punto più alto della traiettoria, cioè nel punto P in cui si ha $y = 2r$ e in cui dunque la relazione precedente diviene:

$$v^2 = v_0^2 - 4 g r \tag{V.63}$$

Scrivendo l'equazione [V.56] in corrispondenza del punto P e proiettando nella direzione PO (normale uscente dal vincolo) si ha:

$$R + m g = \frac{m v^2}{r} \tag{V.64}$$

avendo tenuto conto del fatto che in un moto circolare l'accelerazione centripeta vale $\frac{v^2}{r}$. Inserendo la [V.63] nella relazione [V.64] e ricavando R si ha:

$$R = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right) = m\left(\frac{v_0^2}{r} - 4 g - g\right) = m\left(\frac{v_0^2}{r} - 5 g\right)$$

Imponendo la condizione che sia $R > 0$ (vincolo unilaterale) si ottiene:

$$\frac{v_0^2}{r} - 5 g > 0 \quad \text{cioè} \quad v_0^2 > 5 g r$$

È questa la condizione cui deve soddisfare la velocità iniziale v_0 affinché il carrello non si distacchi dai binari nemmeno nel punto più alto della traiettoria.

Ad esempio se $r = 2$ m, si ha

$$v_0^2 > 5 \cdot 9{,}8\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2\,\mathrm{m} \simeq 100\, \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\,;$$

cioè

$$v_0 \gtrsim 10\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 36\, \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

V.9. Forze di attrito

Oltre alla reazione normale N, di cui ci siamo occupati nel par. V.8, i vincoli esercitano anche una reazione tangenziale f_t (forza di attrito). Quest'ultima può essere calcolata ricorrendo alle *leggi empiriche dell'attrito* che consentono di collegare la forza di attrito alla componente normale N

della reazione vincolare. La fenomenologia delle forze di attrito risulta diversa a seconda che il sistema materiale considerato, che si trova a contatto col vincolo, sia fermo rispetto al vincolo o in moto relativamente ad esso. Nel primo caso si parla di *attrito statico*; nel secondo di *attrito cinematico* o *attrito dinamico.*

V.9.1. *Attrito statico*

Attrito statico

Consideriamo un oggetto pesante di forma parallelepipeda, appoggiato su un piano orizzontale rigido. Sappiamo allora che il piano esercita sull'oggetto una reazione normale N che equilibra la forza peso. Se ora esercitiamo una forza attiva f_a orizzontale, si riscontra che fino a quando la forza f_a non supera una certa intensità limite f_{max}, il corpo non si muove. Ciò significa che la forza attiva $\vec{f}_a$ è equilibrata da una forza vincolare di attrito $\vec{f}_t$, uguale ed opposta ad $\vec{f}_a$. Quando l'intensità f_a della forza attiva raggiunge il valore f_{max}, il vincolo non è più in grado di opporvisi, e l'oggetto comincia a muoversi. Ciò significa che:

$$\vec{f}_t = -\vec{f}_a \quad \text{fino a che} \quad f_t \leq f_{max} \qquad [V.65]$$

Leggi empiriche dell'attrito statico

Sperimentalmente, si riscontra che f_{max} soddisfa le seguenti leggi empiriche approssimate:

— a) f_{max} è indipendente dall'area della superficie di contatto. Ad esempio, appoggiando l'oggetto su una superficie laterale anziché sulla base, nell'ipotesi che le due superfici abbiano le stesse caratteristiche (tipo di lavorazione e materiale), f_{max} non varia. Questa legge è qualitativamente giustificabile con la considerazione che l'area effettiva di contatto è in ogni caso, a causa di asperità sempre presenti, assai più piccola dell'area geometrica di appoggio. Questa legge vale in effetti fino a che l'area di contatto non divenga confrontabile con le dimensioni delle asperità superficiali: cosa che accade o quando la superficie di contatto è molto piccola (una lama o una punta), o quando le superfici a contatto sono levigate in maniera estremamente accurata.

— b) f_{max} è proporzionale alla reazione normale N

$$f_{max} = \mu_s N \qquad [V.66]$$

Coefficiente di attrito statico

Il coefficiente μ_s è detto *coefficiente di attrito statico*; esso dipende dalla natura dei materiali a contatto, dalla loro lavorazione superficiale, dalla eventuale presenza di lubrificanti. Mettendo insieme la [V.66] e la [V.65] si ha:

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{f}_t = -\vec{f}_a & \text{fino a che} & f_t \leq \mu_s N \\ \text{ovvero} & \text{fino a che} & \dfrac{f_t}{N} \leq \mu_s \end{array}\right\} \qquad [V.67]$$

Notiamo che f_t ed N sono le componenti tangenziale e normale della reazione vincolare $\vec{R}$; cosicché f_t/N rappresenta la tangente dell'angolo θ che la reazione $\vec{R}$ forma con la normale al piano di contatto; la [V.67] si può scrivere dunque anche come

$$\operatorname{tg}\theta \leq \mu_s \qquad [V.68]$$

Angolo di attrito

Se chiamiamo θ_a l'angolo (detto angolo di attrito) per cui $\operatorname{tg}\theta_a = \mu_s$, la [V.68] si può scrivere anche nella forma

$$\theta \leq \theta_a$$

La reazione vincolare $\vec{R}$ non può formare con la normale al vincolo un angolo maggiore dell'angolo di attrito.

Esempi

E.V.11. *Un oggetto è appoggiato su un piano rigido rettangolare, incernierato su uno dei suoi lati a un asse orizzontale, cosicché il suo angolo di inclinazione α può essere fatto variare. Se μ_s è il coefficiente di attrito, per quale valore dell'angolo α di inclinazione l'oggetto comincia a scivolare?*

La forza attiva è il peso $m\vec{g}$ dell'oggetto, le cui componenti tangenziale e normale rispetto al vincolo sono rispettivamente $mg\sin\alpha$ ed $mg\cos\alpha$. Perché l'oggetto sia in equilibrio, la forza attiva deve essere equilibrata dalla reazione $\vec{R}$, le cui componenti f_t ed N devono dunque soddisfare le relazioni:

$$f_t = -mg\sin\alpha$$
$$N = -mg\cos\alpha$$

da cui, facendo il rapporto membro a membro

$$\frac{f_t}{N} = \operatorname{tg}\alpha$$

D'altra parte la [V.67] ci dice che deve essere $\frac{f_t}{N} \lessgtr \mu_s$; e dunque

$$\operatorname{tg}\alpha \leq \mu_s; \text{ ovvero } \operatorname{tg}\alpha \leq \operatorname{tg}\theta_a; \quad \alpha \leq \theta_a$$

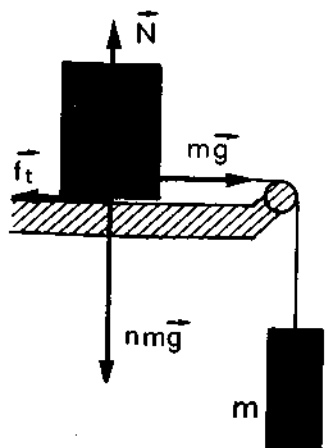
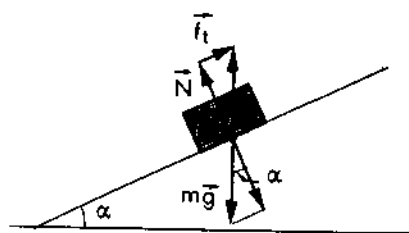
l'equilibrio è dunque possibile fino a che l'angolo di inclinazione del piano resta minore dell'angolo di attrito.

E.V.12. *Un mattone è appoggiato su un piano orizzontale, e tramite una funicella e una carrucola è collegato a un secondo mattone appeso. Sia $\mu_s = 0,3$ il coefficiente di attrito. Si riscontra che il sistema non è in equilibrio: il mattone appoggiato scivola sul tavolo trascinato dal peso dell'altro. Quanti mattoni n occorre accatastare l'uno sull'altro per raggiungere l'equilibrio?*

Poniamo l'attenzione sul mattone appoggiato sul tavolo quando sono accatastati abbastanza mattoni da garantire l'equilibrio; esso è sollecitato tangenzialmente da una forza attiva $f_a = \tau = mg$; per avere l'equilibrio la forza di attrito deve avere modulo f_t pari a $f_a = mg$

$$f_t = mg$$

D'altra parte la componente normale N della reazione vincolare deve equilibrare il peso $n\,mg$ degli n mattoni accatastati

$$N = n\,mg$$

Facendo il rapporto membro a membro

$$\frac{f_t}{N} = \frac{1}{n}$$

D'altra parte la [V.67] richiede che sia $\frac{f_t}{N} \leq \mu_s$; dunque

$$\frac{1}{n} \leq \mu_s; \quad n \geq \frac{1}{\mu_s} = \frac{1}{0,3} = 3,3$$

Dunque occorre accatastare almeno quattro mattoni.

V.9.2. *Attrito cinematico radente*

Attrito cinematico radente

Quando un oggetto si muove strisciando contro un vincolo, sul moto agisce una forza tangenziale f_t opposta alla direzione del moto. Risulta empiricamente che la forza f_t è proporzionale alla componente normale della reazione vincolare; per cui possiamo scrivere

$$\vec{f}_t = - \mu_c N \hat{v} \qquad [V.69]$$

dove $\hat{v}$ è il versore della velocità dell'oggetto relativamente al vincolo, μ_c è un parametro caratteristico dei materiali a contatto, ma indipendente dall'area della superficie di contatto, con le limitazioni specificate al punto a) del par. V.9.1.

Coefficiente di attrito cinematico o attrito dinamico

Il coefficiente adimensionale μ_c viene detto *coefficiente di attrito cinematico* (o *dinamico*); il suo valore numerico è confrontabile (ma minore) rispetto al valore μ_s del coefficiente di attrito statico nelle stesse condizioni.

Generalmente, come abbiamo visto negli esempi del par. V.8, la reazione nomale N non rimane costante durante lo svolgimento del moto, ma dipende dalle condizioni cinematiche dell'oggetto; cosicché la [V.69], a dispetto della sua apparente semplicità, diviene in realtà assai complessa.

Una caratteristica generale della [V.69] è che essa è parallela e di verso opposto alla direzione della velocità, e dunque anche dello spostamento elementare $d\vec{s}$; per cui il lavoro elementare dL è sempre negativo, e tale è dunque anche il lavoro totale compiuto su un percorso qualunque:

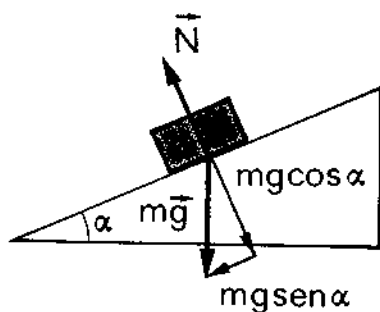
$$dL = \vec{f}_t \cdot d\vec{s} = - \mu_c N \hat{v} \cdot d\vec{s} = - \mu_c N \, ds$$

Nel caso particolare in cui la reazione normale N sia costante, il lavoro totale compiuto dalla forza dissipativa di attrito assume forma particolarmente semplice:

$$L = \int dL = \int - \mu_c N \, ds = - \mu_c N s \qquad [V.70]$$

dove s rappresenta il percorso complessivo compiuto dall'oggetto a contatto col vincolo.

La forza di attrito non è conservativa

Da questa formula è chiaro che la forza di attrito, avendo, per ogni percorso chiuso, $\oint F \cdot d\vec{s} \neq 0$, non costituisce un campo di forza conservativo.

Esempio

E.V.13. *Un oggetto scivola, partendo da fermo, lungo un piano inclinato di $\alpha = 30°$. Se il coefficiente di attrito cinematico è $\mu_c = 0,15$, determinare la velocità acquisita dall'oggetto dopo un percorso $s = 2\ m$.*

Il problema può essere risolto usando la [IV.42.a] ponendo in essa:

$$K_B = \frac{1}{2} m v^2;\ K_A = 0$$

$$U(A) - U(B) = mgh = mgs \cdot \sin\alpha$$

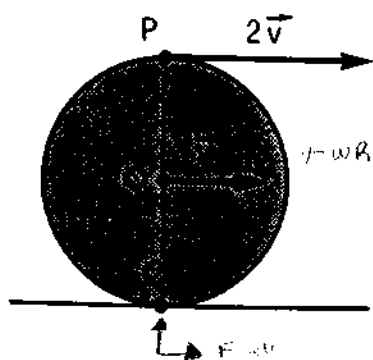
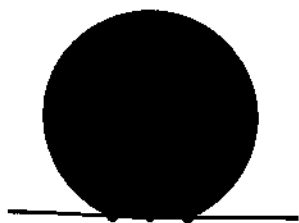
$$L_{nc} = -\mu_c N s = -\mu_c mg \cos\alpha \cdot s \quad \text{(per la [V.70])}$$

La [IV.42.a] diviene dunque nel nostro caso:

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgs \sin\alpha - \mu_c mg \cos\alpha \cdot s = mgs(\sin\alpha - \mu_c \cos\alpha)$$

da cui:

$$v = \sqrt{2gs(\sin\alpha - \mu_c \cos\alpha)} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 2\ m\,(0,5 - 0,15 \cdot 0,866)} \simeq 3,0 \frac{m}{s}$$

V.9.3. *Attrito volvente*

Attrito volvente

Il fenomeno dell'attrito volvente non riguarda il punto materiale, ma i sistemi materiali estesi. In effetti, l'attrito volvente è la forza dissipativa resistente che agisce su una ruota che rotoli senza strisciare a contatto con un vincolo. Ciononostante, per completezza preferiamo introdurre l'attrito volvente in questo paragrafo in cui abbiamo discusso anche gli altri fenomeni di attrito.

Notiamo che l'ipotesi che la ruota rotoli senza strisciare significa che il tratto di generatrice C della ruota a contatto col vincolo è fermo rispetto al vincolo stesso. In ogni istante vi è dunque un punto della ruota che non si muove, pur trattandosi di un punto diverso in ogni istante. Il movimento elementare che in ogni istante la ruota compie è un movimento di rotazione intorno a C; pertanto il centro della ruota si muove con modulo v della velocità pari $v = \omega R$ (ω velocità angolare; R raggio della ruota), e il punto P diametralmente opposto a C si muove con velocità pari a $2\omega R$. Poiché il punto C è fermo, l'attrito radente applicato in C non compie lavoro (si tratta in effetti di attrito statico); nell'ipotesi ideale che la ruota e il vincolo siano entrambi completamente indeformabili il rotolamento non è accompagnato da alcuna forza dissipativa (si dice allora che si ha a che fare con un *rotolamento su vincolo perfetto*).

Rotolamento su vincolo perfetto

In realtà, nella pratica, sia il vincolo che la ruota subiscono qualche deformazione locale. Analizziamo schematicamente, per chiarirci le idee, quali fenomeni accompagnino la deformazione della ruota. Per effetto della deformazione, la zona di contatto fra la ruota e il vincolo non è più a forma di segmento, ma estesa. Durante la rotazione, la zona CA (che sta più avanti di C rispetto alla direzione di moto) viene compressa, e ciò richiede che si compia lavoro L_A a spese dell'energia di movimento; mentre la zona DC (che sta dietro) si decomprime, e il lavoro L_D di decompressione va a

favorire il movimento. Se tutti i fenomeni coinvolti nel processo fossero rigorosamente conservativi, i lavori L_A ed L_D sarebbero uguali ed opposti, e non si avrebbe alcun fenomeno di dissipazione. In realtà il lavoro reso in fase di decompressione è sempre leggermente minore del lavoro assorbito in fase di compressione, e il risultato netto è una azione di frenamento del moto.

Empiricamente, anche la forza di attrito volvente può essere descritta da una legge formalmente identica alla [V.69]

$$f_t = -\mu_v N \hat{v} \qquad [V.71]$$

in cui μ_v, coefficiente di attrito volvente, è di solito per almeno un ordine di grandezza più piccolo di μ_c.

Va notato che per un sistema che si muova su ruote, la condizione che non si abbia slittamento delle ruote è espressa dalla [V.67]; cioè deve essere

$$f_t \leq \mu_s N \qquad [V.67]$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico.

Esempi

E.V.14. *Una automobile percorre, a velocità v di modulo costante, una strada che presenta una curva non rialzata di raggio $r = 50$ m. Se il coefficiente di attrito statico fra la strada e le ruote è $\mu_s = 0{,}80$, quale è la velocità massima v con cui la curva può essere affrontata?*

Automobile in curva

In curva, l'automobile percorre una traiettoria circolare (a velocità v costante) per cui la sua accelerazione a (centripeta) ha modulo pari ad

$$a = \frac{v^2}{r}$$

La forza che produce questa accelerazione è la forza di attrito f_t; per cui deve aversi:

$$f_t = m\frac{v^2}{r}$$

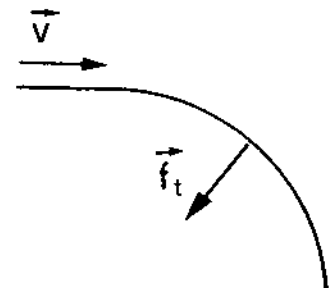
La [V.67], tenuto conto che la reazione normale equilibra la forza peso, diviene:

$$m\frac{v^2}{r} \leq \mu_s m g$$

da cui

$$v^2 \leq \mu_s r g\,;$$

$$v \leq \sqrt{\mu_s r g} = \sqrt{0{,}80 \cdot 50\ \text{m} \cdot 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \simeq \sqrt{400\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}} = 72\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

la velocità massima è dunque di circa 70 km/h.

E.V.15. *La stessa automobile di cui all'esempio E.V.14 esegue su strada diritta, a partire dalla velocità di 30 m/s (= 108 km/h), una frenata con accelerazione a costante. Quale è lo spazio minimo l in cui può fermarsi?*

Frenata senza strisciamento

L'accelerazione massima che può avere l'automobile è determinata dalla massima forza tangenziale f_t che secondo la [V.67] può esercitare l'attrito. Da cui discende, per i moduli:

$$ma = f_t \leq \mu_s N = \mu_s mg\,;$$

e dunque, in definitiva:

$$a \leq \mu_s g \qquad [\text{V.72}]$$

D'altra parte, se a è costante lo spazio l percorso è legato alla velocità iniziale e alla accelerazione a della [II.51]:

$$l = \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{a}$$

Questa relazione, accoppiata alla [V.72], fornisce:

$$l \geq \frac{v^2}{2\,\mu_s g} = 56 \text{ m}\,.$$

L'automobile non può fermarsi in uno spazio minore di circa 60 metri.

V.10. Oscillazioni forzate e oscillatori accoppiati

In questo paragrafo riprendiamo e sviluppiamo le considerazioni da noi fatte a proposito dell'oscillatore; considerazioni che fino a qui si sono limitate al caso più semplice, che è quello di un unico punto materiale che si muove in una sola direzione per azione della forza elastica («oscillatore armonico») e di una eventuale forza resistente («oscillatore smorzato»). Nel primo caso l'energia meccanica del sistema $\frac{1}{2}Kx_0^2$ (vedi esempio E.V.7) si conserva; nel secondo caso l'energia dell'oscillatore va diminuendo a spese di un trasferimento al mezzo entro cui l'oscillazione ha luogo; mezzo che acquisisce progressivamente (nella forma di energia termica, come meglio vedremo nel capitolo XIII) l'energia meccanica che inizialmente possedeva l'oscillatore.

Gli oscillatori sono sistemi di grande interesse teorico e pratico, perché ampie categorie di fenomeni fisici nei campi più disparati sono interpretabili in termini di sistemi di oscillatori. Tuttavia nella realtà, di norma, tali oscillatori interagiscono fra di loro e con altri sistemi circostanti, e si discostano così dagli schemi semplificati che noi abbiamo fin qui considerato. Riteniamo pertanto utile ed opportuno estendere la nostra analisi ad alcune delle situazioni che più frequentemente si presentano nella pratica.

Oscillatore in due dimensioni

V.10.1 *Oscillatore in due dimensioni*

Consideriamo un punto materiale mobile su un piano (che scegliamo come piano xy) sotto l'azione di una forza elastica $\vec{f} = -K\vec{r}$. L'equazione

del moto è dunque

$$-K\vec{r} = \vec{f} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

che proiettata sugli assi diviene:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{K}{m}x = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{K}{m}y = 0 \end{cases} \qquad [V.68]$$

Le [V.68] costituiscono due equazioni differenziali disaccoppiate identiche alla [V.39]; le quali dunque ammettono come soluzione

$$\begin{cases} x = x_o \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y = y_o \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad [V.69]$$

Osserviamo che il tipo di traiettoria corrispondente alle [V.69] dipende, oltre che dalle ampiezze x_o e y_o, anche dalle fasi iniziali φ_1 e φ_2; e dunque dipende dalle complessive condizioni iniziali.

Nel caso che sia $\varphi_1 = \varphi_2$, facendo il rapporto membro a membro fra le due relazioni [V.69] abbiamo

$$\frac{x}{y} = \frac{x_o}{y_o} \qquad [V.70]$$

La [V.70] rappresenta una retta: in questo caso la traiettoria compiuta dall'oscillatore armonico è una traiettoria rettilinea, e su di esso il punto si muove con ampiezza L_o e con pulsazione ω:

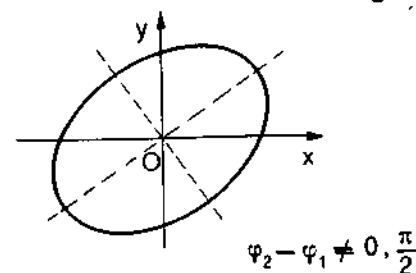
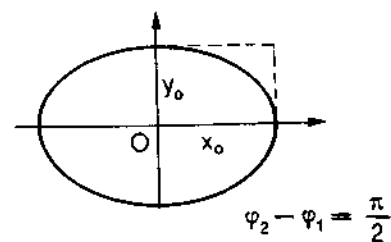
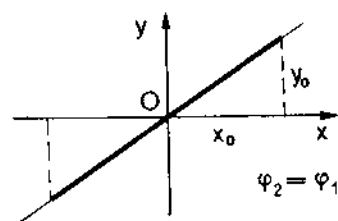
$$L = L_o \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{K}{m}};\ L_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}\right) \qquad [V.71]$$

Se $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$, le [V.69] divengono

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x_o} = \sin(\omega t + \varphi_1) \\ \dfrac{y}{y_o} = \cos(\omega t + \varphi_1) \end{cases}$$

Quadrando e sommando, si elimina il tempo ricavando l'equazione della traiettoria

$$\frac{x^2}{x_o^2} + \frac{y^2}{y_o^2} = 1$$

Questa rappresenta l'equazione di una ellisse che viene percorsa dal punto con pulsazione ω $\left(\text{ovvero con periodo } T = \dfrac{2\pi}{\omega}\right)$; ellisse che si riduce a un cerchio nel caso particolare che sia $x_o = y_o$.

Finalmente nel caso generale ($\varphi_1 \neq \varphi_2$; $x_0 \neq y_0$), eliminando il tempo nelle [V.69] attraverso passaggi algebrici semplici anche se laboriosi, è facile verificare che la traiettoria è ancora una ellisse, anche se ruotata rispetto agli assi coordinati.

Oscillatore forzato

V.10.2. *Oscillatore forzato*

L'oscillatore forzato è costituito da un punto materiale di massa m sottoposto a una forza elastica $-Kx$ e a una forza di smorzamento viscoso $-\beta\dot{x}$ (così come abbiamo già visto nel par. V.7.2, eq. [V.48]) sollecitato in più da una forza sinusoidale del tipo $f = F\sin\omega_0 t$ parallela all'asse x su cui il moto avviene; cosicché l'equazione del moto diviene:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = F\sin\omega_0 t \qquad [V.72]$$

Notiamo che l'origine dei tempi è stata scelta in modo che sia nulla la fase iniziale della forza sinusoidale applicata. La [V.72] rappresenta una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, *non omogenea* per la presenza del termine noto $F\sin\omega_0 t$. La soluzione è data dalla somma di due termini, rappresentati rispettivamente dalla soluzione generale della equazione lineare omogenea associata (eq. [V.48]), e da una soluzione particolare della equazione non omogenea [V.72]. Tale soluzione è del tipo:

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t - \varphi) \qquad [V.73]$$

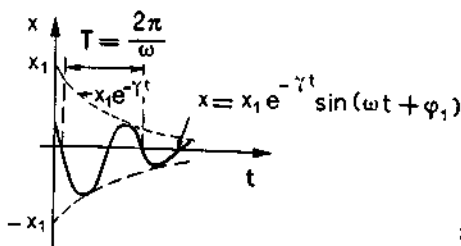
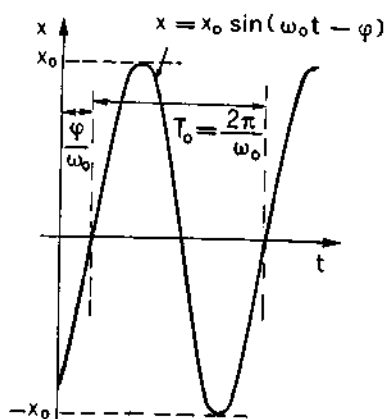
dove l'ampiezza x_0 e la fase φ non sono costanti arbitrarie, ma possono essere ricavate con relativa semplicità mediante sostituzione nella [V.72]: si verifica facilmente che affinché la [V.73] soddisfi la [V.72] deve essere

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{F/m}{\sqrt{\left(\dfrac{K}{m} - \omega_0^2\right)^2 + \dfrac{\beta^2\omega_0^2}{m^2}}} \\[2ex] \varphi = \text{artg}\,\dfrac{\dfrac{\beta}{m}\omega_0}{\dfrac{K}{m} - \omega_0^2} \end{cases} \qquad [V.74]$$

In definitiva, la soluzione generale della [V.72] ha la forma

$$x(t) = x_1 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi_1) + x_0\sin(\omega_0 t - \varphi) \qquad [V.75]$$

dove x_0 e φ sono dati dalla [V.74]; $\gamma = \dfrac{\beta}{2m}$; ω_0 è la pulsazione della forza sinusoidale applicata; e $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m} - \gamma^2} = \sqrt{\dfrac{K}{m} - \dfrac{\beta^2}{4m^2}}$ è la pulsazione propria dell'oscillatore libero.

Poiché il primo termine ha ampiezza che decade esponenzialmente nel tempo, il suo contributo è presente solo durante un lasso di tempo transitorio iniziale: quando al passare del tempo l'esponente γt supera alcune

unità, la soluzione [V.75] si riduce al solo termine «forzato»[V.73].

Osserviamo che l'ampiezza e la fase [V.74] della oscillazione forzata dipendono, oltreché dai parametri caratteristici dell'oscillatore libero, dalle caratteristiche della forza sinusoidale applicata e in particolare dalla sua pulsazione ω_o. Fissati gli altri parametri, al variare di ω_o l'ampiezza della oscillazione e la sua fase variano così come mostrato nelle figure. Derivando la prima delle [V.74] rispetto a ω_o e uguagliando a zero, si verifica che il massimo della ampiezza si realizza quando la pulsazione ω_o della forza assume il valore:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{\beta^2}{2\,m^2}} \qquad [V.76]$$

Condizioni di risonanza

Si dice allora che ci si trova in *condizioni di risonanza*; la pulsazione [V.76] è detta *pulsazione di risonanza*.

Fissate le caratteristiche dell'oscillatore libero, e fissate l'intensità e la pulsazione della forza sinusoidale applicata, a regime l'oscillatore segue la legge oraria [V.73], cioè compie un moto armonico di ampiezza costante x_o: pertanto la sua energia totale $\frac{1}{2} K x_o^2$ resta costante nel tempo (vedi esempio E.V.7). Tuttavia la forza applicata $F \sin\omega_o t$ compie un lavoro (in generale diverso da zero) il cui valore medio (media su un periodo) è dato da:

$$\bar{L} = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} F\sin\omega_o t \cdot dx = \frac{\omega_o}{2\pi}\int_0^{T_o} F\sin\omega_o t\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

Tenuto conto che la posizione x ha l'espressione [V.73], si ha

$$\frac{dx}{dt} = x_o\omega_o\cos(\omega_o t - \varphi);$$

per cui

Lavoro compiuto dalla forza applicata

$$\bar{L} = \frac{\omega_o}{2\pi}\int_0^{T_o} F x_o \sin\omega_o t\cos(\omega_o t - \varphi)\,d(\omega_o t) =$$

$$= \frac{\omega_o}{2\pi}\int_0^{2\pi} F x_o \sin\alpha\cos(\alpha - \varphi)\,d\alpha$$

avendo posto $\alpha = \omega_o t$. Sviluppando il coseno della somma

$$\cos(\alpha - \varphi) = \cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi\,,$$

si ha:

$$\bar{L} = \frac{\omega_o}{2\pi} F x_o \cos\varphi \int_0^{2\pi} \sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha + \frac{\omega_o}{2\pi} F x_o \sin\varphi \int_0^{2\pi} \sin^2\alpha\,d\alpha$$

Di questi integrali, il primo è nullo; mentre il secondo vale

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\alpha\,d\alpha = \pi;$$

per cui si ha in definitiva:

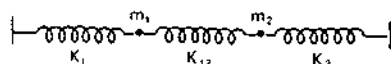
$$\bar{L} = \frac{\omega_0 F x_0}{2} \sin\varphi \qquad [V.77]$$

Energia che l'oscillatore comunica al mezzo

In generale tale lavoro medio è diverso da zero, perché $\sin\varphi$ è diverso da zero. L'energia che così viene comunicata all'oscillatore è quella che serve per compensare l'energia che l'oscillatore disperde verso il mezzo in cui si muove: è evidente infatti che, poiché la sua energia resta costante, l'oscillatore rappresenta dal punto di vista energetico niente più che un tramite che dissipa verso il mezzo l'energia che gli viene via via comunicata dalla forza che su di esso agisce.

Oscillatori accoppiati

V.10.3. *Oscillatori accoppiati*

Il comportamento di alcuni sistemi macroscopici e di molti sistemi microscopici è, per molti aspetti, convenientemente descritto da un insieme di oscillatori accoppiati: cioè di oscillatori richiamati ciascuno verso la propria posizione di equilibrio da una forza elastica, e nello stesso tempo interagenti elasticamente con gli oscillatori circostanti, e in particolare con quelli più prossimi. Il più semplice sistema di oscillatori accoppiati (sistema cui qui limitiamo la nostra attenzione, sviluppando al riguardo una trattazione che potrebbe essere facilmente estesa a casi più complessi) è costituito da due soli oscillatori unidimensionali, descritti dallo schema rappresentato in figura.

Supponiamo che si tratti di due oscillatori identici, cioè dotati della stessa massa ($m_1 = m_2 = m$) e attratti verso la posizione di equilibrio dalla stessa forza di richiamo ($K_1 = K_2 = K$).

In base a semplici considerazioni dinamiche, si riconosce immediatamente che la legge del moto di questi due oscillatori è descritta dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -Kx_1 + K_{12}(x_2 - x_1) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -Kx_2 + K_{12}(x_1 - x_2) \end{cases} \qquad [V.78]$$

dove x_1 e x_2 rappresentano la coordinata di ciascuno dei due oscillatori misurata a partire dalle rispettive posizioni di equilibrio; il termine $-Kx_1$ ($-Kx_2$) rappresenta la forza di richiamo verso la posizione fissa di equilibrio; il termine $K_{12}(x_2 - x_1)$ ($K_{12}(x_1 - x_2)$) rappresenta la forza di mutua interazione. Le [V.78] possono essere scritte nella forma:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + \dfrac{K + K_{12}}{m}x_1 = \dfrac{K_{12}}{m}x_2 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + \dfrac{K + K_{12}}{m}x_2 = \dfrac{K_{12}}{m}x_1 \end{cases} \qquad [V.79]$$

È immediato verificare che la coppia di funzioni fra di loro uguali

$$\begin{cases} x_1 = x_o \sin(\omega_o t + \varphi_o) \\ x_2 = x_o \sin(\omega_o t + \varphi_o) \end{cases} \qquad [V.80]$$

$$\left(\omega_o = \sqrt{\frac{K}{m}}\,;\ x_o,\ \varphi_o\text{: qualunque}\right)$$

rapppresenta una soluzione del sistema [V.79]; ed anche la coppia di funzioni

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \\ x_2 = \bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \end{cases} \qquad [V.81]$$

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{K + 2K_{12}}{m}}\,;\ \bar{x}\ \bar{\varphi}\text{: qualunque}\right)$$

Modi normali di oscillazione

costituisce una soluzione. La [V.80] e la [V.81] sono le soluzioni che descrivono i cosiddetti *modi normali di oscillazione* degli oscillatori accoppiati: nel modo [V.80] i due oscillatori si muovono in fase e la forza elastica di accoppiamento non entra in gioco; nel modo [V.81] essi si muovono in controfase, e in questo caso alla *forza di richiamo propria* con costante K si somma, per ciascun oscillatore, la *forza di richiamo di interazione* con costante K_{12} ed elongazione istantanea pari al doppio della elongazione istantanea di ciascun oscillatore (vedi figura).

Si dimostra che la soluzione generale del sistema [V.79] è rappresentata da una combinazione lineare della [V.80] e della [V.81], cioè dalla coppia di funzioni:

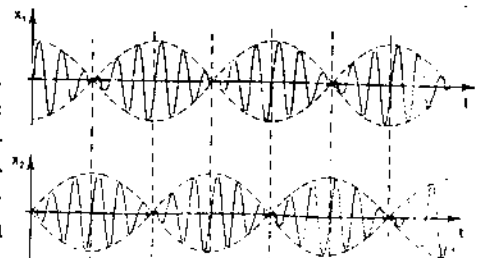
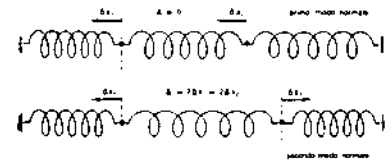
$$\begin{cases} x_1 = x_o \sin(\omega_o t + \varphi_o) + \bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \\ x_2 = x_o \sin(\omega_o t + \varphi_o) - \bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \end{cases} \qquad [V.82]$$

Per meglio comprendere il significato delle [V.82] analizziamo con più attenzione il caso particolare che sia $x_o = \bar{x}$ e $\varphi_o = \bar{\varphi} = 0$. Le [V.82] divengono

$$\begin{cases} x_1 = x_o \sin\omega_o t + x_o \sin\omega t \\ x_2 = x_o \sin\omega_o t - x_o \sin\omega t \end{cases} \qquad [V.83]$$

Usando le formule di prostaferesi, le [V.83] possono essere scritte come:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_o \cos\left(\frac{1}{2}(\omega - \omega_o)\,t\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_o + \omega)\,t\right) \\ x_2 = 2x_o \sin\left(\frac{1}{2}(\omega - \omega_o)\,t\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_o + \omega)\,t\right) \end{cases} \qquad [V.84]$$

Queste due funzioni del tempo hanno l'andamento mostrato in figura. Come si vede ciascun oscillatore compie una oscillazione con pulsazione $(\omega_o + \omega)$, e di ampiezza che cambia nel tempo essendo modulata con periodicità da una funzione sinusoidale di pulsazione $(\omega - \omega_o)$. Quando un oscillatore oscilla con ampiezza massima l'altro ha ampiezza nulla, e via via che l'ampiezza del primo diminuisce aumenta quella dell'altro fino a invertire la situazione.

Osserviamo che l'energia meccanica di ciascun oscillatore (ad esempio del primo) è data, come al solito, da un termine di energia cinetica $K_c = \frac{1}{2} m v^2$ e da un termine di energia potenziale U. Quest'ultimo non è dato da un unico termine, come nel caso di un oscillatore singolo; ma, come risulta dalle [V.78], essa è data dalla somma di due termini di energia elastica,

$$\frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K_{12} (x_2 - x_2)^2 \; ;$$

l'energia meccanica totale dei due oscillatori è dunque data da:

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} K x_2^2 + K_{12} (x_2 - x_1)^2$$

che mediante semplici passaggi può essere posta nella forma:

Energia dei due oscillatori accoppiati

$$E = E_1 + E_2 + E_{12} \qquad \text{[V.85]}$$

dove:

$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} (K + K_{12}) x_1^2$ è l'energia del primo oscillatore

$E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} (K + K_{12}) x_2^2$ è l'energia del secondo oscillatore

$E_{12} = - K_{12} x_1 x_2$ è l'energia di interazione fra i due oscillatori

Poiché l'ampiezza di ciascun oscillatore non è costante, le rispettive energie non sono costanti nel tempo. Tuttavia è facile verificare che è invece costante l'energia totale [V.85] del sistema dei due oscillatori, energia costituita oltreché dall'energia E_1 ed E_2 dei due oscillatori presi separatamente anche dal termine di interazione $E_{12} = K_{12} x_1 x_2$ che descrive l'energia che istante per istante un oscillatore sta trasferendo all'altro.

Esercizi del capitolo V

V.1. Le trasmissioni via satellite di programmi televisivi intercontinentali avvengono tramite satelliti orbitanti sul piano equatoriale della Terra. Il moto di questi satelliti è tale che essi sono in posizione fissa rispetto ad un osservatore terrestre. Sapendo che il periodo di rivoluzione della Luna è circa 27 giorni e che la distanza tra la Terra e la Luna è circa 380.000 km, e supponendo che tutte le orbite che intervengono nel problema siano circolari con centro nel centro della Terra, calcolare il raggio R_S dell'orbita del satellite artificiale. (Risposta: $4{,}2 \cdot 10^4$ km)

V.2. Un satellite artificiale della Terra si muove su una orbita ellittica che è caratterizzata da una distanza minima (perigeo) dal centro della terra r_P e da una distanza massima (apogeo) dal centro della Terra r_A. Sapendo che l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra è g e che il raggio della Terra è R_T, ricavare le espressioni delle velocità v_P e v_A al perigeo ed apogeo rispettivamente, in funzione di r_A ed r_P.

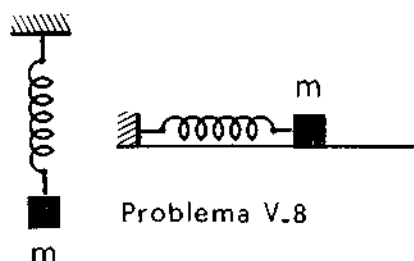
$$\left(\text{Risposta: } v_P = \sqrt{\frac{2\, g\, R_T^2\, r_A}{r_P\,(r_A + r_P)}}\right)$$

V.3. Se un satellite artificiale è messo in orbita radente alla Luna ed il suo periodo di rivoluzione è T = 110 minuti, quanto vale la densità media della Luna?
($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}^{-2}$) (Risposta: 3240 $\mathrm{kg/m^3}$)

V.4. Un satellite si muove intorno al Sole descrivendo un'orbita ellittica il cui semiasse maggiore è dato e vale a. L'ellisse ha per fuoco il Sole. Il periodo di rivoluzione è noto e vale T. Ricavare l'espressione della velocità v_B del satellite nel momento in cui la direzione di $\vec{v}_B$ è perpendicolare al semiasse minore dell'ellisse. (Risposta: $2\pi a/T$)

V.5. La traiettoria della cometa di Halley è un'ellisse molto schiacciata, che viene percorsa con un periodo T_H = 75 anni, con il Sole come fuoco e con un perielio a distanza dal Sole praticamente trascurabile rispetto alla distanza dell'afelio dal Sole stesso. Sapendo che la Terra percorre intorno al Sole un'orbita ellittica con semiasse maggiore a_T = 150 milioni di km, calcolare la massima distanza tra la cometa di Halley ed il Sole.
(Risposta: 5,3 miliardi di km)

V.6. Inizialmente un satellite artificiale di massa m = 1000 kg è posto in orbita circolare intorno alla Terra ad una quota z_{in} = 5000 km rispetto al livello del mare. La presenza di atmosfera produce un leggero frenamento che, con lenta spiralizzazione, porta il satellite ad un'orbita ancora approssimativamente circolare a quota z_f = 600 km rispetto alla superficie terrestre. Di quanto varia l'energia cinetica del satellite?
(Raggio terrestre R_T = 6400 km; accelerazione di gravità g = 9,8 m/s^2)
(Risposta: $1{,}1 \cdot 10^{10}$ J)

V.7. Un corpo si muove su traiettoria circolare per effetto di una forza centrale attrattiva del tipo $F = -\frac{\alpha}{r}\,\hat{r}$, dove r è il modulo della distanza tra il centro delle forze ed il corpo ed $\hat{r}$ è il versore di r orientato dal centro al corpo. Esprimere la relazione tra il periodo di rivoluzione ed il raggio dell'orbita e confrontarla con la terza legge di Keplero.
(Risposta: diretta proporzionalità)

Problema V.8

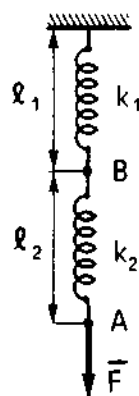
V.8. Una molla, disposta verticalmente con un estremo fisso, subisce un allungamento $\alpha = 10$ cm rispetto alla sua lunghezza di equilibrio, se le si appende una massa m. La stessa molla, con attaccata la stessa massa, se disposta su un piano orizzontale privo di attrito, imprime alla massa m un moto oscillatorio. Calcolarne il periodo. (Risposta: 0,63 s)

V.9. Un corpo di massa $m = 0{,}2$ kg è collegato a due molle di costanti elastiche $k_1 = 3$ N/m e $k_2 = 5$ N/m rispettivamente. Il corpo può muoversi su un piano orizzontale privo di attrito, sotto l'azione delle due molle. La posizione di equilibrio è realizzata con le due molle alle rispettive condizioni di riposo. Calcolare il periodo di oscillazione. (Risposta: ~ 1 s)

Problema V.9

V.10. Due molle di costanti elastiche e lunghezza a riposo rispettivamente di $k_1 = 10$ N/m $k_2 = 20$ N/m, $l_1 = 10$ cm ed $l_2 = 20$ cm, sono collegate in serie e sottoposte a trazione tramite l'applicazione nel punto A di una forza F parallela alle molle. Per effetto di questa forza la lunghezza del sistema delle due molle è $L = 40$ cm. Calcolare la lunghezza di ciascuna molla nella situazione di deformazione prodotta dalla forza F.

(Risposte: 16,7 cm; 23,3 cm)

Problema V.10

V.11. Un corpo di massa $m = 1$ kg, posto su un piano orizzontale privo di attrito, si muove di moto armonico sotto l'azione di una forza elastica. Con semplici misure si determinano il periodo di oscillazione $T = 6{,}28$ s e l'ampiezza $A_0 = 10$ cm. Nel momento in cui il corpo raggiunge il massimo di spostamento dal centro di oscillazione, gli viene conferito, tramite un rapido colpo, un impulso I il cui effetto è di portare l'ampiezza di oscillazione al valore $A = 20$ cm. Calcolare il valore dell'impulso I. (Risposta: 0,17 Ns)

V.12. Su un piano orizzontale privo di attrito un corpo di massa $m = 2$ kg procede con velocità v = 5 m/s. Ad un certo istante il corpo entra in contatto con un respingente, che può essere schematizzato come una molla di costante elastica $k = 2 \cdot 10^3$ N/m, inizialmente in posizione di riposo. Supponendo che l'asse della molla e la direzione della velocità del corpo coincidano e che siano trascurabili gli attriti nella struttura del respingente, calcolare la massima variazione Δl di lunghezza subita dalla molla per effetto del contatto con il corpo. (Risposta: ~ 16 cm)

V.13. Un corpo puntiforme si muove sotto l'azione di una forza $\vec{F} = -\alpha\,\vec{r}$, dove il fattore α è una costante ed $\vec{r}$ rappresenta la distanza dal centro delle forze al corpo considerato. All'istante iniziale ($t = 0$) il corpo passa per il punto A (2, 0, 0) con velocità v (0, 1, 0) in unità del S.I. Calcolare la velocità areolare del punto all'istante $t = 5$ s. (Risposta: 1 m²/s)

V.14. La forza di resistenza del mezzo esercitata dall'aria su due sfere dello stesso materiale, che cadono per effetto della gravità, è proporzionale alla velocità ed all'area della sezione di ciascuna sfera. Determinare il rapporto tra le velocità di regime delle due sfere in funzione del rapporto $r = R_1/R_2$ tra i raggi delle due sfere. (Risposta: $v_{1\infty}/v_{2\infty} = r$)

V.15. Un'automobile, in movimento su una strada orizzontale, è spinta dal motore ed è frenata da attriti vari, che si possono schematizzare con una forza del tipo $F = b$v con $b = 36$ kg/s. Se la velocità di regime dell'auto è $v_\infty = 100$ km/h, qual'è la potenza erogata dal motore in queste condizioni?

(Risposta: $P_\infty = 27$ kW = 36 Hp)

V.16. Un'automobile, di massa complessiva $m = 1200$ kg, è dotata di un motore che può trasmettere alle ruote una potenza $P = 50$ kW. La forza frenante è $F_R = -b\mathrm{v}$ con $b = 35$ kg/s. Calcolare la massima velocità dell'automobile quando procede su una salita di pendenza $p = 10\%$.

(Risposta: 88,4 km/h)

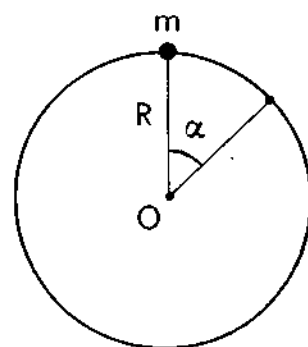
V.17. Un corpo di massa $m = 1$ kg è sottoposto all'azione congiunta di una forza elastica di costante elastica $k = 40\ N/\mathrm{m}$ e di una forza di resistenza del mezzo $F = b\mathrm{v}$ con $b = 2$ kg/s. L'ampiezza iniziale delle oscillazioni è $A_o = 20$ cm. Qual'è l'ampiezza delle oscillazioni dopo 3 periodi?

(Risposta: $\sim$ 1 cm)

V.18. Al soffitto di un carrello è appeso un pendolo semplice di lunghezza $l = 1$ m. Il carrello si muove su un piano orizzontale con accelerazione costante $a = 5\ \mathrm{m/s^2}$. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo.

(Risposta: 1,9 s)

V.19. Un punto materiale di massa m viene lasciato andare da fermo dalla sommità di una superficie cilindrica, di raggio R, priva di attrito e disposta con le generatrici orizzontali. Ricavare l'espressione della reazione normale N, quando l'angolo α di figura è minore dell'angolo al quale avviene il distacco della massa m dal cilindro.

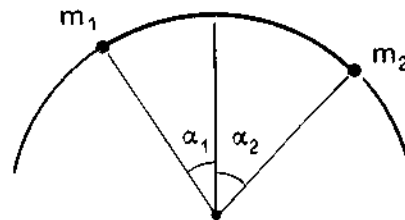
(Risposta: $N(\alpha) = mg\,(3\cos\alpha - 2)$)

V.20. Con riferimento all'esercizio precedente calcolare l'angolo α in corrispondenza del quale la massa m si stacca dal cilindro.

(Risposta: 48,2°)

V.21. Un pendolo semplice, la cui massa è $m = 1$ kg è posto in oscillazione e, con opportuni impulsi, la sua ampiezza di oscillazione viene fatta crescere. Ad un certo momento l'ampiezza di oscillazione arriva ad essere $\alpha_0 = 45°$: in questa situazione, il filo di sostegno del pendolo si spezza. Determinare il carico di rottura del filo.

(Risposta: 15,5 N)

V.22. A cavallo di una superficie cilindrica liscia, con asse orizzontale è posto, in equilibrio, un filo flessibile, inestensibile e di massa trascurabile, alle cui estremità sono appesi due corpi, di masse $m_1 = 2$ kg ed $m_2 = 1$ kg rispettivamente, entrambi a contatto con la superficie cilindrica. L'equilibrio si realizza quando l'angolo α_1, che la massa m_1 determina rispetto alla verticale, vale 20°. Calcolare l'angolo α_2 (vedi figura) al quale si dispone la massa m_2.

(Risposta: 43,2°)

V.23. Un pendolo semplice di massa $m = 0{,}5$ kg e di lunghezza $l = 60$ cm è inizialmente fermo nella posizione di equilibrio stabile. A seguito di un impulso orizzontale, la quantità di moto del pendolo, nella sua posizione di minima quota, diventa $q_{in} = 10\ N \cdot s$. Calcolare la reazione vincolare del filo nel punto di massima quota.

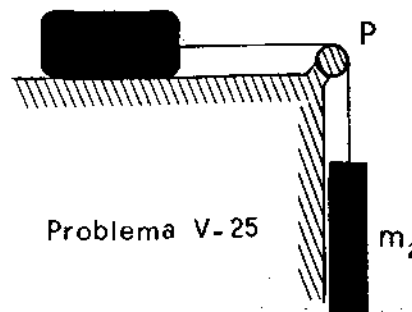
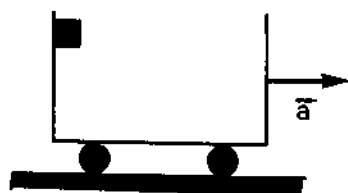
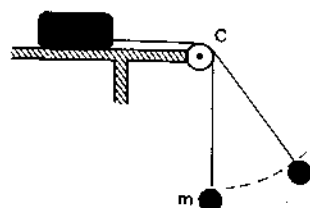
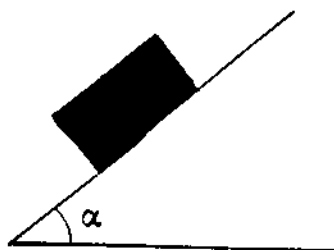
(Risposta: 308,8 N)

Problema V-25

V.24. Un piattello è lanciato su un piano orizzontale con velocità iniziale $\mathrm{v}_o = 5$ m/s parallela al piano. Il piano è scabro ed il piattello si ferma dopo aver percorso un tratto $l = 8$ m. Dopo quanto tempo, dall'istante iniziale, la velocità si dimezza?

(Risposta: 1,6 s)

V.25. Nel dispositivo di figura, in cui il piolo P è privo di attrito, il corpo di massa $m_2 = 2$ kg trascina, lungo il piano orizzontale scabro ($\mu_c = 0{,}3$), il corpo di massa $m_1 = 1$ kg. Qual'è la tensione del filo?

(Risposta: 8,5 N)

V.26. Lungo un piano scabro, inclinato di un angolo $\alpha = 50°$ rispetto all'orizzontale, scivolano, appoggiati l'uno all'altro, due corpi A e B di ugual massa $m = 1$ kg. I due corpi hanno, rispetto al piano inclinato, coefficienti di attrito dinamico $\mu_A = 0{,}3$ e $\mu_B = 0{,}1$ rispettivamente. Calcolare la forza con cui il corpo B spinge il corpo A. (Risposta: 0,63 N)

V.27. Dal punto più basso di un piano scabro inclinato di un angolo $\alpha = 60°$ rispetto all'orizzontale, un corpo parte, lungo una linea di massima pendenza del piano inclinato, con velocità $v_1 = 5$ m/s. Dopo aver raggiunto la massima quota sul piano inclinato, il corpo torna indietro, seguendo lo stesso percorso della fase di salita, e ripassa dal punto di partenza con velocità $v_2 = 4$ m/s. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico relativo al contatto tra corpo e piano inclinato. (Risposta: 0,38)

V.28. Nel dispositivo mostrato in figura la massa $M = 1$ kg è appoggiata ad un piano orizzontale scabro. Il coefficiente di attrito statico relativo al contatto tra corpo e piano è $\mu = 0{,}5$. Un filo inestensibile e di massa trascurabile collega la massa M alla massa $m = 0{,}3$ kg, sospesa nel vuoto. La carrucola C ruota senza attrito ed ha massa trascurabile. Calcolare il massimo valore dell'ampiezza di oscillazione della massa m che non produce lo spostamento della massa M. (Risposta: 48,2°)

V.29. Si osserva che un corpo, appoggiato sulla parete di fondo di un carrello che si muove su un piano orizzontale con accelerazione $a = 5$ m/s^2, scende restando a contatto della parete. Il coefficiente di attrito dinamico tra corpo e parete è $\mu = 0{,}4$. Qual'è la legge oraria con cui il corpo si muove relativamente alla parete del carrello?

V.30. Un corpo è appoggiato su una piattaforma orizzontale che ruota intorno ad un asse verticale con velocità angolare ω = variabile. La distanza tra il corpo ed il punto intersezione dell'asse di rotazione con il piano ruotante è $d = 0{,}1$ m. Quando la velocità angolare raggiunge il valore $\omega_0 = 4$ rad/s il corpo, inizialmente fermo, inizia a muoversi. Calcolare il coefficiente di attrito statico tra corpo e piattaforma. (Risposta: 0,16)

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo V

V.1. Utilizzare la terza legge di Keplero.

V.2. Il moto del satellite è caratterizzato dal fatto che si conservano l'energia meccanica e la velocità areolare.

V.3. Applicare la legge di gravitazione universale e tenere conto che in un moto circolare uniforme l'accelerazione è puramente centripeta.

V.4. La velocità areolare è costante e l'area di un'ellisse di semiassi a e b è $\pi a b$.

V.5. La somma delle distanze dal Sole di perielio ed afelio è uguale all'asse maggiore dell'ellisse. Utilizzare la terza legge di Keplero.

V.6. Utilizzare la seconda legge della dinamica tenendo conto del fatto che il moto è praticamente circolare uniforme, nella situazione iniziale ed in quella finale.

V.7. Seguire gli stessi passi usati per dimostrare la terza legge di Keplero.

V.8. Ricavare la costante elastica della molla dall'equilibrio e, da questa, il periodo dell'oscillatore armonico.

V.9. Applicare il secondo principio della dinamica e ricavare l'equazione differenziale in base alla quale dedurre il valore della pulsazione.

V.10. Osservare che la forza F, applicata al punto A, si trasmette inalterata al punto B.

V.11. Usare il teorema dell'impulso e la conservazione dell'energia meccanica nei campi di forza conservativi.

V.12. Considerare l'energia meccanica totale del sistema.

V.13. La velocità areolare si conserva nel campo di forze centrali.

V.14. La velocità di regime dipende dalla massa (e quindi dal volume) della sfera e dal coefficiente b (che è proporzionale all'area della sezione della sfera).

V.15. La forza F_M che il motore eroga a regime è legata alla velocità limite (equilibrio dinamico tra F_M e resistenza del mezzo). La potenza si ricava immediatamente essendo nota la velocità.

V.16. La massima velocità coincide con la velocita limite. In queste condizioni, nell'unità di tempo, il lavoro del motore uguaglia il lavoro speso per vincere la resistenza del mezzo e per sollevare l'auto nel campo della gravità.

V.17. Si tratta di moto oscillatorio smorzato (vedi § V.7.2).

V.18. Considerare il moto del pendolo nel sistema di riferimento non inerziale costituito dal carrello. Alla forza reale (peso) si somma vettorialmente la forza apparente (d'inerzia) dovuta al trascinamento del carrello.

V.19. Scrivere il secondo principio della dinamica per una posizione generica α, tenendo conto che il moto di m, prima del distacco, si sviluppa su traiettoria circolare. Poiché la reazione normale N non compie lavoro e non ci sono attriti la velocità nella posizione α può essere calcolata facilmente con il teorema di conservazione dell'energia meccanica nel campo della gravità.

V.20. Osservare che il punto di distacco è caratterizzato dalla circostanza che la reazione normale si annulla.

V.21. Calcolare la massima tensione del filo (massimo della reazione vincolare) in funzione dell'ampiezza di oscillazione α_0 (corrispondente al punto di minima quota) ed uguagliarla al carico di rottura.

V.22. Scrivere le condizioni di equilibrio per i corpi singoli m_1 ed m_2, tenendo conto delle reazioni vincolari (normali) e della tensione del filo, oltre che della forza peso.

V.23. Applicare il teorema dell'energia cinetica per determinare lo stato di moto della massa m nel punto di massima quota. Poi applicare il secondo principio della dinamica per ricavare la tensione del filo.

V.24. Con il teorema dell'energia cinetica ricavare μ_c. Poi, applicando il secondo principio della dinamica, ricavare la velocità in funzione del tempo.

V.25. Si consiglia la schematizzazione di corpo singolo, tenendo conto che il corpo di massa m_1 è soggetto alla forza frenante dovuta all'attrito.

V.26. Utilizzare la schematizzazione di corpo singolo e ricordare che, per le forze che i corpi *A* e *B* mutuamente si scambiano vale il principio di azione e reazione (vedi par. VI.2).

V.27. La perdita di velocità è dovuta all'azione della forza di attrito (costante). Si può applicare il teorema dell'energia cinetica separatamente alle fasi di salita e discesa.

V.28. Riferirsi all'esercizio V.21 per il calcolo della massima tensione del filo nella sua oscillazione, una volta data l'ampiezza di oscillazione. Poi applicare la relazione che dà la forza minima necessaria a mettere in movimento il corpo *M*, essendo noto il coefficiente di attrito statico.

V.29. Tenere conto che il sistema di riferimento, solidale al carrello, al quale viene riferito il moto del corpo, non è inerziale. Per il calcolo della forza di attrito è necessario considerare la forza di inerzia.

V.30. Al momento dell'inizio del moto la forza centrifuga uguaglia la forza di attrito.

Capitolo sesto

Le leggi della dinamica dei sistemi

Il punto materiale rappresenta una schematizzazione utile non solo per descrivere situazioni di interesse diretto, ma è anche il necessario presupposto alla meccanica dei sistemi materiali estesi.

In effetti, un sistema materiale esteso può essere sempre immaginato come costituito da un insieme di punti materiali. Talvolta, il sistema esteso è effettivamente formato da un certo numero di costituenti praticamente puntiformi, ciascuno identificabile e distinguibile dagli altri: si dice allora che si ha a che fare con un *sistema discreto.*

Sistemi discreti

Più spesso, a livello macroscopico un corpo esteso si presenta come un *sistema continuo.* Non è allora né utile né possibile cercare di descriverne il comportamento ricollegandolo allo stato di moto dei suoi costituenti microscopici puntiformi (atomi e molecole); tuttavia si può comunque immaginare di suddividere il sistema continuo in un certo numero di elementi di massa elementare dm e di volume $d\tau$ praticamente puntiforme.

Sistemi continui

Per ricavare le leggi della dinamica dei sistemi immagineremo di avere a che fare, di norma, con sistemi discreti. Tuttavia l'estensione al caso di sistemi continui è immediata; noi discuteremo esplicitamente questa estensione per le grandezze di uso più comune, e ciò consentirà al lettore anche di acquisire il metodo per trattare quelle caratteristiche dei sistemi continui che non verranno esplicitamente analizzate nel testo.

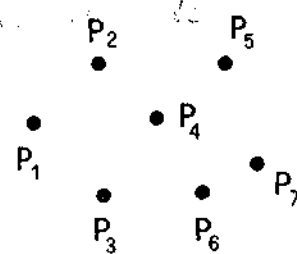
VI.1. Leggi fondamentali

Consideriamo un sistema S costituito da n punti materiali P_i:

$$S \equiv \{P_i\} \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

Per ciascuno dei punti P_i costituenti il sistema potremo scrivere l'equazione [III.5] che formalizza il secondo principio della dinamica

$$\vec{f}_i = m_i \vec{a}_i \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad \text{[VI.1]}$$

dove $\vec{f}_i$ rappresenta il risultante delle forze che agiscono sul punto P_i; m_i la massa di P_i e $\vec{a}_i$ la sua accelerazione.

Forze esterne
Forze interne

Delle forze che agiscono su P_i, in generale alcune sono esercitate da agenti esterni al sistema (le chiameremo *forze esterne*); altre sono esercitate dagli altri punti materiali che costituiscono il sistema (*forze interne*).

Chiamiamo $\vec{f}_i^{(e)}$ il risultante delle forze esterne che agiscono sul punto P_i ed $\vec{f}_i^{(i)}$ il risultante delle forze interne che agiscono su P_i. La [VI.1] può dunque essere scritta come

$$\vec{f}_i^{(e)} + \vec{f}_i^{(i)} = m_i \vec{a}_i \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad \text{[VI.2]}$$

Notiamo che $\vec{f}_i^{(e)}$ dipende dalla posizione $\vec{r}_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$ del punto P_i (ed eventualmente dalla sua velocità $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ e dal tempo t); mentre $\vec{f}_i^{(i)}$ dipende dalla posizione $\vec{r}_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ ed eventualmente dalla velocità di tutti i punti che costituiscono il sistema; per cui la [VI.2] può essere scritta di norma come

$$\vec{f}_i^{(e)}(\vec{r}_i) + \vec{f}_i^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n) = m \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad \text{[VI.3]}$$

Le [VI.3] rappresentano in ogni caso un sistema di n equazioni differenziali vettoriali (3 n equazioni scalari nelle 3 n funzioni incognite del tempo $\vec{r}_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$; $\vec{r}_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$; ... $\vec{r}_n \equiv (x_n, y_n, z_n)$ la cui soluzione è estremamente complessa. Il problema può essere affrontato semplicemente in termini generali solo nel caso che il sistema sia costituito da due soli punti materiali; già nel caso di tre punti (problema dei tre corpi) la trattazione diviene estremamente complessa.

Quando si abbia a che fare con un sistema formato da molti punti materiali ($n > 3$), il ricorso alle [VI.3] perde qualunque utilità pratica; ed è giocoforza allora ricavare, a partire dalle [VI.3], delle relazioni dinamiche più semplici, capaci di fornire informazioni accessibili, ma parziali, a proposito del moto del sistema e della relazione che il moto ha con le sollecitazioni dinamiche.

Cominciamo col notare che, per ciascun punto materiale costituente il sistema, oltre alla [VI.2] corrispondente alla [III.5] (e che da qui in avanti preferiremo scrivere come la [IV.21], cioè in termini della quantità di moto) possiamo anche scrivere la [IV.27] e la [IV.42]:

$$\vec{f}_i^{(e)} + \vec{f}_i^{(i)} = \frac{d\vec{q}_i}{dt} \qquad \text{secondo principio della dinamica} \qquad \text{[VI.4]}$$

$$\vec{m}_i^{(e)} + \vec{m}_i^{(i)} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \vec{v}_\Omega \times \vec{q}_i \qquad \text{equazione del momento angolare} \qquad \text{[VI.5]}$$

$$L_i^{(e)} + L_i^{(i)} = K_i(B_i) - K_i(A_i) \qquad \text{teorema dell'energia cinetica} \qquad \text{[VI.6]}$$

dove $\vec{q}_i$ è la quantità di moto; $\vec{p}_i$ il momento angolare; $\vec{m}_i$ il momento delle forze; L_i il lavoro; K_i l'energia cinetica; $\vec{v}_\Omega$ è la velocità del polo rispetto a cui sono calcolati i momenti.

B_i ed A_i indicano la posizione rispettivamente finale ed iniziale occupata dal punto i-esimo.

L'indice in alto, *(i)* o *(e)*, distingue le grandezze dinamiche relative alle forze interne o, rispettivamente, esterne.

Notiamo che per ogni punto materiale (cioè per ogni specificato valore del pedice i) la [VI.5] e la [VI.6] sono deducibili dalla [VI.4], e dunque non rappresentano delle equazioni indipendenti rispetto a quest'ultima.

Sommiano ora le [VI.4], [VI.5] e [VI.6] rispetto all'indice i, cioè sommiamo sui punti P_i che costituiscono il sistema. Otteniamo:

$$\vec{F}^{(e)} + \vec{F}^{(i)} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \quad [VI.7]$$

$$\vec{M}^{(e)} + \vec{M}^{(i)} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{v}_\Omega \times \vec{Q} \quad [VI.8]$$

$$L^{(e)} + L^{(i)} = K(B) - K(A) \quad [VI.9]$$

dove:

$\vec{F}^{(e)} = \sum_i \vec{f}_i^{(e)}$ è il risultante delle forze esterne che agiscono sul sistema

$\vec{F}^{(i)} = \sum_i \vec{f}_i^{(i)}$ è il risultante delle forze interne che agiscono sul sistema

$\vec{M}^{(e)} = \sum_i \vec{m}_i^{(e)}$ è il risultante dei momenti delle forze esterne che agiscono sul sistema

$\vec{M}^{(i)} = \sum_i \vec{m}_i^{(i)}$ è il risultante dei momenti delle forze interne che agiscono sul sistema

$L^{(e)} = \sum_i L_i^{(e)}$ è la somma di tutti i lavori compiuti dalle singole forze esterne che agiscono sul sistema

$L^{(i)} = \sum_i L_i^{(i)}$ è la somma di tutti i lavori compiuti dalle singole forze interne che agiscono sul sistema

$\vec{Q} = \sum_i \vec{q}_i$ è detto *quantità di moto totale* del sistema

Quantità di moto totale

$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ è detto *momento totale della quantità di moto* o *momento angolare totale* del sistema

Momento angolare totale o momento totale della quantità di moto

$K = \sum K_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$ è l'*energia cinetica totale del sistema* definita come somma delle energie cinetiche dei singoli punti costituenti il sistema.

Energia cinetica totale

Con B ed A abbiamo indicato la configurazione finale ed iniziale del sistema.

Rimarchiamo che per calcolare il *momento risultante* di un certo numero di forze bisogna calcolare il momento di ciascuna forza e *poi* sommare. Lo stesso dicasi per il calcolo del lavoro. Dunque la [VI.8] e la [VI.9] non sono deducibili dalla [VI.7]: in generale, esse rappresentano due equazioni (la prima vettoriale, la seconda scalare) indipendenti rispetto alla [VI.7].

Esempi

E.VI.1. *Consideriamo due punti materiali P_1 e P_2, su cui agiscano rispettivamente le forze $\vec{f}_1$ ed $\vec{f}_2$. Supponiamo che $\vec{f}_1$ ed $\vec{f}_2$ abbiano lo stesso modulo; che esse agiscano su due rette fra di loro parallele (dunque $\vec{f}_1$ ed $\vec{f}_2$ hanno la stessa direzione, ma non la stessa retta di applicazione); e verso opposto. Calcolare il momento risultante $\vec{M}$.*

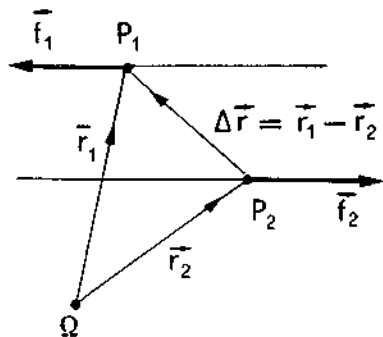
$\vec{f}_1$ P_1

P_2 $\vec{f}_2$

Si dice che le forze $\vec{f}_1$ ed $\vec{f}_2$ costituiscono una *coppia*. È evidente che il risultante $\vec{F}$ è nullo. Infatti, essendo $\vec{f}_2 = -\vec{f}_1$, è $\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{f}_1 + (-\vec{f}_1) = \vec{0}$. Dunque è nullo il momento *del* risultante $\vec{F}$, dovunque si immagini di applicare $\vec{F}$ e qualunque sia il polo Ω rispetto a cui il momento viene calcolato.

Coppia di forze

Momento risultante della coppia

Braccio della coppia

Tuttavia, scelto un qualunque polo Ω, *non* è nullo il *momento risultante* $\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$ che dobbiamo calcolare. Si ha infatti:

$$\vec{m}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{f}_1$$
$$\vec{m}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{f}_2$$

e dunque

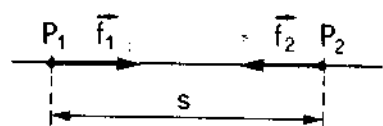
$$\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{f}_2$$

ed essendo $\vec{f}_2 = -\vec{f}_1$:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{f}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{f}_1 = \Delta\vec{r} \times \vec{f}_1$$

Vediamo che il modulo M di $\vec{M}$ vale:

$$M = \Delta r \cdot f_1 \cdot \sin\theta = \Delta r \sin\theta \cdot f_1 = b f_1$$

dove b (detto *braccio* della coppia) è la distanza fra le due rette di applicazione. Vediamo che $\vec{M}$ è indipendente dal polo Ω. La direzione di $\vec{M}$ è ortogonale al piano che contiene le due forze, e il verso è tale da veder ruotare le forze in senso antiorario (nel nostro esempio, $\vec{M}$ esce dalla faccia superiore del foglio).

E.VI.2. *Due punti materiali P_1 e P_2 sono soggetti a forze di attrazione rispettivamente $\vec{f}_1$ ed $\vec{f}_2 = -\vec{f}_1$ di modulo costante pari ad f. Partendo da una distanza relativa iniziale s essi si muovono fino a incontrarsi. Quale è il lavoro totale L compiuto dalle forze che agiscono sul sistema?*

Le due forze costituiscono una coppia di braccio nullo; sia il risultante $\vec{F}$ che il momento risultante $\vec{M}$ sono nulli. Tuttavia il lavoro totale L non è nullo. Si ha infatti:

$$L = L_1 + L_2 = \int \vec{f}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \int \vec{f}_2 \cdot d\vec{s}_2 = \vec{f}_1 \cdot \vec{s}_1 + \vec{f}_2 \cdot \vec{s}_2$$

dove $\vec{s}_1$ ed $\vec{s}_2$ sono i percorsi totali compiuti rispettivamente da P_1 e da P_2. Abbiamo tenuto conto del fatto che $\vec{f}_1$ ed $\vec{f}_2$ sono costanti. Notiamo che $\vec{s}_1$ è concorde con $\vec{f}_1$ e $\vec{s}_2$ è concorde con $\vec{f}_2$; per cui:

$$L = \vec{f}_1 \cdot \vec{s}_1 + \vec{f}_2 \cdot \vec{s}_2 = f s_1 + f s_2 = f(s_1 + s_2) = f s \,.$$

Le equazioni [VI.7], [VI.8] e [VI.9] sono equazioni fondamentali della dinamica dei sistemi. Nel prosieguo del capitolo ricaveremo alcune loro proprietà generali, discutendo come esse possano essere usate per ricavare informazioni rilevanti sulla meccanica dei sistemi; nei prossimi capitoli vedremo la forma che tali equazioni assumono nel caso di sistemi materiali di particolare rilievo.

VI.2. **Il terzo principio della dinamica**

Terzo principio della dinamica

Come tutti i principi della fisica, il terzo principio della dinamica è una legge di carattere generale ricavata dall'esperienza, cioè dalla osservazione dei fatti.

Esso può essere enunciato come segue: *In un sistema di riferimento inerziale, la quantità di moto totale e il momento angolare totale rispetto a un polo fisso di un sistema materiale libero si conservano.*

Come nel caso del punto materiale, anche nel caso di un sistema, con l'aggettivo *libero* si intende dire che il *sistema non è sottoposto ad alcuna sollecitazione esterna.*

Sistema materiale libero

L'enunciato che abbiamo dato del III principio è un enunciato di carattere cinematico: esso esprime cioè una caratteristica cinematica di carattere generale relativa ai sistemi liberi. Esso tuttavia ci consente di trarre anche delle conclusioni di carattere dinamico, cioè relative alle caratteristiche delle forze interne che agiscono sui punti costituenti un sistema materiale.

Scegliamo, nel sistema di riferimento inerziale considerato, un polo *fisso* Ω rispetto a cui calcolare i momenti, cosicché nella [VI.8] sia $\vec{v}_\Omega = 0$. Se il sistema materiale considerato è libero, cioè non è sottoposto a forze esterne, si ha in particolare $\vec{F}^{(e)} = 0$ e $\vec{M}^{(e)} = 0$; per cui la [VI.7] e la [VI.8] si scrivono

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}^{(i)} &= \frac{d\vec{Q}}{dt} \\ \vec{M}^{(i)} &= \frac{d\vec{P}}{dt} \end{aligned}\right\} \text{ per un sistema materiale libero.} \qquad \text{[VI.10]}$$

Ma in virtù del III principio, si ha $\vec{Q}$ = costante e $\vec{P}$ = costante; per cui i secondi membri delle [VI.10] sono nulli. Da ciò segue:

$$\begin{cases} \vec{F}^{(i)} = 0 \\ \vec{M}^{(i)} = 0 \end{cases} \qquad \text{[VI.11]}$$

Osserviamo ora che le forze interne dipendono dalle posizioni relative occupate dai punti materiali costituenti il sistema, ma non dipendono dal fatto che sul sistema agiscano eventualmente altre forze (forze esterne). Per cui le [VI.11], da noi ricavate per un sistema libero, valgono del tutto in generale. Qualunque sia la configurazione assunta da un sistema materiale, *il risultante e il momento risultante delle forze interne sono nulli.*

Risultante e momento risultante delle forze interne sono nulli

In particolare, consideriamo un sistema costituito da due soli punti materiali, P_1 e P_2. Sia $\vec{f}_{12}$ la forza che P_1 esercita su P_2; e sia $\vec{f}_{21}$ la forza che P_2 esercita su P_1. $\vec{f}_{12}$ ed $\vec{f}_{21}$ rappresentano tutte e sole le forze interne al sistema. Per la [VI.11] deve dunque essere:

$$\begin{cases} \vec{F}^{(i)} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} = 0 \\ \vec{M}^{(i)} = \vec{m}_{12} + \vec{m}_{21} = 0 \end{cases} \qquad \text{[VI.12]}$$

Dalla prima delle [VI.12] vediamo che $\vec{f}_{12}$ e $\vec{f}_{21}$ costituiscono una coppia; mentre la seconda delle [VI.12] ci dice che si tratta di una coppia di braccio nullo (vedi Esempio E.VI.1). Per cui concludiamo: *se il punto materiale P_1 esercita una certa forza sul punto materiale P_2, allora P_2 esercita su P_1 una forza uguale ed opposta, ed agente sulla stessa retta di applicazione.* Questo enunciato va anche sotto il nome di *principio di azione e reazione*. In virtù del fatto che le forze interne dipendono solo dalle mutue posizioni, il principio di azione e reazione vale anche se P_1 e P_2 son due punti qualunque presi fra gli n punti che costituiscono un sistema materiale più complesso.

Principio di azione e reazione

La forza (interna) che un certo punto materiale P_i subisce ad opera del resto del sistema, sarà la somma delle forze che ciascuno degli altri punti del sistema esercita su P_i; ma P_i esercita a sua volta su ciascuno degli altri

punti una forza uguale ed opposta a quella che ciascuno di essi esercita su di lui. Le forze interne mutue fra le coppie di punti costituenti un sistema costituiscono un insieme di coppie di braccio nullo.

Sommando su un sottoinsieme dei punti che costituiscono il sistema, è facile estendere il principio di azione e reazione a due parti qualunque S_1 ed S_2 in cui ci sia comodo suddividere un sistema S: se un sistema S_1 esercita su S_2 delle forze il cui risultante sia $\vec{F}_{12}$, allora S_2 esercita su S_1 forze di risultante $\vec{F}_{21}$, tali che $\vec{F}_{12}$ ed $\vec{F}_{21}$ costituiscono una coppia di braccio nullo.

Spesso il principio di azione e reazione viene enunciato sinteticamente nella forma: *ad ogni azione corrisponde una reazione uguale ed opposta, ed agente sulla stessa retta di applicazione.*

Esempio

E.VI.3. *Un treno, composto da una motrice e da tre vagoni, ha inizialmente una accelerazione $a = 0{,}5\ m/s^2$. Supponiamo che sia la motrice che i vagoni abbiano ognuno massa $M = 20$ tonnellate, quale è la forza f_1 che la motrice esercita sui vagoni? E quale la forza resistente f_2 che i vagoni esercitano sulla motrice? Quale forza f_3 esercita il primo vagone sul secondo?*

Il sistema ha un solo grado di libertà, per cui ogni grandezza cinematica o dinamica relativa ad esso può essere espressa in termini scalari (proiezione nella direzione del moto).

Consideriamo prima come «sistema» l'insieme dei tre vagoni; rispetto a questo sistema, la forza esterna $\vec{F}_e$ è la forza f_1 esercitata dalla motrice. Per ricavare f_1 usiamo l'equazione [VI.7].. Poiché in ogni istante tutti i vagoni hanno la stessa velocità (sia essa v), si ha:

$$Q = \sum m_i v_i = \sum M v = 3\ Mv; \text{ e dunque } \frac{dQ}{dt} = 3\ Ma\,.$$

D'altra parte, essendo $\vec{F}^{(i)} = 0$ in virtù della [VI.11], la [VI.7] diviene:

$$f_1 = 3\ Ma = 3 \cdot 20 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 0{,}5 \text{ m/s}^2 = 30 \cdot 10^3\ N$$

Per ricavare f_2, consideriamo ora come sistema l'intero convoglio, suddividendolo in due parti costituite la prima dalla motrice, la seconda dai tre vagoni. Il principio di azione e reazione ci dice allora:

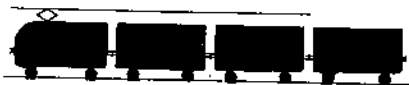
$$f_1 + f_2 = 0\,; \quad \text{cioè} \quad f_2 = -f_1$$

Per trovare la forza f_3, consideriamo ora il sistema costituito dagli ultimi due vagoni; rispetto a questo sistema, f_3 rappresenta il risultante delle forze esterne. Questo sistema, che ha massa 2 M, si muove anch'esso con accelerazione a; per cui la [VI.7] si scrive:

$$f_3 = 2\ Ma = 20 \cdot 10^3\ N$$

VI.3. Centro di massa

Centro di massa

Per potere estrarre in maniera più immediata dalla [VI.7] informazioni utili alla descrizione del moto del sistema conviene dare la definizione di *centro di massa.*

Dato un sistema S costituito da n punti materiali P_i, ciascuno di massa m_i e vettore posizione $\vec{r}_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$, si definisce centro di massa di quel sistema il punto geometrico il cui vettore posizione $\vec{r}_C$ è espresso dalla relazione:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \qquad \text{[VI.12]}$$

Vettore posizione del centro di massa

dove con $M = \sum m_i$ abbiamo indicato la massa totale del sistema.

Proiettando la [VI.12] sugli assi coordinati, si ottengono le coordinate x_C, y_C, z_C del centro di massa stesso:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum m_i x_i}{M} \\[2ex] y_C = \dfrac{\sum m_i y_i}{M} \\[2ex] z_C = \dfrac{\sum m_i z_i}{M} \end{cases} \qquad \text{[VI.13]}$$

Coordinate del centro di massa

L'espressione [VI.12] (e, analogamente, ciascuna delle [VI.13]) viene detta una *media pesata*: essa rappresenta infatti la media dei vettori posizione dei punti P_i, «pesando» però ciascun vettore con la massa di quel punto.

Media pesata

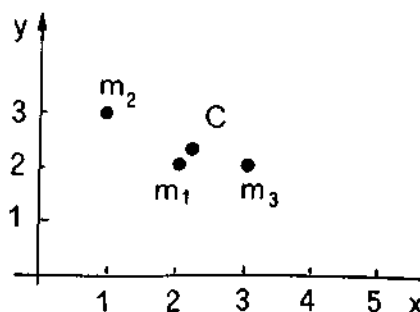
Esempio

E.VI.4. *Un sistema S è costituito da tre punti materiali di massa $m_1 = 60$ g, $m_2 = 15$ g ed $m_3 = 25$ g, i cui vettori posizione sono rispettivamente $\vec{r}_1 \equiv (2, 2, 0)$, $\vec{r}_2 \equiv (1, 3, 0)$, $\vec{r}_3 \equiv (3, 2, 0)$. Calcolare le coordinate del centro di massa (unità nel S.I.).*

I tre punti giacciono sul piano xy ($z = 0$), e la loro rispettiva posizione è quella indicata in figura. Usando le [VI.13] abbiamo:

$$x_C = \frac{60 \cdot 2 + 15 \cdot 1 + 25 \cdot 3}{60 + 15 + 25} = \frac{210}{100} = 2{,}1 \text{ m}$$

$$y_C = \frac{60 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 25 \cdot 2}{60 + 15 + 25} = \frac{215}{100} = 2{,}15 \text{ m}$$

$$z_C = \frac{60 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 25 \cdot 0}{60 + 15 + 25} = 0 \text{ m}$$

Anche il centro di massa C giace dunque sul piano xy, e la sua posizione è quella indicata in figura. Vediamo che C si trova in posizione intermedia rispetto alla posizione dei punti, tendendo a collocarsi in vicinanza della posizione dove è concentrata la maggior parte della massa del sistema.

Centro di massa di due punti

Nel caso particolare di un sistema costituito da due soli punti materiali, è facile verificare, a partire dalla [VI.13], che il centro di massa C si trova sul segmento congiungente i due punti, a una distanza da ciascuno di essi che è inversamente proporzionale alle rispettive masse. Riferendoci alla figura, si ha cioè:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad \text{[VI.14]}$$

Se i due punti hanno la stessa massa, il centro di massa si trova al centro della congiungente.

E.VI.5. *Verificare la validità della [VI.14].*

Scegliendo un sistema di riferimento che abbia origine nel punto P_1 e asse x orientato come il segmento $P_1 P_2$, i vettori posizione $\vec{r}_1$ ed $\vec{r}_2$ dei due punti hanno componenti rispettivamente:

$$\vec{r}_1 \equiv (0, 0, 0)\,; \quad \vec{r}_2 \equiv (d, 0, 0)$$

dove d è la distanza fra P_1 e P_2. Le [VI.13] divengono dunque:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{m_2 d}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_2 d}{M} \\ y_C = 0 \\ z_C = 0 \end{cases}$$

Come vediamo, il centro di massa giace sull'asse x; si ha inoltre:

$$\frac{d}{x_C} = \frac{M}{m_2}$$

ed applicando a questa proporzione la proprietà del sottraendo:

$$\frac{d - x_C}{x_C} = \frac{M - m_2}{m_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

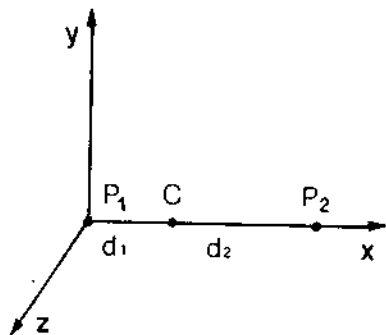
che non è altro che la [VI.14].

Moltiplicando ambo i membri della [VI.12] per M si ha:

$$M\vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_i \qquad \text{[VI.15]}$$

Questa semplice relazione ci consente di stabilire una utile proprietà del centro di massa. Supponiamo che ci sia utile suddividere un certo sistema S materiale in due sue parti, S_1 ed S_2. Calcoliamo separatamente le posizioni $\vec{r}_{C_1}$ ed $\vec{r}_{C_2}$ dei centri di massa rispettivamente di S_1 ed S_2. Per la [VI.15] si ha:

$$\begin{cases} M_1 \vec{r}_{C_1} = (\sum m_i \vec{r}_i)_1 \\ M_2 \vec{r}_{C_2} = (\sum m_i \vec{r}_i)_2 \end{cases} \qquad \text{[VI.16]}$$

dove con $(\sum m_i \vec{r}_i)_1$ e $(\sum m_i \vec{r}_i)_2$ abbiamo indicato la somma estesa ai punti materiali appartenenti rispettivamente ad S_1 e ad S_2; mentre $M_1 = (\sum m_i)_1$ ed $M_2 = (\sum m_i)_2$ indicano le masse totali di S_1 ed S_2 rispettivamente.

Sommando le [VI.16] membro a membro abbiamo:

$$M_1\vec{r}_{C_1} + M_2\vec{r}_{C_2} = (\sum m_i\vec{r}_i)_1 + (\sum m_i\vec{r}_i)_2 = \sum m_i\vec{r}_i = M\vec{r}_C \qquad [VI.17]$$

dove con $\sum m_i\vec{r}_i$ si intende la somma estesa ad $S \equiv S_1 + S_2$, che dunque in virtù della [VI.15] rappresenta il prodotto fra la massa M di S e il vettore posizione $\vec{r}_C$ del suo baricentro. La [VI.17] ci dice che: *dati due sistemi S_1 ed S_2, la posizione del centro di massa C del sistema complessivo $S = S_1 + S_2$ può essere calcolata supponendo che nei centri di massa C_1 e C_2 di S_1 ed S_2 siano concentrate rispettivamente le masse M_1 ed M_2 di S_1 ed S_2.*

Centro di massa di due sistemi estesi

Questa proprietà può facilitare il calcolo della posizione del centro di massa.

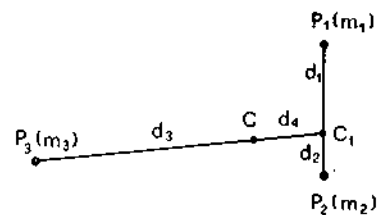
Esempio

E.VI.6. *Un sistema S è costituito da tre punti materiali P_1 P_2 P_3 di masse rispettivamente $m_1 = 30$ g, $m_2 = 60$ g ed $m_3 = 30$ g disposti ai vertici di un triangolo così come mostrato in figura. Trovare la posizione del centro di massa C.*

Il centro di massa C_1 del sistema $S_1 \equiv (P_1\ P_2)$ può essere facilmente trovato mediante la [VI.14]:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}\,; \quad \text{da cui} \quad d_1 = 2\,d_2$$

Il centro di massa C di S si troverà poi sulla congiungente $C_1\,P_3$, in una posizione determinata ancora dalla [VI.14]:

$$\frac{d_3}{d_4} = \frac{m_2 + m_1}{m_3} = 3\,; \quad d_3 = 3\,d_4\,.$$

Nel caso di sistemi continui, il centro di massa si definisce in modo del tutto analogo al caso di sistemi discreti. Suddiviso il sistema in tanti elementi praticamente puntiformi di massa dm_i e volume $d\tau_i$, la posizione $\vec{r}_C$ del centro di massa è data approssimativamente da

Centro di massa di sistemi continui

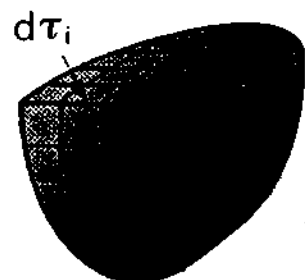
$$\vec{r}_C \approx \frac{\sum \vec{r}_i\, dm_i}{\sum dm_i}\,.$$

Il calcolo diviene esatto eseguendo il limite a zero dei volumetti $d\tau_i$:

$$\vec{r}_C = \lim_{\Delta\tau_i \to 0} \frac{\sum \vec{r}_i\, dm_i}{\sum dm_i}\,.$$

Usando la simbologia propria del calcolo integrale, questo limite si scrive:

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{M} \qquad \left(M = \int dm\right) \qquad [VI.18]$$

dove gli integrali si intendono estesi a tutto il corpo.

Per il calcolo dell'integrale che compare al numeratore della [VI.18] è necessario esprimere la massa elementare dm in funzione delle coordinate x, y, z (oltreché dell'elemento di volume $d\tau$). A questo scopo si introduce la *densità di massa* (o semplicemente *densità*) del sistema considerato. La densità $\rho = \rho(x, y, z)$ è quella funzione delle coordinate che moltiplicata per l'elemento di volume $d\tau$ (la cui espressione in coordinate cartesiane è $d\tau = dx\,dy\,dz$) fornisce la massa dm dell'elemento di volume $d\tau$

Densità

$$dm = \rho\, d\tau = \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{VI.19}$$

Si può anche dire, sinteticamente, che la densità $\rho = \dfrac{dm}{d\tau}$ fornisce, in ogni posizione, la massa per unità di volume.

Massa per unità di volume

Un caso particolare notevole si ha quando la densità ρ non dipende dalla posizione. In questo caso il corpo si dice *omogeneo*, e la densità può essere calcolata come rapporto $\rho = M/V$ fra la massa totale M e il volume totale V del corpo.

Introducendo la [VI.19] nella [VI.18] e proiettando sugli assi coordinati abbiamo:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\int x \cdot \rho(x, y, z) \cdot dx\, dy\, dz}{\int \rho\, d\tau} = \dfrac{\int x\, \rho\, d\tau}{M} \\ y_C = \dfrac{\int y \cdot \rho(x, y, z) \cdot dx\, dy\, dz}{\int \rho\, d\tau} = \dfrac{\int y\, \rho\, d\tau}{M} \\ z_C = \dfrac{\int z \cdot \rho(x, y, z) \cdot dx\, dy\, dz}{\int \rho\, d\tau} = \dfrac{\int z\, \rho\, d\tau}{M} \end{cases} \tag{VI.20}$$

Benché a rigore ogni corpo materiale esteso abbia struttura tridimensionale, non è raro che la forma del corpo sia tale che risulti conveniente schematizzarlo come un sistema a due dimensioni (ad esempio una lamiera piana) o addirittura a una dimensione sola (una asticella o un filo rettilineo). In questi casi conviene introdurre, rispettivamente, una densità superficiale σ e una densità lineare λ:

Densità superficiale

$$\sigma = \frac{dm}{dS} \qquad dm = \sigma(x, y)\, dx\, dy \quad (dS = dx\, dy\text{: elemento di superficie}) \tag{VI.21}$$

Densità lineare

$$\lambda = \frac{dm}{dl} \qquad dm = \lambda(x)\, dx \quad (dl = dx\text{: elemento di lunghezza}) \tag{VI.22}$$

σ e λ rappresentano rispettivamente la massa per unità di superficie e la massa per unità di lunghezza dell'oggetto considerato. Nello scrivere la [VI.21] e la [VI.22] abbiamo supposto, rispettivamente, che il piano xy sia stato scelto coincidente col sistema materiale bidimensionale piano; e che l'asse x sia stato scelto coincidente con la direzione del sistema materiale unidimensionale rettilineo.

Naturalmente, nel caso del sistema materiale rettilineo la posizione del centro di massa è specificata dalla sola coordinata x_C

$$x_C = \frac{\int x\, \lambda(x)\, dx}{\int \lambda(x)\, dx} = \frac{\int x\, \lambda\, dx}{M}; \tag{VI.23}$$

mentre nel caso di un sistema piano la posizione del centro di massa è specificata dalle sue coordinate x_C, y_C:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\int x\,\sigma(x,y)\,dx\,dy}{\int \sigma\,dx\,dy} = \dfrac{\int x\,\sigma\,dS}{M} \\[2ex] y_C = \dfrac{\int y\,\sigma(x,y)\,dx\,dy}{\int \sigma\,dx\,dy} = \dfrac{\int y\,\sigma\,dS}{M} \end{cases} \qquad \text{[VI.24]}$$

Esempi

E.VI.7. *Trovare la posizione del centro di massa di una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza l.*

Il centro di massa si trova al centro C della sbarretta. Ciò risulta facilmente dalla considerazione che per ogni elemento dx a distanza x da C alla sinistra di C, esiste un elemento dx a distanza x da C alla destra di C. Essendo la sbarretta omogenea, questi due elementi hanno la stessa massa $dm = \lambda\,dx$, e dunque il loro centro di massa è nel punto centrale C. Poiché l'intera sbarretta è scomponibile in coppie di elementi simmetrici, il centro di massa complessivo sarà anch'esso in C.

A questa stessa conclusione si perviene ovviamente anche effettuando il calcolo esplicito tramite la [VI.23]. Si ha infatti (tenendo conto che $\lambda = \dfrac{M}{l}$ = costante):

$$x_C = \frac{\int_0^l x\,\lambda\,dx}{M} = \frac{M}{l}\,\frac{\int_0^l x\,dx}{M} = \frac{1}{l}\left[\frac{1}{2}\,x^2\right]_0^l = \frac{1}{2}\,l$$

(Notare che si è assunto implicitamente che l'origine dell'asse delle x coincidesse con l'estremo sinistro della sbarretta).

E.VI.8. *Trovare la posizione del centro di massa di una sbarretta rettilinea non omogenea di lunghezza l = 20 cm, la cui densità lineare $\lambda(x)$ abbia (in un sistema di riferimento come quello mostrato in figura) l'espressione $\lambda(x) = a - bx$ (a = 0,3 g/cm; $b = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ g/cm²).*

Usando la [VI.23] si ha:

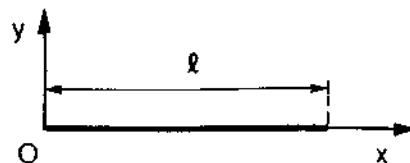
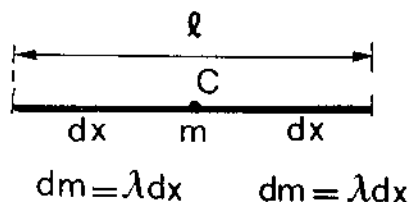
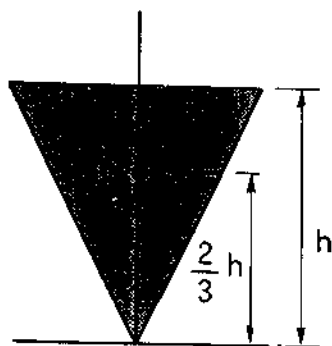
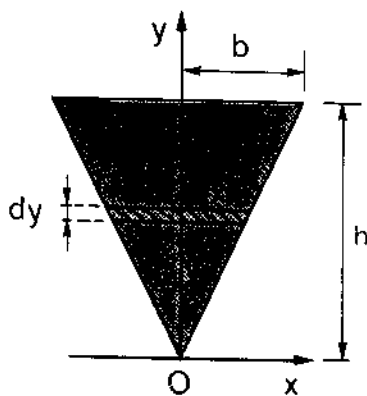
$$x_C = \frac{\int_0^l x\,\lambda\,dx}{M} = \frac{\int_0^l x\,\lambda\,dx}{\int_0^l \lambda\,dx} = \frac{\int_0^l x(a - bx)\,dx}{\int_0^l (a - bx)\,dx} \qquad \text{[VI.25]}$$

Calcoliamo i due integrali che compaiono nella [VI.25]:

$$\int_0^l x(a - bx)\,dx = \left[\frac{1}{2}\,ax^2 - \frac{1}{3}\,bx^3\right]_0^l = \frac{1}{2}\,al^2 - \frac{1}{3}\,bl^3 = 33{,}3 \ \text{g} \cdot \text{cm}$$

$$M = \int_0^l (a - bx)\,dx = \left[ax - \frac{1}{2}\,bx^2\right]_0^l = al - \frac{1}{2}\,bl^2 = 4 \ \text{g}$$

Sostituendo nella [VI.25]

$$x_C = \frac{33{,}3 \ \text{g} \cdot \text{cm}}{4\ \text{g}} \simeq 8{,}3 \ \text{cm}.$$

E.VI.9. *Trovare la posizione del centro di massa della lamiera triangolare omogenea di massa M mostrata in figura (base = 2 b; altezza = h).*

La superficie della lamiera è $S = hb$, per cui la densità superficiale σ è

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{hb}.$$

Per trovare la posizione del centro di massa, usiamo la tecnica di scòmporre il sistema in elementi di cui sia facile trovare il centro di massa; e poi, supponendo che la massa di ogni elemento sia concentrata nel suo centro di massa, troveremo il centro di massa del sistema.

Consideriamo dunque una listella orizzontale posta all'altezza y e di spessore dy: essendo essa omogenea, il suo centro di massa si trova al centro, cioè sull'asse y. La massa dm della listella è

$$\sigma\, dS = \sigma 2x\, dy = \frac{M}{hb} \cdot 2x\, dy = \frac{M}{hb}\, 2\left(\frac{b}{h} y\right) dy.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che per ogni listella è $\frac{x}{y} = \frac{b}{h}$; per cui $x = \frac{b}{h} \cdot y$

In definitiva, per la listella posta ad altezza y abbiamo $dm = \frac{2M}{h^2} y\, dy$.

Poiché i centri di massa di ogni listella giacciono tutti sull'asse y, il centro di massa della lamiera triangolare coincide col centro di massa di una asticella disposta secondo l'asse y, la cui densità lineare sia $\lambda = \frac{dm}{dy} = \frac{2m}{h^2} y$.

Si ha dunque $x_C = 0$; mentre y_C, calcolato usando la [VI.23], risulta:

$$y_C = \frac{\int y \lambda\, dy}{M} = \frac{\int_0^h y \left(\frac{2M}{h^2} y\right) dy}{M} = \frac{2}{h^2} \int_0^h y^2\, dy = \frac{2}{h^2} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{2}{3} h$$

La procedura da noi seguita per il calcolo di x_C, y_C è sostanzialmente analoga a quella che il calcolo integrale prescrive per il computo delle [VI.24].

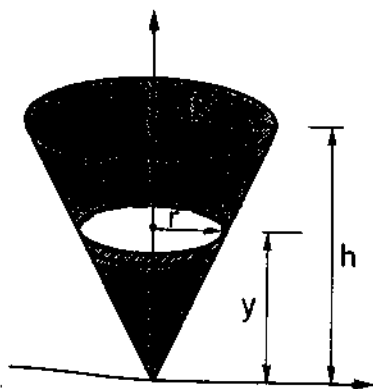
E.VI.10. *Trovare la posizione del centro di massa di un cono omogeneo retto a base circolare di altezza h.*

Usando la stessa tecnica usata per risolvere l'esempio E.VI.9, suddividiamo il cono in sottili dischi di spessore dy Il disco ad altezza y ha raggio r tale che $\frac{r}{y} = \frac{R}{h}$; da cui $r = \frac{R}{h} \cdot y$. Il volume $d\tau$ del disco è dunque

$$d\tau = \pi r^2\, dy = \pi \cdot \left(\frac{R}{h} y\right)^2 dy;$$

e la sua massa è

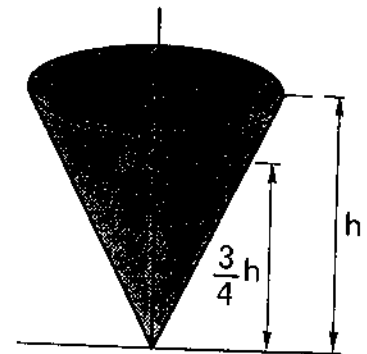
$$dm = \rho\, d\tau = \frac{M}{V}\, d\tau = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} \cdot \pi \frac{R^2}{h^2} y^2 \cdot dy = \frac{3M}{h^3} y^2\, dy$$

(abbiamo tenuto conto del fatto che il volume V del cono è $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$)

Il centro di massa di ogni dischetto giace sull'asse y; per cui il calcolo della posizione del centro di massa C del cono equivale al calcolo del centro di massa di una asticella disposta secondo l'asse y, la cui densità lineare λ sia

$$\lambda = \frac{dm}{dy} = \frac{3M}{h^3}y^2 .$$

Usando la [VI.23] si ha dunque:

$$y_C = \frac{1}{M}\int_0^h y\lambda\, dy = \frac{1}{M}\int_0^h y\left(\frac{3M}{h^3}y^2\right)dy = \frac{3}{h^3}\int_0^h y^3\, dy =$$

$$= \frac{3}{h^3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{3}{4}h$$

VI.4. Equazioni cardinali della dinamica dei sistemi ed il moto del centro di massa

Considerato un sistema materiale S, scriviamo la [VI.15]:

$$M\vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_i$$

Supponiamo che la massa M del sistema sia costante; derivando allora rispetto al tempo otteniamo:

$$M\vec{v}_C = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{q}_i = \vec{Q} \qquad \text{[VI.26]}$$

Quantità di moto totale e velocità del centro di massa

La [VI.26] ci mostra che *la quantità in moto totale $\vec{Q}$ di un sistema materiale* di massa costante (ipotesi che d'ora in avanti faremo sempre implicitamente, salvo avviso contrario) *può essere espressa come prodotto fra la massa totale M del sistema e la velocità $\vec{v}_C$ del suo centro di massa.*

Tenuto conto di ciò, il termine $\vec{v}_\Omega \times \vec{Q}$ che compare al secondo membro della [VI.8] si annulla non solo se il polo Ω è un punto fisso (nel qual caso $\vec{v}_\Omega = 0$), ma anche se il polo Ω coincide col centro di massa (nel qual caso $\vec{v}_\Omega \times \vec{Q} = \vec{v}_C \times \vec{Q} = \vec{v}_C \times M\vec{v}_C = 0$). D'ora in poi supporremo sempre che il polo Ω sia o un punto fisso o il centro di massa del sistema, per cui il secondo membro della [VI.8] si riduce a $\dfrac{d\vec{P}}{dt}$.

Tenendo conto inoltre delle [VI.11] (III principio della dinamica), la [VI.7] e la [VI.8] divengono:

$$\vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \qquad \text{[VI.27a]}$$

$$\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad \text{[VI.27b]}$$

Le [VI.27] vengono dette *equazioni cardinali della dinamica dei sistemi.*

Equazioni cardinali della dinamica dei sistemi

Dal punto di vista dinamico queste equazioni sono particolarmente semplici, perché in esse non compaiono le forze interne, che erano la fonte di maggiore complicazione nelle [VI.3]: in generale, esse non consentono però di ricavare informazioni sul moto di ognuno dei punti materiali costi-

tuenti il sistema, ma solo informazioni relative al moto medio di insieme che il sistema subisce. Solo nel caso particolare di sistemi solidi indeformabili le informazioni cinematiche ricavabili dalla soluzione delle [VI.27] consentono una descrizione esauriente del moto del sistema, come verrà meglio precisato nel prossimo capitolo.

Come ogni altra equazione dinamica, le [VI.27] possono essere usate sia per ricavare informazioni sul moto (cioè informazioni cinematiche) quando siano note quelle informazioni dinamiche che ci consentono di calcolarne il primo membro; sia per calcolare informazioni dinamiche relative alle forze esterne agenti sul sistema quando ci siano note a priori le necessarie informazioni cinematiche relative al moto del sistema.

Per l'uno e per l'altro di questi approcci è opportuno disporre di strumenti di calcolo che ci consentano:

a) di calcolare il risultante e il momento risultante di un assegnato sistema di forze. Questo punto verrà approfondito nel par. (VI.9).
b) di esplicitare le relazioni esistenti fra i secondi membri delle [VI.27] e le caratteristiche cinematiche del moto dei punti costituenti il sistema. Per quanto riguarda la seconda delle [VI.27], la relazione fra il momento angolare totale $\bar{P}$ del sistema e lo stato di moto dei singoli punti risulta sufficientemente semplice solo nel caso di sistemi solidi indeformabili (*corpi rigidi*); questo caso verrà trattato in termini generali nel prossimo capitolo: in questo capitolo (e precisamente nel par. (VI.5)) ci limitiamo a considerare, al riguardo, solo alcuni esempi semplici. Sulla base delle nozioni introdotte nel precedente paragrafo siamo invece già ora in grado di trattare in termini generali il significato cinematico del secondo membro della prima delle [VI.27].

Deriviamo dunque la [VI.26] rispetto al tempo. Nell'ipotesi che la massa M del sistema sia costante, si ha

$$M\bar{a}_C = \frac{d\bar{Q}}{dt} \qquad \text{[VI.28]}$$

dove $\bar{a}_C$ è l'accelerazione del centro di massa.

Tenuto conto della [VI.28], la [VI.27.a] diviene:

$$\bar{F}^{(e)} = M\bar{a}_c \qquad \text{[VI.29]}$$

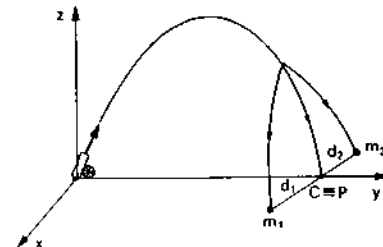
Teorema del centro di massa

Confrontando la [VI.29] con il secondo principio della dinamica relativo al punto materiale (eq. III.5) concludiamo che *il centro di massa di un sistema materiale che abbia massa M costante si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa M del sistema, e cui sia applicata una forza pari al risultante $\bar{F}^{(e)}$ delle forze esterne agenti sul sistema stesso.*

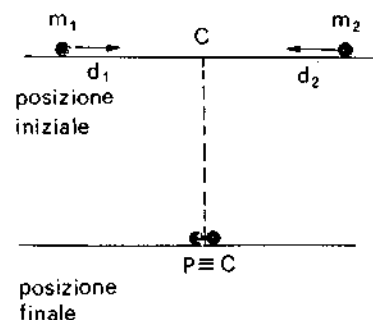
Nel caso che la massa M del sistema *non* sia costante, la [VI.29] non vale ed è necessario ricorrere direttamente alla prima delle [VI.27]: come ciò possa essere fatto in casi semplici verrà discusso nel par. VI.7.

Per illustrare l'utilità della [VI.29] discutiamo tre semplici esempi:

Esempi

E.VI.11. *Trascurando l'effetto di resistenza dell'aria, risolvere il seguente problema: un mortaio spara un proiettile, il quale esplode mentre è in volo. Per semplicità, supponiamo che per effetto dell'esplosione esso si rompa in due soli pezzi, rispettivamente di massa m_1 ed m_2. Una volta che sia stata individuata la posizione in cui è caduto uno dei due pezzi, calcolare la posizione in cui è caduto l'altro. (Si suppongano note le condizioni iniziali con cui il proiettile è stato sparato).*

Il centro di massa C del proiettile si muove come si muoverebbe un proiettile puntiforme; e il suo moto prosegue indisturbato anche dopo l'esplosione, visto che questa è dovuta a sole forze interne.

Siamo dunque in grado, secondo quanto abbiamo visto nel cap. II, di calcolare la posizione P dove il centro di massa cade. Una volta trovato il frammento di massa m_1 (sia esso a distanza d_1 da $P \equiv C$), il frammento di massa m_2 si troverà dalla parte opposta rispetto a C, a una distanza d_2 tale che $\frac{d_2}{d_1} = \frac{m_1}{m_2}$ (vedi eq. [VI.14]). Osserviamo che la procedura di calcolo è esatta solo se tutti i frammenti giungono a terra contemporaneamente.

E.VI.12. *Due oggetti praticamente puntiformi di massa m_1 ed m_2 sono appoggiati su un piano orizzontale senza attrito; inizialmente essi sono posti fermi a una distanza relativa pari a d. Essendo dotati di carica elettrica di segno opposto, i due oggetti si attraggono, e dunque cominciano a muoversi l'uno verso l'altro. Trovare il punto P in cui si incontrano.*

Il risultante $\vec{F}^{(e)}$ delle forze agenti sul sistema è nullo: in virtù della [VI.29], il centro di massa C ha accelerazione nulla; ed essendo inizialmente fermo, esso resta fermo. Poiché nel momento in cui i due oggetti si incontrano il loro centro di massa coincide praticamente col punto P di contatto, tale punto non può che coincidere con la posizione in cui già inizialmente si trovava il centro di massa C.

E.VI.13. *Una mola S di massa $M = 10$ kg ruota intorno al suo asse a una frequenza $\nu = 6000 \frac{giri}{min}$. A causa di difetti di costruzione, il centro di massa C della mola non giace esattamente al centro A dell'asse di rotazione, ma è spostato rispetto ad esso di un tratto $\delta = 1,5$ mm. Trovare l'intensità della forza τ_a che si esercita sull'asse.*

Le forze esterne che agiscono sulla mola sono la forza peso $M\vec{g}$ e la forza $\vec{\tau}_m$ che su di essa esercita l'asse. La [VI.29] si scrive dunque:

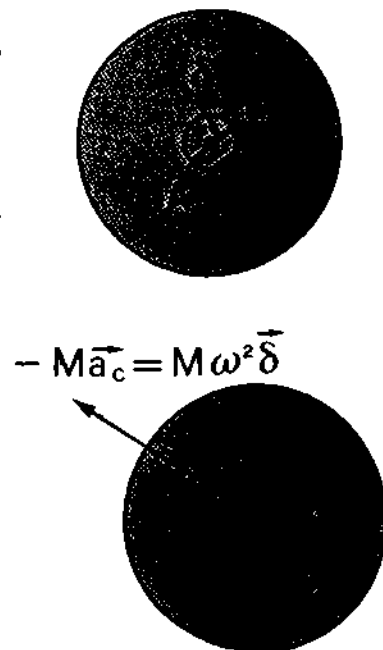
$$M\vec{g} + \vec{\tau}_m = M\vec{a}_C$$

Da cui:

$$-\vec{\tau}_m = M\vec{g} - M\vec{a}_C$$

D'altra parte, per il principio di azione e reazione si ha $\vec{\tau}_a = -\vec{\tau}_m$; da cui:

$$\vec{\tau}_a = M\vec{g} - M\vec{a}_C$$

Poiché il centro di massa C compie un moto circolare uniforme, la sua accelerazione è centripeta e vale $\vec{a}_C = -\omega^2\vec{\delta}$; e dunque $-\vec{a}_C$ è centrifuga e il suo modulo vale $\omega^2 d$ (vedi figura).

Nel nostro caso, si ha:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 6{,}28\,\frac{\text{rad}}{\text{giro}} \cdot 6000\,\frac{\text{giri}}{\text{min}} = 6{,}28 \cdot 100\, s^{-1}.$$

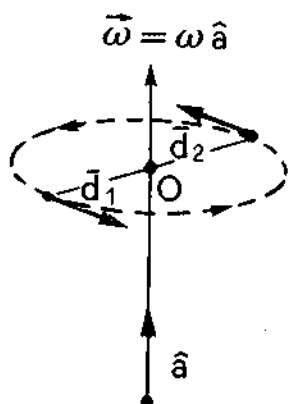
Per cui:

$$\omega^2\delta = (6{,}28 \cdot 100)^2\, s^{-2} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \simeq 6 \cdot 10^2\ \text{m/s}^2$$

$\omega^2\delta$ è dunque molto maggiore di g ($g = 9{,}8$ m/s²); per cui in pratica si ha:

$$|\vec{\tau}_a| \cong Ma_C = M\omega^2\delta = 10\ \text{kg} \cdot 6 \cdot 10^2\ \text{m/s}^2 = 6 \cdot 10^3\ \text{N}\,.$$

VI.5. Semplici considerazioni relative al significato del momento angolare

Significato cinematico del momento angolare

Il momento angolare $\vec{P}$ di un sistema materiale ammette una interpretazione cinematica semplice solo nel caso che il sistema sia dotato di opportune proprietà strutturali; in particolare nel caso di sistema rigidi.

In questo paragrafo, analizzeremo il caso di sistemi materiali non necessariamente rigidi, ma particolarmente semplici, di modo che l'interpretazione cinematica di $\vec{P}$ risulti comunque immediata. Le considerazioni fisiche che faremo a proposito di questi sistemi materiali semplici consentiranno di capire meglio anche casi più complessi, che affronteremo in seguito.

Cominciamo con l'analizzare un sistema costituito da due masse uguali, praticamente puntiformi, collegate l'una all'altra mediante una sbarretta orizzontale di massa trascurabile e ruotanti intorno a un asse verticale fissato nel punto di mezzo della sbarretta orizzontale. La sbarretta è tale da mantenere inalterata la distanza tra le due masse, durante il moto.

Se la sbarretta orizzontale ha lunghezza $2d$, ognuna delle due masse compie un moto circolare con velocità di modulo $v = \omega d$, dove ω è la velocità angolare.

Il momento angolare $\vec{P}$ del sistema rispetto al polo O risulta evidentemente:

$\vec{M}^{(e)}$ parallelo ad $\hat{a}$ cambia il modulo di $\vec{\omega}$

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{d}_1 \times m\vec{v}_1 + \vec{d}_2 \times m\vec{v}_2 = \\ &= 2dmv\,\hat{a} = 2dm\omega d\,\hat{a} = 2md^2\vec{\omega}\end{aligned} \qquad \text{[VI.30]}$$

Con $\hat{a}$ abbiamo indicato il versore dell'asse di rotazione (orientato in modo che esso veda ruotare il sistema in senso antiorario); ed $\vec{\omega} = \omega\hat{a}$ è il vettore velocità angolare già definito nel par. II.9.

In questo caso dunque, fissata la geometria (cioè fissato il coefficiente $2md^2$), il momento angolare $\vec{P}$ risulta proporzionale alla velocità angolare $\vec{\omega}$:

$$\vec{P} = k\vec{\omega}$$

Se vogliamo cambiare la velocità angolare $\vec{\omega}$, dobbiamo cambiare $\vec{P}$ e dunque deve essere $\dfrac{d\vec{P}}{dt}$ diverso da zero; e secondo la [VI.27b], ciò richiede che si applichino dall'esterno delle forze con momento risultante $\vec{M}^{(e)}$ diverso da zero. Se per semplicità supponiamo di non voler far muo-

muovere il punto O (cioè il centro di massa del sistema), deve trattarsi di un sistema di forze con risultante $\vec{F}^{(e)}$ nullo, diciamo una coppia.

Se vogliamo modificare il modulo della velocità angolare (cioè il modulo di $\vec{P}$) senza cambiare la direzione, allora $\frac{d\vec{P}}{dt}$ deve essere parallelo a $\vec{P}$ e dunque anche $\vec{M}^{(e)}$ deve essere parallelo a $\vec{P}$: la coppia deve essere cioè tale che il suo momento sia parallelo all'asse di rotazione (coppia *motrice* o coppia *resistente* a seconda che si voglia aumentare o diminuire il modulo di $\vec{\omega}$).

Se vogliamo cambiare la direzione di $\vec{P}$ (e di $\vec{\omega}$) senza cambiarne il modulo, allora $\frac{d\vec{P}}{dt}$ deve essere ortogonale a $\vec{P}$: anche il momento della coppia deve dunque essere ortogonale all'asse.

Supponiamo ora che il sistema costituito dalle due masse rotanti sia un sistema libero, cioè non sottoposto ad alcuna sollecitazione esterna. Si ha allora, in particolare, $\vec{M}^{(e)} = 0$, e dunque $\vec{P} = \text{cost}$. Se la geometria del sistema non cambia, allora la [VI.30] ci dice che la velocità angolare $\vec{\omega}$ si mantiene costante indefinitamente. Il fatto che nella realtà, un tale sistema, una volta messo in rotazione e abbandonato a sé, rallenti progressivamente fino a fermarsi, denuncia in effetti la presenza di un momento frenante esercitato dalle forze d'attrito: momento frenante che nella nostra presente schematizzazione supponiamo essere trascurabile.

Mantenendo dunque il sistema isolato ($\vec{M}^{(e)} = 0$), modifichiamone la geometria in virtù di forze interne: ad esempio supponiamo che le due masse possano scorrere sulla sbarretta, e che vengano attratte verso O fino a che la loro distanza dall'asse di rotazione non dimezzi: $d' = \frac{d}{2}$.

Nella configurazione finale, il momento angolare $\vec{P}'$ sarà dato da:

$$\vec{P}' = 2\,m\,d'^2\vec{\omega}' \qquad \text{[VI.31]}$$

D'altra parte, poiché il cambiamento di configurazione è avvenuto in virtù di sole forze interne, (e dunque $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$) il momento angolare deve essersi conservato: $\vec{P}' = \vec{P}$; e dunque

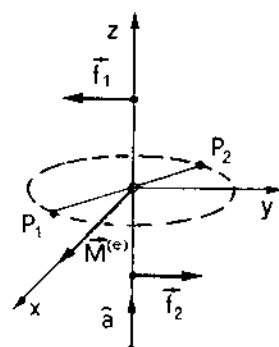
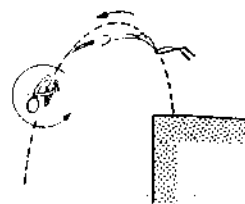
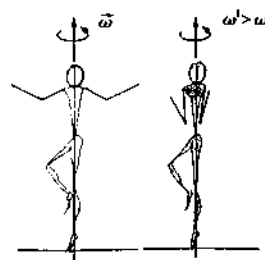
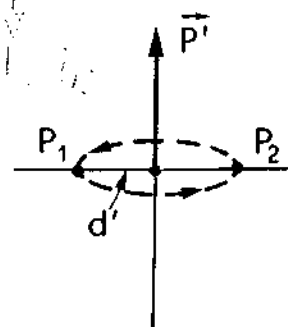
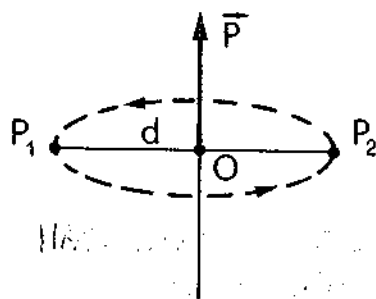
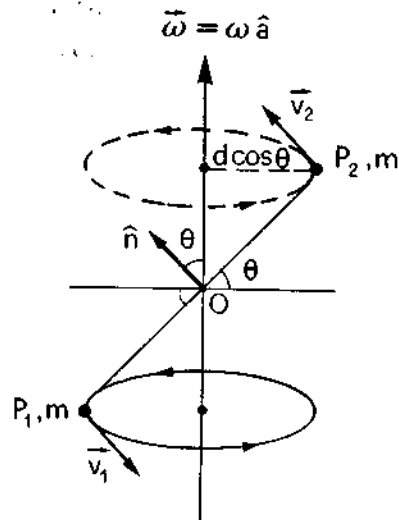
$$2\,m\,d'^2\vec{\omega}' = 2\,m\,d^2\vec{\omega}$$

da cui

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega}\left(\frac{d}{d'}\right)^2$$

E poiché nell'esempio considerato $\left(\frac{d}{d'}\right) = 2$, si ha $\vec{\omega}' = 4\,\vec{\omega}$: il cambiamento di configurazione (in virtù di forze interne) di un sistema liberamente ruotante, si accompagna a variazioni della velocità angolare $\vec{\omega}$.

È questo l'effetto utilizzato ad esempio da un pattinatore, che dopo aver iniziato una piroetta a braccia allargate la termina richiamando le braccia accosto al corpo: e ciò provoca un aumento della velocità angolare di rotazione.

O da un tuffatore, che avendo iniziato il tuffo col corpo allungato, lo prosegue poi rannicchiato su se stesso, ed aumenta così la velocità angolare di rotazione su se stesso per compiere dei salti mortali.

Consideriamo ora un altro semplice esempio: due masse puntiformi P_1 e P_2 di massa m sono unite da una sbarretta rigida di massa trascurabile e lunghezza $2\,d$. Questa sbarretta è saldata nel suo punto centrale a un asse di rotazione verticale $\hat{a}$ che ruota con velocità angolare ω: tuttavia la sbarretta non è ortogonale all'asse di rotazione, ma la sua normale $\hat{n}$ forma con $\vec{\omega} = \omega\hat{a}$ un angolo $\theta \neq 0$ (costante nel tempo).

Calcoliamo il momento angolare $\vec{P}$ del sistema rispetto al punto O in cui la sbarretta è saldata all'asse di rotazione.

Le due masse P_1 e P_2 compiono con velocità angolare ω un moto circolare di raggio $r = d\cos\theta$; per entrambe il modulo della velocità (costante) vale $\mathrm{v} = \omega\, d\cos\theta = |\vec{\mathrm{v}}_1| = |\vec{\mathrm{v}}_2|$. Sia $\vec{\mathrm{v}}_1$ che $\vec{\mathrm{v}}_2$ sono ortogonali al piano formato dalla sbarretta e dall'asse di rotazione, e dunque sono ortogonali a $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$: quando ad esempio le due masse passano per la posizione indicata in figura, $\vec{\mathrm{v}}_1$ è ortogonale al foglio e diretta nel verso uscente verso l'alto, e $\vec{\mathrm{v}}_2$ è ortogonale al foglio e diretta nel verso entrante verso il basso. Tuttavia, considerato che anche $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ hanno verso opposto, i momenti angolari dei due punti $\vec{p}_1 = \vec{d}_1 \times m\vec{\mathrm{v}}_1$ e $\vec{p}_2 = \vec{d}_2 \times m\vec{\mathrm{v}}_2$ sono fra di loro concordi e uguali, sono contenuti nel piano formato dalla sbarretta e dall'asse di rotazione, ed hanno la direzione della normale $\hat{n}$ alla sbarretta (così come indicato in figura); il loro modulo vale:

$$p = |\vec{d}_1 \times m\vec{\mathrm{v}}_1| = |\vec{d}_2 \times m\vec{\mathrm{v}}_2| = d\,m\mathrm{v} = d\,m\omega\, d\cos\theta = m\,d^2\omega\cos\theta\,.$$

In definitiva si ha

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 2\,m\,d^2\omega\cos\theta\;\hat{n} \qquad \text{(VI.32]}$$

Osserviamo che in questo caso $\vec{P}$ *non* ha la stessa direzione di $\vec{\omega}$ (cioè dell'asse di rotazione).

Confrontando la [VI.32] con la [VI.30], vediamo che entrambe possono essere scritte nella forma compatta

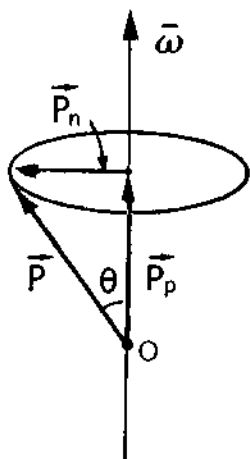
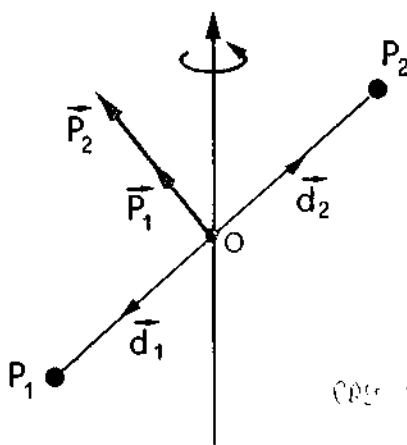
$$\vec{p} = (2\,m\,d^2\,(\hat{n}\cdot\vec{\omega}))\cdot\hat{n} \qquad \text{[VI.33]}$$

La [VI.33] si riduce infatti alla [VI.30] nel caso particolare che $\hat{n}$ ed $\hat{\omega}$ abbiano la stessa direzione, cioè nel caso che la sbarretta sia ortogonale all'asse; e diviene la [VI.32] quando $\hat{n}$ ed $\vec{\omega}$ formano un angolo $\theta \neq 0$.

Notiamo anche che se $\vec{\omega}$ è costante, il modulo P di $\vec{P}$ ($P = 2\,m\,d^2\,(\hat{n}\cdot\vec{\omega}) = 2\,m\,d^2\omega\cos\theta$) è costante. Tuttavia se $\theta \neq 0$ *non* è costante il vettore $\vec{P}$: infatti $\hat{n}$ (e dunque anche $\vec{P}$) percorre un cono con angolo di apertura θ intorno ad $\vec{\omega}$. Per conseguenza, $\dfrac{d\vec{P}}{dt} \neq 0$; e dunque per la [VI.27.b) deve essere $\vec{M}^{(e)} \neq 0$.

Se la sbarretta non è ortogonale all'asse di rotazione (cioè se $\theta \neq 0$), il moto può aver luogo solo se si applicano al sistema forze esterne con momento non nullo.

Per ulteriore precisazione, scomponiamo la [VI.27.b] nelle componenti parallela e normale all'asse di rotazione:

$$\begin{cases} M_p^{(e)} = \dfrac{dP_p}{dt} \\[2mm] \vec{M}_n^{(e)} = \dfrac{d\vec{P}_n}{dt} \end{cases}$$

Vediamo dalla figura che la componente P_p di $\vec{P}$ parallela ad $\vec{\omega}$ è costante; per conseguenza è $\frac{dP_p}{dt} = 0$, e dunque anche $M_p^{(e)} = 0$. *Per mantenere in rotazione il sistema non è necessaria alcuna coppia motrice.*

Il vettore $\vec{P}_n$, componente di $\vec{P}$ normale all'asse, rappresenta invece un vettore rotante (ortogonale all'asse) di modulo costante: la sua derivata $\frac{d\vec{P}_n}{dt}$ è dunque anch'essa (vedi eq. [II.32]) un vettore rotante – ortogonale a $\vec{P}_n$ –, e tale deve essere anche $\vec{M}_n^{(e)}$: per esercitare tale momento, i cuscinetti che sostengono l'asse sono costretti a esplicare due forze, $\vec{f}_1$ ed $\vec{f}_2$, fra di loro uguali ed opposte, e anch'esse rotanti. È l'effetto di queste forze quello che si esplica nella forma di vibrazione sul volante di una automobile le cui ruote anteriori non siano bene equilibrate.

Immaginiamo ora che a un certo istante $t = t_0$ (ad esempio nel momento in cui la sbarretta passa per il piano del disegno) la saldatura che vincola la sbarretta all'asse si rompa. Da quel momento in poi, il sistema diviene un sistema libero, per cui dunque in particolare è $\vec{M}^{(e)} = 0$. Da quell'istante in poi, in virtù della [VI.27.b] deve essere $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$.

Se $\vec{P}'$ è il momento angolare del sistema dopo l'istante t_0, deve dunque essere $\vec{P}' = \vec{P}(t_0) =$ costante. Il manubrio, costituite dalle due masse collegate dalla sbarretta, comincerà a muoversi da allora in poi di moto rotatorio intorno a $\vec{P}(t_0)$: ognuna delle due masse compie un moto circolare uniforme di raggio d con velocità angolare ω' tale che:

$$2md^2\omega' = |\vec{P}'| = |\vec{P}(t_0)| = 2md^2\omega\cos\theta$$

e dunque

$$\omega' = \omega\cos\theta\,.$$

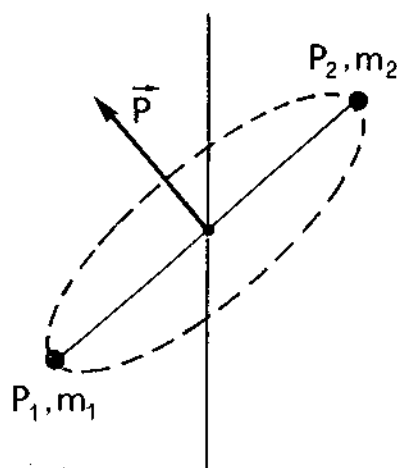
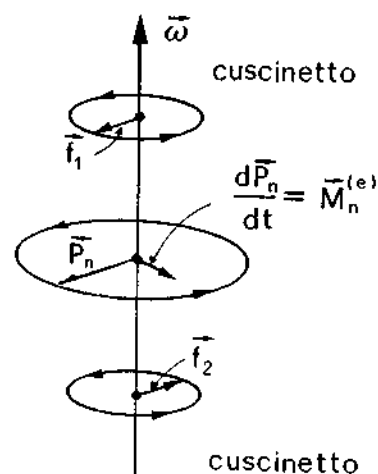
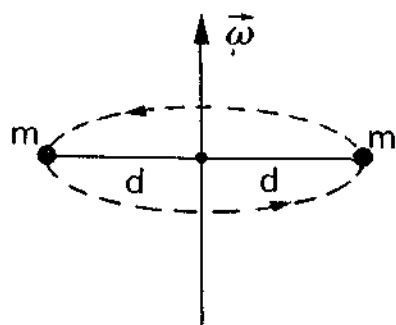
Assi liberi di rotazione

L'esempio del manubrio ci mostra dunque che un certo sistema (rigido) quando sia libero (quando non sia sottoposto a momento di forze esterne) non può ruotare intorno ad un asse qualunque: esso può ruotare soltanto intorno a particolari assi che rappresentino per il sistema degli assi di simmetria. Il manubrio può ruotare intorno a qualunque asse passante per il centro di massa e ortogonale ad esso; esso può inoltre ruotare (sia pure in condizioni di instabilità) intorno ad un asse coincidente con la sbarretta.

Gli assi attorno ai quali un sistema rigido può ruotare liberamente vengono detti *assi liberi di rotazione*.

I concetti introdotti in questo paragrafo verranno ripresi in condizioni di maggiore generalità nel prossimo capitolo, dedicato alla dinamica dei sistemi rigidi.

Esempio

E.VI.14. *Consideriamo il manubrio costituito da due masse uguali collegate da una sbarretta di massa trascurabile di lunghezza $2d$: supponiamo che inizialmente esso ruoti liberamente intorno a un asse ortogonale al centro della sbarretta con velocità angolare ω. Se in virtù di forze interne le due masse*

vengono portate a distanza $d' = \frac{d}{2}$ dall'asse di rotazione, abbiamo visto che nella configurazione finale il sistema ruota con velocità angolare $\omega' = 4\omega$. Passando dallo stato di moto iniziale a quello finale, si conserva l'energia cinetica?

Inizialmente l'energia cinetica era:

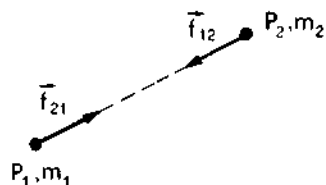
$$K_i = 2\left(\frac{1}{2}\, m \mathrm{v}_i^2\right) = m \mathrm{v}_i^2 = m(\omega d)^2 = m d^2 \omega^2 .$$

Nello stato di moto finale essa vale

$$K_f = m \mathrm{v}_f^2 = \mathrm{m}(\omega' d')^2 = m\left(4\omega \cdot \frac{d}{2}\right)^2 = m d^2 \omega^2 \cdot 4$$

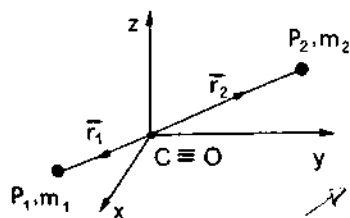
Dunque: $K_f = 4K_i$: l'energia cinetica del sistema è quadruplicata. Ciò non deve meravigliarci: il passaggio dallo stato iniziale allo stato finale è avvenuto in virtù di forze interne che avendo momento risultante nullo non modificano il momento angolare del sistema. Quelle stesse forze interne compiono però lavoro (positivo) sul sistema, ed è questo lavoro che ne incrementa l'energia cinetica.

VI.6. Il problema dei due corpi

Problema dei due corpi

Nel V capitolo, abbiamo risolto il problema del moto di un pianeta intorno al Sole: moto governato dalla forza di attrazione gravitazionale che il Sole esercita sul pianeta stesso. In quella occasione, abbiamo tratto profitto del fatto che la massa M del Sole è molto maggiore della massa m del pianeta: $M \gg m$. Per conseguenza, la forza che il pianeta esercita sul Sole - pur essendo per il III principio della dinamica uguale ed opposta alla forza che il Sole esercita sul pianeta - determina una perturbazione trascurabile sul moto del Sole, in virtù della grande massa di quest'ultimo: cosicché potevamo considerare come praticamente inerziale un sistema di riferimento con origine nel Sole e orientamento costante rispetto alle stelle fisse.

Consideriamo ora punti materiali P_1 e P_2 di massa m_1 ed m_2, che si muovono in virtù delle forze che mutuamente si esercitano, supponendo che siano trascurabili le forze che altri sistemi esercitano su di esse: cosicché nel loro insieme esse costituiscono un sistema isolato. Ci proponiamo di risolvere il problema dinamico relativo al loro moto, rinunciando all'ipotesi che una delle due masse sia molto maggiore dell'altra.

Sia, come al solito, $\vec{f}_{12}$ la forza che P_1 esercita su P_2; ed $\vec{f}_{21}$ la forza che P_2 esercita su P_1. Per il III principio, si ha

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} .$$

Sia P_1 che P_2 sono dunque sottoposti a una forza: né l'uno né l'altro rappresenta perciò un punto materiale libero. Per conseguenza, un sistema di riferimento con origine solidale con l'uno o con l'altro di essi *non* rappresenta un sistema inerziale; e non può dunque essere usato per scrivere e risolvere l'equazione [III.5] $\vec{f} = m\vec{a}$. Tuttavia, essendo nullo il risultante delle forze esterne agenti sul sistema, il loro centro di massa C si comporta come un punto materiale libero; e dunque per descrivere il moto di P_1 e P_2 possiamo scegliere un sistema di riferimento inerziale con origine in C. Sia, in

questo sistema di riferimento, $\vec{r}_1$ il vettore posizione di P_1; e sia $\vec{r}_2$ il vettore posizione di P_2. Per la definizione di centro di massa, $\vec{r}_1$ ed $\vec{r}_2$ hanno la stessa direzione e verso opposto.

Per fissare le idee, poniamo l'attenzione sul moto di uno di essi, ad esempio di P_2. L'equazione del moto si scrive:

$$\vec{f}_{12} = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \qquad \text{[VI.34]}$$

Per ragioni di simmetria, $\vec{f}_{12}$ può essere diretta solo secondo $\vec{r}_2$ (concorde con $\vec{r}_2$ o discorde con esso a seconda che la forza sia rispettivamente repulsiva o attrattiva); dunque:

$$\vec{f}_{12} = f\hat{r}_2 \qquad \text{[VI.35]}$$

($f > 0$: forza repulsiva; $f < 0$: forza attrattiva). Inoltre, sempre per motivi di simmetria, f può dipendere solo dalla distanza relativa fra P_1 e P_2, cioè può dipendere solo da $(r_1 + r_2)$; cosicché la [VI.34] può essere scritta come:

$$f(r_1 + r_2)\,\hat{r}_2 = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \qquad \text{[VI.36]}$$

Ora, poiché r_1 ed r_2 rappresentano le distanze dei due punti dal centro di massa, in virtù della [VI.14] si ha $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$; per cui

$$(r_1 + r_2) = r_2\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) = r_2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = Kr_2\,; \qquad \text{[VI.37]}$$

dove $K = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$.

La [VI.36] diviene dunque:

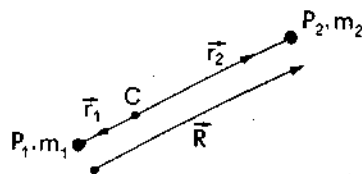
$$f(Kr_2)\cdot\hat{r}_2 = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \qquad \text{[VI.38]}$$

Evidentemente, $K \to 1$ quando m_1 diviene molto maggiore di m_2; cioè quando il centro di massa del sistema delle due masse va praticamente a coincidere con la posizione del punto materiale di massa maggiore.

Nella [VI.38], la forza al primo membro è espressa in funzione della distanza r_2 fra il punto materiale e l'origine del sistema di riferimento. La [VI.38] ha dunque la stessa struttura dell'equazione del moto di un unico punto materiale che si muove in virtù di una forza centrale nota (forza diretta verso un punto fisso). Il problema dei due corpi si riconduce così semplicemente al problema di un punto materiale mobile sotto l'azione di una forza nota diretta verso un punto fisso.

L'uso dell'equazione [VI.38] richiede che la posizione del punto materiale P_2 venga misurata rispetto al centro di massa C del sistema.

Si trova spesso più conveniente esprimere l'equazione [VI.38] in termini del vettore $\vec{R}$ che individua la posizione di P_2 rispetto a P_1.

Massa ridotta

Risulta evidente dalla definizione di $\vec{R}$ che:

il versore di $\vec{R}$ è uguale al versore di $\vec{r}_2$: $\hat{R} = \hat{r}_2$

il modulo R di $\vec{R}$ è pari ad $r_1 + r_2$.

Per conseguenza, tenuto conto della [VI.37], abbiamo:

$$\vec{R} = R\hat{R} = (r_1 + r_2)\,\hat{r}_2 = K r_2 \hat{r}_2 = K\vec{r}_2.$$

La [VI.36] può dunque essere scritta come

$$f(R)\,\hat{R} = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{m_2}{K}\frac{d^2(K\vec{r}_2)}{dt^2} = \frac{m_2}{K}\frac{d^2\vec{R}}{dt}$$

ovvero

$$f(R)\,\hat{R} = m'_2 \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \left(m'_2 = \frac{m_2}{K} = \frac{m_2}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} = \frac{m_2\, m_1}{m_1 + m_2} \right) \quad \text{[VI.39]}$$

La quantità $m'_1 = m'_2 = \dfrac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}$ viene detta *massa ridotta*. La [VI.39] ci dice che:

Dati due punti materiali che si muovono in virtù delle sole forze di mutua interazione, il moto dell'uno (sia P_2) rispetto all'altro (P_1) può essere trattato come se quest'ultimo fosse fermo, con l'unico accorgimento di sostituire alla massa inerziale di P_2 la massa ridotta $\left(\dfrac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\right)$.

Esempio

E.VI.15. *Scrivere l'equazione del moto della Luna rispetto alla Terra, tenendo conto del termine correttivo dovuto al moto della Terra a causa della forza che essa subisce ad opera della Luna.*

Se M_T è la massa della Terra ed m la massa della Luna, tenuto conto che la forza di attrazione subita dalla Luna è la forza di gravitazione universale ($\vec{f} = -\dfrac{G\, M_T\, m}{R^2}\,\hat{R}$, dove $\vec{R}$ è il vettore posizione della Luna rispetto alla Terra), la [VI.39] diviene:

$$-\frac{G\, M_T\, m}{R^2}\,\hat{R} = \left(\frac{m\, M_T}{m + M_T}\right) \cdot \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

Se ci interessasse invece descrivere il moto della Luna rispetto al centro di massa C Terra-Luna, detto $\vec{r}$ il vettore posizione della luna rispetto a C, la [VI.38] ci consentirebbe di scrivere:

$$-\frac{G\, M_T\, m\, \hat{r}}{\left[r\left(1 + \frac{m}{M_T}\right)\right]^2} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Nell'una e nell'altra di queste equazioni il termine correttivo comporta semplicemente una modifica di coefficienti moltiplicativi costanti, e non introduce dunque alcuna complicazione matematica rispetto al caso che il problema venga trattato nella approssimazione $\frac{M_T}{m} \gg 1$.

VI.7. Sistemi a massa variabile

Sistemi a massa variabile

Quando un sistema materiale ha massa costante, la [VI.27.a] si riduce alla [VI.29]: conoscendo il risultante $\vec{F}^{(e)}$ delle forze esterne, si può allora ricavare direttamente l'accelerazione del centro di massa del sistema.

Se il sistema materiale *non* ha massa costante, è invece necessario ricorrere direttamente alla [VI.27.a]: $\vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$. Per illustrare come questa equazione possa essere usata nel caso generale cominciamo col considerare un esempio notevole, cioè un razzo la cui propulsione derivi dalla espulsione ad alta velocità dei prodotti di combustione del propellente. Descriviamo il fenomeno in un sistema di riferimento inerziale che per brevità chiameremo *sistema del laboratorio*.

Se $\vec{Q}(t)$ è la quantità di moto del razzo all'istante t, si ha:

$$\vec{Q}(t) = M(t)\,\vec{V}(t)$$

dove $M(t)$ e $\vec{V}(t)$ sono rispettivamente massa e velocità del razzo all'istante t. Nell'intervallo elementare di tempo Δt a partire da t, sia dm la quantità di materia espulsa dal razzo e sia $\vec{v}$ la velocità media nel laboratorio del materiale espulso. Poiché l'espulsione di massa avviene in virtù di forze interne, per il III principio della dinamica essa non produce variazione di quantità di moto del sistema (razzo + materiale espulso); e dunque la derivata della quantità di moto $\frac{d\vec{Q}}{dt}$ del sistema (razzo + materiale espulso) dovrà essere uguagliata al risultante $\vec{F}^{(e)}$ delle forze esterne secondo l'equazione [VI.27a]. All'istante $t + \Delta t$, si ha per il sistema (razzo + materiale espulso):

$$\vec{Q}(t + \Delta t) = (M(t) - dm)\,\vec{V}(t + \Delta t) + dm\,\vec{v}$$

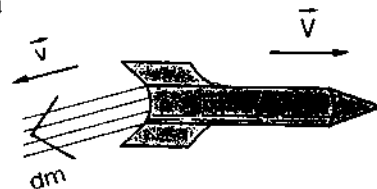
Per cui

$$\begin{aligned}\Delta\vec{Q} &= \vec{Q}(t + \Delta t) - \vec{Q}(t) = (M(t) - dm)\,\vec{V}(t + \Delta t) + dm\,\vec{v} - M(t)\,\vec{V}(t) = \\ &= M(t)\,[\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)] + dm\,(\vec{v} - \vec{V}(t + \Delta t))\end{aligned}$$

Dividendo per Δt e passando al limite per $\Delta t \to 0$, si ha:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M(t)\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dm}{dt}\,(\vec{v} - \vec{V})$$

Considerato che la variazione di massa M del razzo è dovuta proprio alla espulsione di propellente ($dm = -dM$), si ha

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}\,;$$

per cui l'equazione precedente diviene

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M(t)\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{V}) = M(t)\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dM}{dt}(\vec{V} - \vec{v})$$

espressione che sostituita nella [VI.27.a) fornisce infine

$$\vec{F}^{(e)} = M(t)\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dM}{dt}(\vec{V} - \vec{v}) \qquad \text{[VI.40]}$$

In realtà la [VI.40] vale in generale, sia nel caso che il sistema espella massa (come nell'esempio del razzo) sia nel caso che esso riceva massa dall'ambiente (ad esempio una goccia sulla quale, mentre cade, va condensandosi umidità): la differenza nei due casi sta solo nel diverso andamento di $M(t)$ (e in particolare nel diverso segno di $\frac{dM}{dt}$) nonché nel diverso valore di $\vec{v}$. In effetti, per risolvere la [VI.40] è necessario che vengano fornite le opportune informazioni a proposito delle modalità con cui la massa M varia, e della velocità cui cui la massa stessa viene espulsa o assorbita dal sistema.

Esempi

E.VI.16. *Calcolare come varia la velocità di un razzo che espella propellente in direzione opposta al moto con velocità costante V_R relativamente al razzo. Si trascuri la forza esterna $\vec{F}^{(e)}$ agente sul razzo.*

Il moto avviene in una sola dimensione (sia essa la direzione dell'asse delle x) per cui la [VI.40] si riduce (considerato che $\vec{F}^{(e)} = 0$) alla equazione scalare

$$M(t)\frac{dV_x}{dt} - \frac{dM}{dt}(v_x - V_x) = 0$$

Si ha inoltre $v_x - V_x = - V_R = \text{cost}$: infatti $v_x - V_x$ rappresenta la velocità del propellente rispetto al razzo, e sappiamo che tale velocità relativa è negativa (perché opposta al moto) e in modulo pari a V_R. Per cui:

$$M(t)\frac{dV_x}{dt} + \frac{dM}{dt}V_R = 0$$

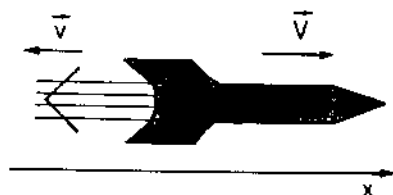
Separando le variabili si ha:

$$-\frac{dM}{M} = \frac{dV_x}{V_R}$$

e integrando fra l'istante iniziale t_0 e l'istante t:

$$-\int_{t_0}^{t}\frac{dM}{M} = \frac{1}{V_R}\int_{t_0}^{t} dV_x$$

da cui

$$\ln\frac{M_0}{M(t)} = \frac{1}{V_R}(V_x(t) - V_{x_0})$$

e dunque infine:

$$V_x(t) = V_{x_o} + V_R \ln \frac{M_o}{M(t)} \qquad \text{[VI.41]}$$

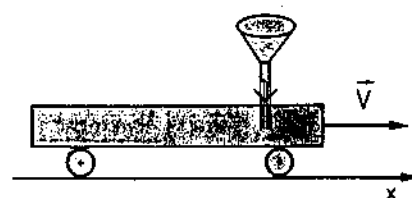
dove V_{x_o} e M_o rappresentano rispettivamente la velocità del razzo e la sua massa all'istante iniziale $t = t_0$. Vediamo che se la massa del razzo va diminuendo ($M(t) < M_o$) e se il propellente viene espulso in verso contrario al moto ($V_R > 0$), la velocità $V_x(t)$ all'istante generico è maggiore della velocità V_{x_o} all'istante iniziale $t = t_0$.

Se ci viene fornita la legge $M(t)$ con cui la massa varia, la [VI.41] ci fornisce l'espressione esplicita di $V_x(t)$. Ad esempio se il regime di combustione è costante, possiamo porre

$$M(t) = M_o - \lambda t$$

e la [VI.41] diviene

$$V_x(t) = V_{x_o} + V_R \ln \frac{M_o}{M_o - \lambda t} \,.$$

E.VI.17. *Un vagore di massa M_o ha inizialmente velocità V_o e procede, senza attriti, su un binario orizzontale. Su di esso viene versata acqua che cade verticalmente, e lo riempie progressivamente. La quantità di acqua che il vagone riceve nell'unità di tempo sia $\frac{dM}{dt} = \lambda =$ costante. Trovare la legge con cui varia la velocità V del vagone.*

Proiettando la [VI.40] sull'asse orizzontale si ha

$$0 = M(t)\frac{dV}{dt} + \frac{dM}{dt}(V - v) \qquad \text{[VI.42]}$$

avendo tenuto conto che $\vec{F}^{(e)}$ ha proiezione orizzontale nulla. Nel nostro caso si ha inoltre:

$$M(t) = M_o + \lambda t$$

$$\frac{dM}{dt} = \lambda$$

$v = 0$ (la proiezione orizzontale della velocità con cui l'acqua cade è nulla).

La [VI.42] diviene dunque

$$(M_o + \lambda t)\frac{dV}{dt} + \lambda V = 0$$

Separando le variabili e integrando fra l'istante iniziale $t_o = 0$ e l'istante generico t si ha

$$\int_{t_o}^{t} \frac{dV}{V} = -\int_{t_o}^{t} \frac{\lambda\, dt}{M_o + \lambda t}$$

$$\ln \frac{V}{V_o} = \ln \frac{M_o}{M_o + \lambda t}$$

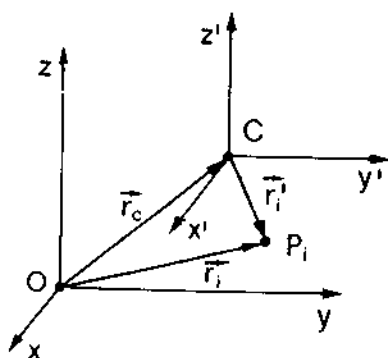
da cui passando dai logaritmi ai numeri:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{M_0}{M_0 + \lambda t}$$

e infine

$$V = \frac{(V_0 M_0)}{(M_0 + \lambda t)} .$$

VI.8. Energia cinetica e teorema di Koenig

Teorema di Koenig

In molti problemi, informazioni utili sul moto di un sistema possono essere ricavate utilizzando l'equazione [VI.9], che esprime per il sistema considerato il teorema dell'energia cinetica. A tal fine, è utile esprimere l'energia cinetica in termini più direttamente legati al moto di insieme del sistema.

Sistema di riferimento baricentrale

Considerato un sistema di punti materiali $S \equiv \{P_i\}$ che si muove in un sistema di riferimento inerziale $R(O\,x\,y\,z)$, introduciamo un secondo sistema di riferimento (mobile) R' che abbia origine coincidente con il centro di massa C del sistema S e orientamento fisso rispetto ad R. R' è dunque un sistema di riferimento, in generale *non* inerziale, che si muove in moto *traslatorio* rispetto al sistema inerziale R.

Sia $\vec{r}_c$ il vettore posizione di C rispetto ad R e $\vec{r}_i$ il vettore posizione del punto P_i di S ancora rispetto ad R. Sia inoltre $\vec{r}'_i$ il vettore posizione di P_i rispetto a R'. Si ha:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}'_i$$

Derivando questa relazione rispetto al tempo, e tenuto conto che i versori $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ di R' sono costanti, si ottiene (vedi par. III.9, e in particolare l'eq. [III.16]):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}'_i \qquad \text{[VI.43]}$$

dove $\vec{v}_i$ è la velocità di P_i rispetto a R; $\vec{v}_c$ è la velocità del centro di massa C rispetto ad R; e $\vec{v}'_i$ è la velocità di P_i rispetto a R', cioè rispetto al sistema solidale con C. È da osservare che la condizione di moto traslatorio per il sistema R' implica che la velocità di trascinamento sia la stessa per tutti i punti P_i e pari a $\vec{v}_c$.

Usando la [VI.43], l'energia cinetica K_i del punto P_i nel sistema inerziale R può essere scritta come

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_c + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_c + \vec{v}'_i) =$$
$$= \frac{1}{2} m_i v_c^2 + \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_c$$

Sommando sull'indice i si ottiene l'energia cinetica totale K del sistema S:

$$K = \sum K_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_c =$$
$$= \frac{1}{2} v_c^2 \sum m_i + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \vec{v}_c \cdot \sum m_i \vec{v}'_i \qquad \text{[VI.44]}$$

A proposito dei tre termini che compaiono al secondo membro della [VI.44] osserviamo quanto segue:

$\frac{1}{2} v_c^2 \sum m_i$: può essere scritto come $\frac{1}{2} M v_c^2$, dove $M = \sum m_i$ è la massa totale del sistema.

Energia cinetica del centro di massa

$\sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$: rappresenta l'energia cinetica del sistema S nel sistema di riferimento R' che ha origine nel centro di massa C e orientamento fisso rispetto a R. Indicheremo questo termine con K' $\left(K' = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2\right)$ e lo chiameremo *energia cinetica di S rispetto al centro di massa.*

Energia cinetica rispetto al centro di massa

$\vec{v}_c \cdot \sum m_i \vec{v}_i'$: questo termine è nullo. Infatti, usando la [VI.26], possiamo scrivere $\sum m_i \vec{v}_i' = M\vec{v}_c'$, dove $\vec{v}_c'$ è la velocità del centro di massa rispetto al sistema R' in cui sono espresse le velocità $\vec{v}_i'$. Ma nel sistema R' è nulla la velocità di C, poiché C rappresenta anche l'origine di R'.

In definitiva la [VI.44] diviene:

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + K' \qquad \text{[VI.45]}$$

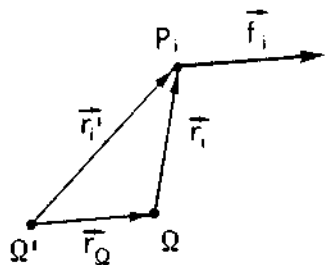
La [VI.45] va sotto il nome di *teorema di Koenig.* Questo teorema può essere enunciato a parole come segue: *in un sistema di riferimento inerziale qualunque, l'energia cinetica di un sistema materiale S può essere espressa come somma dell'energia cinetica* $\frac{1}{2} M v_c^2$ *che il sistema avrebbe se tutta la sua massa fosse concentrata nel suo centro di massa, più l'energia cinetica* $K' = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ *che il sistema S ha in un sistema di riferimento con origine nel centro di massa e orientamento fisso*

Teorema di Koenig

Nei prossimi capitoli avremo modo di discutere interessanti esempi, come applicazione del teorema di Koenig.

VI.9. Sistemi di forze applicate

Lo stato di moto di un sistema materiale è completamente noto solo quando sia noto lo stato di moto di ciascuno dei punti che lo costituiscono. Tuttavia, già gli esempi discussi fino ad ora sono sufficienti ad illustrare come anche la sola conoscenza della quantità di moto $\vec{Q}$, del momento angolare $\vec{P}$ (rispetto a un polo Ω) e della energia cinetica K possano fornire informazioni di grande interesse sul moto del sistema. Nel prossimo capitolo, vedremo che nel caso di *sistemi rigidi* (cioè indeformabili), la conoscenza di $\vec{Q}$ e di $\vec{P}$ esaurisce addirittura la conoscenza dello stato cinematico del sistema: lo stato di moto di un sistema rigido è cioè completamente noto quando siano noti $\vec{Q}$ e $\vec{P}$.

Poiché le equazioni [VI.27] che governano l'evoluzione di $\vec{Q}$ e di $\vec{P}$ nel tempo hanno al primo membro solo il risultante $\vec{F}^{(e)}$ e il momento risultante $\vec{M}^{(e)}$ delle forze esterne rispetto al polo Ω, si ha che condizione perché

due sistemi di forze $\sum \equiv \{\vec{f}_i\}$ e $\sum' \equiv \{\vec{f}'_i\}$ producano gli stessi effetti sul moto di un sistema rigido è che $\sum$ e $\sum'$ abbiano lo stesso risultante $\vec{F}$ e lo stesso momento risultante $\vec{M}$.

Sistemi di forze equivalenti

Per questo motivo, due sistemi di forze che abbiano lo stesso risultante $\vec{F}$ e lo stesso momento risultante $\vec{M}$ vengono detti *sistemi di forze equivalenti* (sottointendendosi *riguardo al loro effetto sul moto di sistemi rigidi*).

Sempre nel caso di sistemi rigidi, essendo lo stato di moto completamente specificato da $\vec{Q}$ e da $\vec{P}$, anche l'energia cinetica K deve essere esprimibile in termini di $\vec{Q}$ e di $\vec{P}$; per conseguenza, due sistemi di forze applicati ad un sistema rigido devono necessariamente compiere lo stesso lavoro (a parità di spostamento del corpo rigido) se essi hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante, cioè se essi costituiscono due sistemi di forze fra di loro equivalenti.

Ovviamente, se applicati a sistemi *non* rigidi, due sistemi di forze equivalenti *non* producono in generale gli stessi effetti cinematici: essi producono semplicemente lo stesso moto del centro di massa e la stessa evoluzione nel tempo del momento angolare $\vec{P}$ del sistema. Ad esempio, una coppia di braccio nullo non produce alcun effetto cinematico su un corpo rigido; ma può produrre il moto di avvicinamento (o di allontanamento) relativo se applicata a due punti materiali liberi di muoversi uno rispetto all'altro (esempio E.VI.2).

In vista del calcolo del risultante, del momento risultante e del lavoro, è utile avere presenti le seguenti proprietà dei sistemi di forze.

a) Dato un sistema di forze $\sum \equiv \{\vec{f}_i\}$ di risultante $\vec{F} = \sum \vec{f}_i$, se $\vec{M}_\Omega$ è il momento risultante di $\sum$ rispetto a un polo qualunque Ω, il momento $\vec{M}_{\Omega'}$ rispetto a un altro qualunque polo Ω' è legato ad $\vec{M}_\Omega$ dalla relazione

$$\vec{M}_{\Omega'} = \vec{M}_\Omega + \vec{r}_\Omega \times \vec{F} \qquad \text{[VI.46]}$$

dove $\vec{r}_\Omega$ è il vettore posizione di Ω rispetto a Ω' ($\vec{r}_\Omega = \Omega'\Omega$). Facendo riferimento alla figura, si ha infatti che il momento $\vec{m}'_i$ della forza $\vec{f}_i$ rispetto al polo Ω' può essere scritto come:

$$\vec{m}'_i = \vec{r}'_i \times \vec{f}_i = (\vec{r}_\Omega + \vec{r}_i) \times \vec{f}_i = \vec{r}_\Omega \times \vec{f}_i + \vec{r}_i \times \vec{f} = \vec{r}_\Omega \times \vec{f}_i + \vec{m}_i$$

dove $\vec{m}_i$ è il momento di $\vec{f}_i$ rispetto a Ω. Sommando sull'indice i (cioè sommando su tutte le forze) si ha:

Dipendenza del momento dal polo

$$\vec{M}_{\Omega'} = \sum \vec{m}'_i = \sum \vec{r}_\Omega \times \vec{f}_i + \sum \vec{m}_i = \vec{r}_\Omega \times \sum \vec{f}_i + \vec{M}_\Omega = \vec{r}_\Omega \times \vec{F} + \vec{M}_\Omega$$

che è quanto si voleva dimostrare

Nel caso che il sistema di forze abbia risultante nullo, la [VI.46] ci mostra che il momento risultante ha sempre lo stesso valore ($\vec{M}_{\Omega'} = \vec{M}_\Omega$) qualunque sia il polo rispetto a cui il momento stesso viene calcolato; ciò vale in particolare quando il sistema $\sum$ considerato sia una coppia, coerentemente con quanto abbiamo visto nell'esempio E.VI.1.

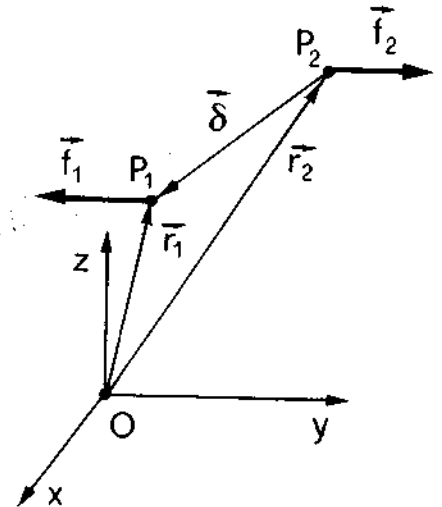
Dalla [VI.46] risulta anche che se due sistemi hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante rispetto a un polo Ω, allora essi hanno lo stesso momento risultante anche rispetto a qualunque altro polo Ω'. *Se due sistemi di forze sono fra di loro equivalenti rispetto a un polo Ω, essi sono equivalenti anche rispetto a qualunque altro polo Ω'.*

b) Consideriamo un generico sistema di forze $\sum$, di risultante $\vec{F}$ e momento risultante $\vec{M}$ rispetto al polo Ω. Il sistema $\sum$ è equivalente a un

sistema $\sum'$ costituito da tre sole forze, di cui una forza pari al risultante $\bar{F}$ ed applicata in un punto O scelto arbitrariamente, e le altre due forze costituenti una coppia di opportuno momento $\bar{m}$; in particolare se O coincide con Ω deve essere $\bar{m} = \bar{M}$.

Equivalenza a una forza più una coppia

Ciò si dimostra facilmente. Infatti, poiché ogni coppia ha risulttante nullo, il risultante di $\sum'$ è semplicemente pari ad $\bar{F}$. Il momento di $\sum'$ (che affinché $\sum'$ sia equivalente a $\sum$ deve essere pari ad $\bar{M}$) è dato dal momento $\bar{M}_F$ di $\bar{F}$ più il momento $\bar{m}$ della coppia. Affinché $\sum'$ sia equivalente a $\sum$ deve cioè essere:

$$\bar{M} = \bar{M}_F + \bar{m}\,.$$

D'altra parte $\bar{m}$ è indipendente dal polo e $\bar{M}_F$ è pari a $\Omega O \times \bar{F}$. Se O coincide col polo Ω è $\bar{M}_F = 0$, e dunque deve essere $\bar{m} = \bar{M}$; nel caso generale deve essere $\bar{m} = \bar{M} - \Omega O \times \bar{F}$.

c) Poiché qualunque sistema $\sum$ di risultante $\bar{F}$ e momento risultante $\bar{M}$ rispetto al polo Ω è equivalente a una forza $\bar{F}$ applicata in Ω più una coppia C di momento $\bar{M}$, segue che il lavoro elementare dL eseguito nell'intervallo di tempo dt da $\sum$ *quando esso agisce su un sistema rigido* può essere calcolato come somma del lavoro dL_F di $\bar{F}$ e del lavoro dL_C di C:

$$dL = dL_F + dL_C$$

Lavoro di un sistema di forze applicato a un sistema rigido

D'altra parte si ha

Lavoro del risultante

$$dL_F = \bar{F} \cdot d\bar{s}_\Omega = \bar{F} \cdot \bar{v}_\Omega\, dt \qquad \text{[VI.47]}$$

dove $d\bar{s}_\Omega$ e $\bar{v}_\Omega$ sono rispettivamente lo spostamento elementare e la velocità del polo Ω. Il lavoro elementare eseguito dalla coppia può per sua parte essere scritto come:

$$\begin{aligned} dL_C &= \bar{f}_1 \cdot d\bar{r}_1 + \bar{f}_2 \cdot d\bar{r}_2 = \bar{f}_1 \cdot d\bar{r}_1 - \bar{f}_1 \cdot d\bar{r}_2 = \\ &= \bar{f}_1 \cdot (d\bar{r}_1 - d\bar{r}_2) = \bar{f}_1 \cdot d(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = \bar{f}_1 \cdot d\bar{\delta} \end{aligned}$$

(dove $\bar{\delta} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$). Se la coppia è applicata a un sistema rigido, $\bar{\delta}$ è un vettore di modulo costante; per cui (vedi eq. [II.37]):

$$d\bar{\delta} = \frac{d\bar{\delta}}{dt}\, dt = \bar{\omega} \times \bar{\delta} \cdot dt$$

dove $\bar{\omega}$ è la velocità angolare di cui è dotato il corpo rigido. Per cui:

$$\begin{aligned} dL_C &= \bar{f}_1 \cdot d\bar{\delta} = (\bar{f}_1 \cdot \bar{\omega} \times \bar{\delta})\, dt = (\bar{\omega} \cdot \bar{\delta} \times \bar{f}_1)\, dt = \\ &= \bar{\omega} \cdot \bar{M}\, dt = \bar{M} \cdot \bar{\omega}\, dt \end{aligned} \qquad \text{[VI.48]}$$

Lavoro del momento risultante

(abbiamo usato la proprietà del prodotto misto $\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{c} \times \bar{a}$, vedi par. II.5.5; ed inoltre il fatto che il momento $\bar{M}$ della coppia è dato da $\bar{M} = \bar{\delta} \times \bar{f}_1$, vedi Esempio E.VI.1). In definitiva

$$dL = \bar{F} \cdot \bar{v}_\Omega\, dt + \bar{M} \cdot \bar{\omega}\, dt \qquad \text{[VI.48']}$$

Il lavoro elementare compiuto da un sistema di forze $\sum$ agente su un sistema rigido è pari alla somma del lavoro $\vec{F} \cdot \vec{v}_\Omega\, dt$ compiuto dal risultante $\vec{F}$ applicato al polo Ω, più il lavoro $\vec{M} \cdot \vec{\omega}\, dt$ compiuto da una coppia di momento $\vec{M}$

Sistema di forze parallele

Centro delle forze parallele

d) Un sistema $\sum$ di forze $\vec{f}_i$ *fra di loro parallele* è equivalente a un sistema $\sum'$ costituito da una unica forza $\vec{F}$ pari al risultante di $\sum$ applicata nel punto C (detto *centro di forze parallele*) definito dal vettore posizione:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \vec{r}_i f_i}{\sum f_i} \qquad \text{[VI.49]}$$

dove f_i è il modulo di $\vec{f}_i$ e $\vec{r}_i$ il vettore posizione del punto P_i in cui $\vec{f}_i$ è applicata. Anche questo asserto si dimostra facilmente. Che $\sum'$ abbia lo stesso risultante di $\sum$ è evidente, per cui basta dimostrare che $\sum'$ ha anche lo stesso momento risultante di $\sum$ rispetto a un polo qualunque, ad esempio rispetto all'origine O.

Essendo le forze f_i fra di loro parallele, possiamo scriverle nella forma

$$\vec{f}_i = f_i\, \hat{u}$$

dove $\hat{u}$ è il versore comune di tutte le $\vec{f}_i$.

Il risultante $\vec{F}$ può essere scritto come

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_i = (\sum f_i)\, \hat{u}\,.$$

Il momento risultante $\vec{M}$ delle $\vec{f}_i$ rispetto all'origine può essere scritto come:

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \sum \vec{r}_i \times f_i\, \hat{u} = \sum \vec{r}_i f_i \times \hat{u} = (\sum \vec{r}_i f_i) \times \hat{u} \qquad \text{[VI.50]}$$

Ma in virtù della definizione [VI.49] del centro di forze, si ha

$$\sum \vec{r}_i f_i = \vec{r}_C \sum f_i$$

e moltiplicando vettorialmente per $\hat{u}$ a destra

$$(\sum \vec{r}_i f_i) \times \hat{u} = (\vec{r}_c \sum f_i) \times \hat{u} = \vec{r}_c \times (\sum f_i\, \hat{u}) = \vec{r}_c \times \vec{F}$$

Il primo membro di questa equazione rappresenta, secondo la [VI.50], il momento $\vec{M}$ del sistema $\sum$ di forze parallele; mentre la quantità $\vec{r}_c \times \vec{F}$ rappresenta il momento di una forza $\vec{F}$ applicato nel centro C delle forze parallele, cioè il momento di $\sum'$. La loro uguaglianza dimostra dunque il nostro asserto.

Baricentro

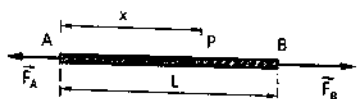
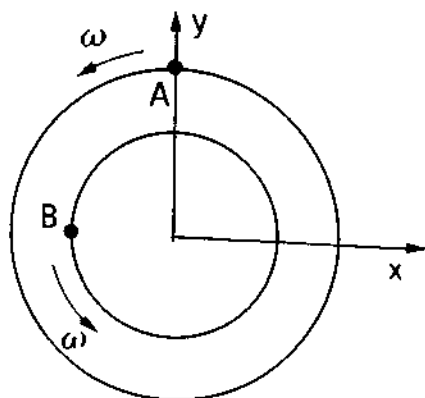
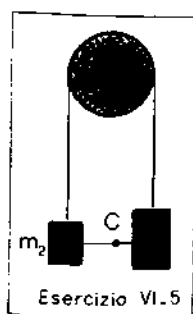
Un caso particolare di grande rilievo si ha quando il sistema di forze parallele sia costituito dalle forze peso $\vec{f}_i = m_i \vec{g}$ di un sistema di punti P_i di masse m_i. In questo caso il centro delle forze parallele viene detto *baricentro*; sostituendo $f_i = m_i g$ nella [VI.49] si ha

$$\vec{r}_c = \frac{\sum \vec{r}_i\, m_i g}{\sum m_i g} = \frac{\sum \vec{r}_i\, m_i}{\sum m_i} \qquad \text{[VI.51]}$$

Confrontando con la [VI.12] vediamo che il *baricentro di un sistema materiale coincide con il suo centro di massa.* Va notato che questa conclusione vale nel caso che il sistema abbia dimensioni tali per cui $\vec{g}$ non vari apprezzabilmente entro lo spazio occupato dal sistema (in caso contrario, nello scrivere la [VI.51] avremmo dovuto usare un valore diverso di $\vec{g}$ in corrispondenza dei diversi punti P_i del sistema).

Baricentro e centro di massa

In virtù dell'equivalenza fra il sistema $\sum$ delle forze peso $\vec{f}_i = m_i \vec{g}$ e il sistema $\sum'$ costituito dalla forza $\vec{F} = \sum m_i \vec{g} = M\vec{g}$ (con M massa totale del sistema) applicata in C concludiamo che: *l'effetto che la forza peso produce sul moto di un sistema rigido può essere calcolato immaginando che la forza peso totale del sistema sia applicata al centro di massa (o baricentro) del sistema stesso.*

In un sistema rigido, il peso può essere considerato applicato nel baricentro

Esercizio VI.4

Esercizio VI.5

Esercizi del capitolo VI

VI.1. Il punto materiale A, di massa $m_A = 0{,}2$ kg, si muove su una traiettoria circolare di raggio $R_A = 20$ cm, con velocità angolare costante $\omega = 2$ rad/s, occupando all'istante iniziale la posizione indicata con A in figura (di coordinate (O, R_A)). Il punto materiale B, di massa $m_B = 0{,}3$ kg, si muove su una traiettoria circolare di raggio $R_B = 12$ cm, con la stessa velocità angolare del punto A, occupando all'istante iniziale, la posizione B della figura (di coordinate $(-R_B, O)$. Calcolare l'accelerazione del centro di massa.

(Risposta: 0,43 m/s^2)

VI.2. In vari problemi precedenti, per esempio quando una massa ne trascina un'altra tramite un *filo* di collegamento inestensibile e di *massa trascurabile*, abbiamo visto che si può considerare una tensione di valore uniforme lungo tutto il filo.
Supponiamo ora di avere una fune omogenea ed inestensibile, di lunghezza L, la cui massa per unità di lunghezza sia λ, che sia sottoposta all'azione simultanea di due forze $\vec{F}_A$ ed $\vec{F}_B$, aventi la stessa retta di applicazione e versi opposti, come in figura. Nell'ipotesi che si possa trascurare l'effetto della forza peso, ricavare l'espressione della tensione in un punto generico della corda (a distanza x dall'elemento A).

(Risposta: $\tau = F_A + \frac{x}{L}(F_B - F_A)$)

VI.3. Una cinghia omogenea di lunghezza L è appoggiata a cavallo di un piolo cilindrico, liscio, orizzontale e fisso, di raggio molto minore di L. Inizialmente, dalle due parti del piolo, pendono tratti verticali di cinghia di ugual lunghezza $L/2$. A partire da questa situazione iniziale di equilibrio, per effetto di un piccolo spostamento, la cinghia inizia a scivolare sotto l'azione della forza di gravità. Calcolare l'accelerazione della cinghia quando da un lato del piolo pende un tratto di lunghezza $\frac{3}{4}L$ (e dall'altro lato $\frac{1}{4}L$).

(Risposta: $a = 4{,}9$ m/s^2)

VI.4. Un disco omogeneo, di raggio $R = 20$ cm e centro O, ha un foro circolare di raggio $r = 5$ cm e centro O'. La distanza tra O ed O' è $d = 10$ cm. Determinare la posizione del centro di massa del disco forato.

(Risposta: $x = -0{,}67$ cm)

VI.5. Su un piolo liscio scorre un filo flessibile, inestensibile e di massa trascurabile che collega due masse $m_1 = 2$ kg ed $m_2 = 1$ kg. Le masse, inizialmente trattenute ferme alla stessa quota, si mettono in movimento sotto l'azione della forza peso. Calcolare l'accelerazione del c.d.m. delle due masse m_1 ed m_2.

(Risposta: 1,1 m/s^2)

VI.6. Su un piano orizzontale privo di attrito sono posti due blocchi di masse $M_1 = 2$ kg ed $M_2 = 3$ kg rispettivamente. Tra i due blocchi, inizialmente fermi, è sistemata una molla, di massa trascurabile, mantenuta compressa da un corto filo di collegamento tra i blocchi. Ad un certo istante il filo viene tagliato ed i due blocchi vengono messi in movimento dalla molla. Si osserva che la velocità acquistata dalla massa m_1 è $V_1 = 0{,}5$ m/s. Qual'è l'energia elastica della molla nella sua configurazione iniziale? (Risposta: 0,42 J)

VI.7. Una bomba, inizialmente ferma, esplode in tre frammenti A, B e C, aventi la stessa massa m. Dalla qualità e quantità di esplosivo si conosce l'energia cinetica complessiva K dei tre frammenti. Le direzioni di volo dei frammenti sono indicate in figura e giacciono su un piano. Perché?

Quali sono le espressioni, in funzione di K ed m, dei moduli v_A, v_B e v_C delle velocità dei tre frammenti? (Risposta: $v_A = \sqrt{K/m}$ $v_B = v_C = \sqrt{K/2\,m}$)

Esercizio VI_6

VI.8. Una chiatta di massa $M = 150$ kg e lunghezza $L = 5$ m è ferma in acqua tranquilla, senza alcun ancoraggio, con un estremo A a contatto con la parete del molo. In questa situazione statica un uomo di massa $m = 75$ kg sta sulla chiatta proprio all'altezza dell'estremo opposto B. Ad un certo punto l'uomo inizia a camminare sulla chiatta ed arriva all'estremo A, dove si ferma. Se si trascura l'attrito della chiatta sull'acqua, di quanto si allontana l'estremo A dal molo? (Risposta: 1,67 m)

Esercizio VI.7

VI.9. Un cuneo di massa $M = 2$ kg, la cui sezione è delimitata da un quarto di cerchio di raggio $R = 59$ cm, è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Un corpo A, di massa $m = 0{,}5$ kg, inizialmente tenuto fermo alla sommità del cuneo (vedi figura), può scivolare senza attrito sul profilo circolare del cuneo stesso. Inizialmente il sistema cuneo + corpo è fermo rispetto al piano orizzontale; poi il corpo viene lasciato libero e scivola lungo il profilo del cuneo. Calcolare la velocità V con cui arretra il cuneo, quando il corpo A ha raggiunto il piano orizzontale. (Risposta: 0,7 m/s)

Esercizio VI.8

VI.10. Lo scivolo dell'esercizio precedente (VI.9) è inizialmente fermo, mentre il corpo di massa m gli viene lanciato contro lungo il piano orizzontale in direzione perpendicolare alle generatrici della sua superficie cilindrica. Quale velocità minima deve avere il corpo per arrivare ad una quota pari ad $R/2$? (Risposta: 2,47 m/s)

VI.11. Un cannone di massa M spara in orizzontale, dalla sommità di una torre di altezza h, un proiettile di massa m, che raggiunge il suolo (orizzontale) a distanza D (gittata) dalla base della torre (vedi figura). Trascurando la resistenza dell'aria, calcolare la forza F orizzontale e costante che un sistema di ammortizzatori deve esercitare sul cannone perché, per il rinculo, esso arretri di un tratto d prima di fermarsi.

$$\left(\text{Risposta: } F = \frac{m^2 D^2 g}{4\,d\,M h}\right)$$

Esercizio VI-9

VI.12. Trovare la posizione del centro di massa di una lamina omogenea piana a forma di semicerchio di raggio R.

$$\left(\text{Risposta: } x_c = 0,\ y_c = \frac{4}{3}\,\frac{R}{\pi}\right)$$

VI.13. Due blocchi, di masse $m_1 = 1$ kg ed $m_2 = 2$ kg rispettivamente, si muovono su un piano orizzontale, nella stessa direzione e nello stesso verso, con velocità $v_1 = 1$ m/s e $v_2 = 2$ m/s rispettivamente, relativamente ad un sistema di riferimento solidale con il piano orizzontale. Se si osserva il moto dei due blocchi da un sistema di riferimento solidale con il loro centro di massa, quanto vagono la quantità di moto e l'energia cinetica totali del sistema?

$$\left(\text{Risposte: } 0 \text{ kg m s}^{-1};\ \frac{1}{3}\text{ J}\right)$$

Esercizio VI-10

VI.14. Una sfera omogenea, di massa m e raggio a, è collegata, in un punto B della sua superficie, ad un filo flessibile, inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza l. Il filo è ancorato nel punto A ad una parete verticale, rigida e liscia. Ricavare l'espressione della tensione del filo e della reazione vincolare della parete.

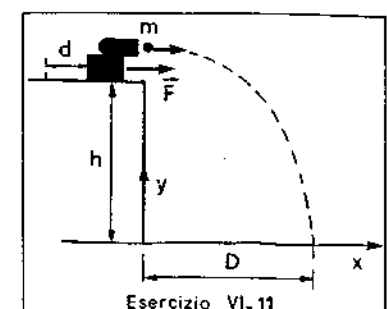
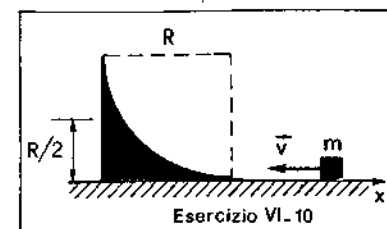
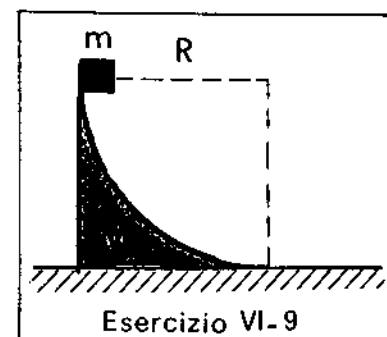
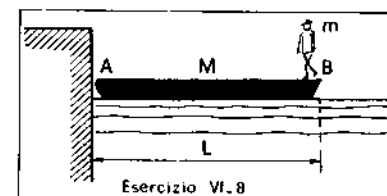
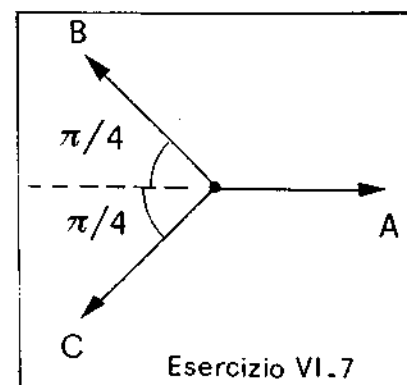
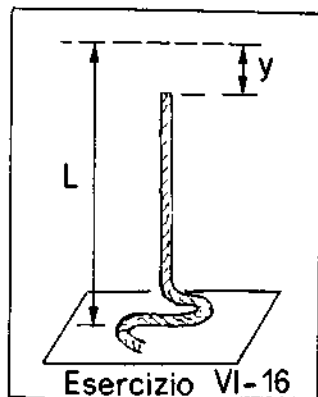
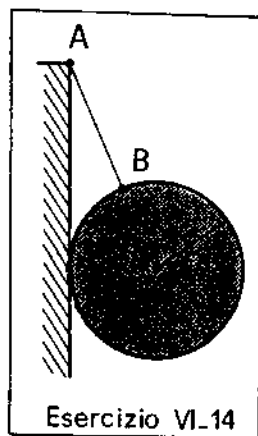
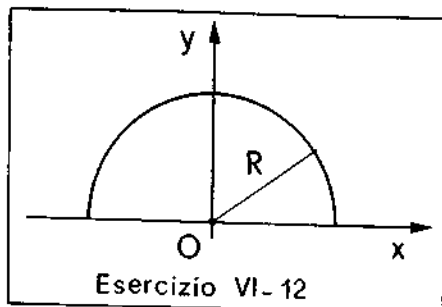
$$\left(\text{Risposte: } \tau = mg\,(l+a)/\sqrt{l\,(l+2\,a)} \quad N = mga/\sqrt{l\,(l+2\,a)}\right)$$

Esercizio VI-11

Esercizio VI-12

Esercizio VI-14

Esercizio VI-15

Esercizio VI-16

VI.15. Un nastro flessibile ed omogeneo è appoggiato su un piano orizzontale liscio per una sua parte, mentre il resto penzola nel vuoto verso il basso per effetto della gravità. Calcolare l'accelerazione del nastro nel momento in cui solo una frazione f della sua lunghezza totale è a contatto col piano orizzontale.

(Risposta: $a = (1 - f)\, g$)

VI.16. Una fune omogenea di densità lineare λ è inizialmente tenuta ferma in posizione verticale, in modo che il suo estremo inferiore tocchi un piano orizzontale fisso. Ad un certo istante la fune viene lasciata libera di cadere per effetto della gravità. Supponendo che, nel contatto con il piano, la fune non abbia rimbalzi, calcolare la forza che si esercita sul piano nel momento in cui l'estremo superiore A della fune è sceso di una quantità y.

(Risposta: $F = 3\, \lambda\, g\, y$)

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo VI

VI.1. Ricavare le equazioni parametriche del c.d.m. $x_c(t)$, $y_c(t)$, e dimostrare che la traiettoria del c.d.m. è circolare. Osservare che il moto del c.d.m. è circolare uniforme di velocità angolare ω e di qui ricavare l'accelerazione del c.d.m.

VI.2. Considerare i due tratti AP e PB come due corpi singoli e tenere conto che, nel punto P, l'azione che il tratto AP esercita sul tratto PB è uguale e contraria all'azione che il tratto PB esercita sul tratto AP (azione e reazione).

VI.3. Procedere come nel problema VI.2 relativamente ai due tratti di cinghia pendenti dalle due parti del piolo.

VI.4. Un disco di raggio R, non forato, ha il c.d.m. in O. Tale disco completo può essere considerato come un sistema composto da un disco di raggio r e centro O' e dal disco forato del problema. Per ciò che riguarda la posizione dei c.d.m. tutto va come se si trattasse di masse puntiformi concentrate nei rispettivi c.d.m.

VI.5. Dall'espressione della quota y_c del c.d.m., per doppia derivazione rispetto al tempo, ricavare l'accelerazione del c.d.m. Il moto delle singole masse m_1 ed m_2 è stato studiato in un precedente problema.

VI.6. Le masse si muovono per effetto di sole forze interne e pertanto la quantità di moto totale non varia nel tempo. Nella fase di decompressione della molla c'è una trasformazione di energia potenziale elastica in energia cinetica del sistema (forze elastiche conservative).

VI.7. L'esplosione avviene per effetto di forze interne preponderanti rispetto alle forze esterne e quindi c'è conservazione della quantità di moto totale tra un istante immediatamente precedente ed uno immediatamente seguente l'esplosione. Tenere conto del carattere vettoriale della quantità di moto.

VI.8. Lungo la direzione orizzontale non ci sono forze esterne. Pertanto il c.d.m. del sistema chiatta + uomo non si sposta.

VI.9. In direzione orizzontale le forze esterne sono nulle. Utilizzare anche il teorema dell'energia cinetica.

VI.10. Si conserva la componente x della quantità di moto. La richiesta di velocità *minima* per la massa m significa che, quando ha raggiunto la quota $R/2$, la massa m è ferma rispetto al cuneo.

VI.11. Dalla cinematica del proiettile ricavarne la velocità iniziale. Tenere conto che il lancio del proiettile avviene per effetto di forze interne al sistema cannone + proiettile. Utilizzare il teorema dell'energia cinetica.

VI.12. Procedere come nell'esempio E.VI.9.

VI.13. La quantità di moto totale di un sistema materiale è esprimibile in termini di velocità del c.d.m. Usare le regole della cinematica dei moti relativi per esprimere le velocità dei due corpi rispetto al sistema solidale con il c.d.m.

VI.14. Si tratta di una situazione di equilibrio in cui sono nulli il risultante ed il momento risultante delle forze esterne.

VI.15. Procedere come nell'esercizio VI.3.

VI.16. I vari tratti infinitesimi di fune che, a mano a mano, toccano il piano, dopo il contatto restano fermi. La loro variazione di quantità di moto è legata all'impulso della forza che esercitano sul piano.
La velocità dei singoli pezzetti di fune è quella che compete ai punti materiali che cadono di moto uniformemente accelerato nel campo della gravità. Inoltre, la massa che, ad un istante generico, si è già accumulata sul piano, esercita una forza pari al suo peso.

Capitolo settimo

Sistemi rigidi

Corpo rigido

Molti oggetti sono sostanzialmente indeformabili e possono essere descritti, con approssimazione adeguata alla maggior parte degli scopi, tramite la schematizzazione di *corpo rigido*. Un corpo rigido è un sistema materiale (continuo) rigorosamente indeformabile: la distanza relativa fra due qualunque punti costituenti un corpo rigido è immutabile. Molti altri sistemi materiali, pur non essendo indeformabili, possono essere considerati come costituiti da un certo numero di parti, ciascuna schematizzabile come corpo rigido; ciò vale in particolare per molte macchine.

Un corpo rigido non vincolato ha sei gradi di libertà

Abbiamo già visto (Esempio E.II.3) che un corpo rigido liberamente mobile nello spazio (cioè non sottoposto a vincoli) costituisce un sistema a sei gradi di libertà: una volta specificata la posizione di un suo punto (il che richiede che si fissi il valore di tre coordinate), il corpo può ancora ruotare attorno a un asse qualunque passante per quel punto. Per fissare la direzione di un asse solidale col corpo e passante per quel punto è necessario specificare due angoli; e un terzo angolo è necessario per specificare l'angolo di rotazione intorno a quell'asse (come nel caso di una porta che ruota intorno all'asse individuato dai suoi cardini).

Il moto di un corpo rigido non può essere influenzato dalle forze interne: queste infatti, essendo costituite da un insieme di coppie di braccio nullo, tenderebbero semplicemente a far mutare le distanze relative fra i costituenti del corpo rigido; ma queste distanze relative non possono cambiare.

Ci aspettiamo dunque che il moto di un corpo rigido sia governato dalle equazioni cardinali [VI.27], che hanno al primo membro delle quantità caratteristiche delle sole forze esterne (risultante e momento risultante). In effetti, il moto di un corpo rigido è completamente descritto dalle equazioni cardinali [VI.27]. Esse infatti costituiscono nel loro insieme 6 equazioni scalari fra di loro indipendenti.

La prima delle equazioni [VI.27] governa il moto del baricentro (o centro di massa) del sistema rigido, come risulta dalla [VI.29]; la seconda governa le rotazioni (ad esempio intorno al baricentro) come si può intuire ricordando le considerazioni che abbiamo fatto sul significato cinematico del momento angolare (paragrafo VI.5), e come vedremo meglio più avanti.

Come semplice generalizzazione della relazione [II.37] è facile verificare che la velocità $\vec{v}_P$ di un generico punto P appartenente a un corpo rigido può essere espressa nella forma

$$\vec{v}_P = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times \Omega P$$

dove Ω è un punto qualunque del corpo e $\vec{\omega} = \omega \hat{a}$ è la velocità angolare del corpo, nell'istante considerato, attorno all'asse istantaneo di rotazione passante per Ω. Il vettore $\vec{\omega}$ è indipendente dalla coppia di punti P, Ω.

La precedente relazione cinematica è di notevole interesse nelle applicazioni.

VII.1. Equilibrio dei corpi rigidi

Configurazione di equilibrio

Come per qualunque altro sistema materiale, così anche per un sistema rigido si definisce *posizione di equilibrio* (o meglio *configurazione* di equilibrio, intendendosi con configurazione l'insieme delle posizioni occupate dai punti costituenti il sistema) una configurazione tale che, disponendo in essa, fermo, il sistema materiale, esso permane fermo in tale configurazione.

Tuttavia, mentre nel caso generale è necessario assicurarsi che ognuno dei singoli punti costituenti il sistema sia in equilibrio, nel caso di un sistema rigido l'equilibrio è garantito dalla condizione che non si muova il centro di massa, e che il sistema non ruoti attorno ad esso.

Condizioni dinamiche per l'equilibrio

Per conseguenza, *condizione necessaria e sufficiente perché una posizione sia posizione di equilibrio per un corpo rigido, è che in tale posizione siano nulli il risultante $\vec{F}^{(e)}$ e il momento risultante $\vec{M}^{(e)}$ delle forze esterne applicate al sistema.*

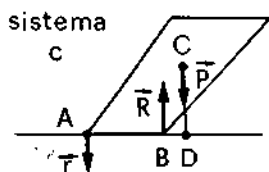
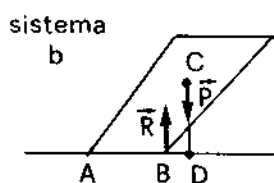
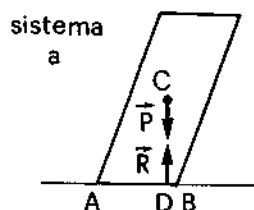
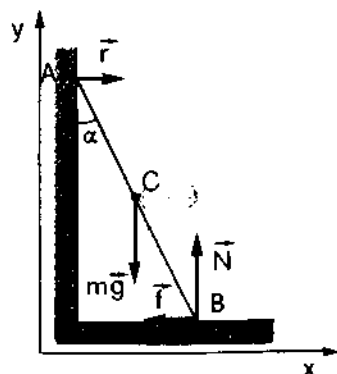
La condizione è necessaria: infatti, se $\vec{F}^{(e)}$ e/o $\vec{M}^{(e)}$ sono diversi da zero, sono diversi da zero $\frac{d\vec{Q}}{dt}$ e/o $\frac{d\vec{P}}{dt}$. Pertanto, se inizialmente il sistema è fermo, esso si mette in movimento: il risultante delle forze esterne produce il moto del baricentro, e il momento risultante produce rotazioni.

La condizione è sufficiente: infatti, se $\vec{F}^{(e)}$ ed $\vec{M}^{(e)}$ sono nulli, sono nulli $\frac{d\vec{Q}}{dt}$ e $\frac{d\vec{P}}{dt}$. E dunque, se inizialmente il sistema era fermo (e dunque era $\vec{Q} = 0$ e $\vec{P} = 0$), resta $\vec{Q} = 0$ e $\vec{P} = 0$ anche negli istanti successivi; e queste sono sei condizioni cinematiche fra di loro indipendenti che garantiscono che tutti i punti del sistema (che è un sistema a sei gradi di libertà) restino fermi al passare del tempo.

Per quanto abbiamo visto nel paragrafo (VI.9), una volta verificato che $\vec{F}^{(e)} = 0$, basta assicurarsi che sia $\vec{M}^{(e)} = 0$ rispetto a un polo qualunque: la [VI.46] ci garantisce infatti che in tal caso è $\vec{M}^{(e)} = 0$ rispetto a ogni altro polo.

Esempi

Equilibrio di un corpo pesante appoggiato a un piano orizzontale

E.VII.1. *Consideriamo un corpo rigido sottoposto – come forza attiva – alla sola forza peso, e appoggiato ad un piano orizzontale privo di attrito. Discutere quale condizione geometrica deve essere soddisfatta perché il corpo sia in equilibrio.*

La forza peso dei vari punti materiali costituenti il corpo rigido rappresenta un sistema di forze parallele: come abbiamo discusso nel paragrafo VI.9 esso è equivalente, dal punto di vista dei suoi effetti sul moto di un corpo rigido, a una unica forza $\vec{p} = M\vec{g}$ (M massa totale del sistema) applicata nel centro di massa C e diretta secondo la verticale discendente. Anche le reazioni vincolari normali, che il tavolo esercita sui vari punti della base, costituiscono un sistema di forze parallele ortogonali al tavolo, e dunque dirette verticalmente verso l'alto; esse sono dunque equivalenti a una unica forza $\vec{R}$ orientata secondo la verticale ascendente e applicata in un punto compreso all'interno del perimetro di base (poligono di appoggio).

Le intensità delle reazioni vincolari applicate ai vari punti della base si aggiustano automaticamente in modo da contrastare se possibile, e dunque equilibrare, la forza peso. Se la verticale passante per il baricentro C incontra il tavolo in un punto D compreso all'interno del perimetro di base (sistema *a*), allora una reazione $\vec{R} = -M\vec{g}$ applicata in D costituisce insieme a $\vec{p}$ una coppia di braccio nullo, e dunque mantiene il sistema in equilibrio.

Se invece il punto D si trova all'esterno del perimetro di base (sistema *b*), allora la reazione $\vec{R}$ non può equilibrare il peso $\vec{p}$. Essa può assumere infatti valore uguale ed opposto a $\vec{p}$, in modo da annullare il risultante delle forze; ma poiché deve necessariamente essere applicata in un punto della base (al limite disposto sul perimetro), le forze opposte e parallele $\vec{R}$ e $\vec{p}$ hanno un braccio non inferiore a BD e dunque non nullo. Il loro momento non può dunque annullarsi, e il corpo si ribalta cominciando a ruotare intorno a B.

Ovviamente, se in A ci fosse un gancio (sistema *c*) l'equilibrio diviene possibile. Il gancio infatti oltreché spingere può anche tirare, e dunque può esplicare una reazione $\vec{r}$ diretta verso il basso. Per avere l'equilibrio, basta allora che $\vec{r}$ abbia modulo r tale da equilibrare i momenti ($r \cdot AB = p \cdot BD$) e che $\vec{R}$ abbia modulo R tale da equilibrare il risultante ($R = r + p$). Il sistema *c* rappresenta un caso particolare di *leva* con fulcro in B; gli altri tipi di leva possono essere trattati in modo analogo.

Equilibrio di una scala appoggiata a una parete

E.VII.2. *Una scala è appoggiata a una parete verticale, formando con essa un angolo α. Trascurando l'effetto dell'attrito sulla parete, determinare quale coefficiente di attrito deve presentare il pavimento affinché la scala resti in equilibrio (si supponga che la scala sia omogenea, cosicché il suo baricentro si trovi nel punto centrale).*

Le forze agenti sul sistema, oltre alla forza peso $m\vec{g}$ applicata nel baricentro C, sono la reazione vincolare $\vec{r}$ esercitata dalla parete (reazione che, trascurando l'attrito, consideriamo ortogonale alla parete), e la reazione $\vec{R}$ esercitata dal pavimento; reazione che per comodità immaginiamo scomposta nel vettore $\vec{N}$ normale al pavimento e nel vettore $\vec{f}$ parallelo ad esso.

Le condizioni per l'equilibrio si scrivono dunque

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}^{(e)} &= \vec{r} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} = 0 \\ \vec{M}^{(e)} &= \vec{M}_r + \vec{M}_{mg} + \vec{M}_N + \vec{M}_f = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{[VII.1]}$$

Notiamo che poiché tutte le forze giacciono nel piano xy (scelto così come indicato in figura) un eventuale moto della scala, a partire dalla condizione di quiete, non può che avvenire nel piano xy. Il nostro sistema rigido può essere nei fatti assimilato a un sistema piano, che ha tre soli gradi di libertà (2 parametri per specificare la posizione del baricentro; 1 parametro per definirne l'orientamento). Ciò è come dire che delle 6 condizioni rappresentate dalle [VII.1], 3 sono automaticamente soddisfatte ($F_z^{(e)} = 0$; $M_x^{(e)} = 0$; $M_y^{(e)} = 0$); e basta dunque assicurarsi che sia $F_y^{(e)} = 0$; $F_x^{(e)} = 0$; $M_z^{(e)} = 0$.

Come polo per il calcolo dei momenti possiamo scegliere un punto qualunque; poiché due forze sono applicate in B, la condizione $M_z^{(e)} = 0$, assume la sua massima semplicità proprio se si assume B come polo. Le [VII.1] si riducono dunque a:

$$F_x^{(e)} = r + f = 0$$
$$F_y^{(e)} = mg + N = 0 \qquad [VII.2]$$
$$M_z^{(e)} = mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}(\pi - \alpha) - rl\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$
$$= mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\alpha - rl\cos\alpha = 0$$

dove con l abbiamo indicato la lunghezza della scala. Notiamo che essendo certamente $r > 0$ (la parete può solo spingere, e dunque la proiezione di $\vec{r}$ sull'asse x è positiva), dalla prima delle [VII.2] si ha $f = -r < 0$, coerentemente con quanto indicato in figura. Il segno dei momenti nella terza delle [VII.2] è stato scritto considerando che mentre la forza $m\vec{g}$ tende a far ruotare il braccio BC in senso antiorario (e dunque $\vec{M}_{mg}$ è concorde con l'asse z), l'opposto accade per la reazione $\vec{r}$.

Dalla terza delle [VII.2], tenendo conto della prima, abbiamo

$$f = -r = -\frac{mg}{2}\operatorname{tg}\alpha$$

e dalla seconda

$$N = -mg$$

Facendo il rapporto fra queste due relazioni, abbiamo che all'equilibrio deve essere

$$\frac{|f|}{N} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha \qquad [VII.3]$$

Se μ è il coefficiente di attrito, il pavimento è in grado di esplicare solo reazioni tangenziali il cui modulo $|f|$ soddisfi la relazione $\frac{|f|}{N} < \mu$ (vedi eq. [V.67]). Confrontando con la [VII.3] si ha

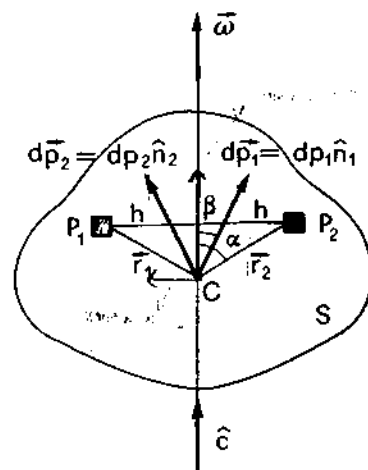
$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha < \mu$$

VII.2. Momento angolare rispetto al baricentro e momento di inerzia

Ci proponiamo in questo paragrafo di estendere e generalizzare a un sistema rigido qualunque le considerazioni relative al momento angolare, che nel paragrafo VI.5 abbiamo fatto per un sistema molto particolare, costituito da due sole masse puntiformi. Consideriamo dunque un sistema materiale S ruotante con velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$ attorno a un asse fisso $\hat{c}$ passante per il centro di massa C: $\vec{\omega} = \omega\hat{c}$. Per il momento, supponiamo che il sistema sia simmetrico rispetto a un piano passante per l'asse: per ogni elemento P_1 di massa dm, esiste un altro elemento P_2 anch'esso di massa dm posto simmetricamente a P_1 rispetto all'asse.

Il momento angolare $d\vec{p}_1$ di P_1 rispetto al centro di massa C vale:

$$d\vec{p}_1 = \vec{r}_1 \times dm\vec{v}_1 = dm\, hr\omega\,\hat{n}_1$$

dove $\hat{n}_1$ è il versore ortogonale a $\vec{r}_1$ nel piano contenente $\hat{c}$ (vedi figura).

Si è tenuto conto del fatto che $\vec{v}_1$ è ortogonale a $\vec{r}_1$ e vale in modulo $v = \omega h = \omega r \sin\alpha$ ($r = |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$). Analogamente si calcola il momento angolare di P_2:

$$d\vec{p}_2 = \vec{r}_2 \times dm\,\vec{v}_2 = dm\,h\,r\,\omega\,\hat{n}_2$$

Le componenti parallele all'asse $\hat{c}$ di $d\vec{p}_1$ e $d\vec{p}_2$ ($(dp_1)_{\parallel}$ e $(dp_2)_{\parallel}$) sono fra di loro uguali e concordi e valgono

$$(dp_1)_{\parallel} = (dp_2)_{\parallel} = dm\,\omega\,h\,r\cos\beta = dm\,\omega\,h\,r\sin\alpha = dm\,\omega\,h^2$$

Le componenti $(dp_1)_{\perp}$ e $(dp_2)_{\perp}$ di $d\vec{p}_1$ e $d\vec{p}_2$ ortogonali all'asse sono invece fra di loro uguali ed opposte. Per conseguenza, sommando fra di loro $d\vec{p}_1$ e $d\vec{p}_2$ le componenti ortogonali all'asse si elidono; la somma è dunque un vettore parallelo all'asse $\hat{c}$

$$d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 = [(dp_1)_{\parallel} + (dp_2)_{\parallel}]\,\hat{c} = (dm\,h^2 + dm\,h^2)\,\omega\,\hat{c} = \sum (dm\,h^2)\cdot\hat{c}\cdot\omega\,.$$

Analogamente si può calcolare il momento angolare di ogni coppia di punti simmetrici; il momento angolare totale $\vec{P}_c$ del sistema risulta dunque:

$$\vec{P}_c = \int dm\,h^2\cdot\hat{c}\,\omega = I_c\,\hat{c}\cdot\omega \qquad \text{[VII.4]}$$

avendo sostituito l'integrale alla sommatoria; h rappresenta la distanza dell'elemento dm dall'asse $\hat{c}$. La quantità

$$I_c = \int dm\,h^2 \qquad \text{[VII.5]}$$

Momento di inerzia rispetto all'asse $\hat{c}$

viene detta *momento di inerzia* del corpo considerato *rispetto all'asse* $\hat{c}$.

Secondo la [VII.4] se $\vec{\omega} = \omega\,\hat{c}$ è costante, anche $\vec{P}_c$ è costante, perché I_c è una grandezza costante (fissato l'asse $\hat{c}$). Essendo $\dfrac{d\vec{P}_c}{dt} = 0$, in virtù della [VI.27b] si ha $\vec{M}^{(e)} = 0$: per mantenere il corpo in rotazione con velocità costante intorno all'asse $\hat{c}$ non è necessario applicare ad esso alcun momento delle forze esterne. E poiché C giace sull'asse e dunque è fermo, si ha anche $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = 0$ e dunque $\vec{F}^{(e)} = 0$. Il corpo può ruotare liberamente intorno a $\hat{c}$ senza bisogno di alcuna sollecitazione esterna: un asse che goda di questa proprietà si chiama *asse libero di rotazione* o *asse centrale di inerzia*. Le considerazioni fatte sopra ci mostrano che se un corpo è simmetrico intorno a un asse, quell'asse è per esso un asse libero di rotazione.

Asse libero di rotazione o asse centrale di inerzia

Mantenendo invariata la velocità angolare $\vec{\omega}$ (sia come modulo che come direzione) applichiamo ora solidalmente alla superficie del sistema S una massa aggiuntiva m_o (che per semplicità supponiamo puntiforme) che ne disturbi la simmetria.

Per ottenere il momento angolare $\vec{P}'_c$ del nuovo sistema S' così ottenuto, al momento angolare $\vec{P}_c = I_c\vec{\omega}$ del sistema S dobbiamo raggiungere il momento angolare $\vec{p}_o$ della massa m_o; momento angolare dato da

$$\vec{p}_o = \vec{r}_o \times m_o\vec{v}_o = r_o m_o\,\omega\,h_o\,\hat{n}_o \qquad \text{[VII.6]}$$

dove $\hat{n}_0$ è il versore ortogonale a $\vec{r}_0$ nel piano definito da $\vec{r}_0$ e $\hat{c}$. Come si vede $\vec{p}_0$ non è in generale diretto come l'asse di rotazione $\hat{c}$; per conseguenza $\vec{P}'_c = \vec{P}_c + \vec{p}_0$ non è più parallelo a $\vec{\omega}$, come lo era $\vec{P}_c$.

L'aggiunta della massa m_0 non solo ha modificato, a parità di $\vec{\omega}$, il modulo del momento angolare, ma ne ha anche modificato la direzione, che non coincide più con la direzione di $\vec{\omega}$, cioè con la direzione dell'asse di rotazione $\hat{c}$.

In effetti, usando la [VII.4] e la [VII.6] possiamo scrivere

$$\vec{P}'_c = \vec{P}_c + \vec{p}_0 = I_c\hat{c}\omega + r_0 m_0 \omega h_0 \hat{n}_0 = \vec{I}'_c \cdot \omega$$

dove $\vec{I}'_c = I_c\hat{c} + r_0 m h_0 \hat{n}$ è un vettore solidale al sistema (e dunque rotante con esso), caratteristico del sistema e dell'asse $\hat{c}$.

Se il sistema ruota intorno a $\hat{c}$ con velocità angolare ω costante, il momento angolare $\vec{P}'_c$ del sistema non è costante: pur essendo costante il suo modulo, non è costante la sua direzione, poiché esso ruota descrivendo un cono intorno all'asse.

Essendo dunque $\dfrac{d\vec{P}'_c}{dt} \neq 0$, è necessario che sul sistema agisca un momento non nullo delle forze esterne. Per il sistema S', ottenuto applicando solidalmente ad S la massa m_0, l'asse $\hat{c}$ non è un asse libero di rotazione. Proiettando la [VII.6] sull'asse di rotazione $\hat{c}$, si ha la componente P'_{ca} di $\vec{P}'_c$:

$$\begin{aligned} P'_{ca} &= \vec{P}'_c \cdot \hat{c} = (I_c\omega\hat{c} + r_0 m_0 \omega h_0 \hat{n}_0)\cdot\hat{c} = I_c\omega + \omega m_0 h_0 r_0 \sin\alpha_1 = \\ &= I_c\omega + m_0 h_0^2 \omega = (I_c + m_0 h_0^2)\omega = I'_c\omega \end{aligned}$$

Proiezione assiale del momento angolare

Proiezione normale all'asse del momento angolare

dove con I'_c abbiamo indicato la quantità $I_c + m_0 h_0^2$ che, coerentemente con la definizione [VII.5], rappresenta il momento di inerzia rispetto all'asse $\hat{c}$ del sistema S'. Dunque *il prodotto fra il momento di inerzia e la velocità angolare rappresenta in generale la proiezione del momento angolare sull'asse di rotazione*.

Il componente $\vec{P}'_{cn}$ di $\vec{P}'_c$ ortogonalmente all'asse (che è non nullo se $\hat{c}$ non è asse libero di rotazione) è un vettore ruotante con velocità angolare ω. La sua derivata, coerentemente con la [II.37], è data da

$$\frac{d\vec{P}'_{cn}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{P}'_{cn}$$

ed è a sua volta un vettore ruotante con velocità angolare $\vec{\omega}$. Poiché la derivata del momento angolare è pari al momento delle forze esterne, per far ruotare il sistema S' intorno a $\hat{c}$ è necessario applicare ad esso un momento rotante delle forze esterne (ortogonale a $\vec{\omega}$ e a $\vec{P}'_{cn}$): questo momento viene in generale esplicato dai supporti meccanici dell'asse, analogamente a quanto avevamo visto nel par. VI.5 nel caso del sistema costituito da due masse ruotanti intorno a un asse *non* ortogonale alla loro congiungente.

L'esempio che abbiamo discusso è utile per rendere più intuitive le leggi che valgono in generale a proposito del moto di rotazione dei sistemi rigidi intorno al centro di massa C; leggi che qui di seguito enunciamo rimandando per la dimostrazione – e per maggiori dettagli – ai testi di meccanica razionale.

Assi liberi di rotazione

a) Ogni sistema rigido (anche se non dotato di particolare simmetria) ammette degli *assi liberi di rotazione* (o *assi centrali di inerzia*). Gli assi liberi di rotazione sono assi passanti per il centro di massa C caratterizzati dal fatto che quando il sistema ruota intorno a uno di tali assi il *momento angolare $\vec{P}$ del sistema è parallelo all'asse di rotazione.* Sistemi dotati di particolare simmetria possono avere infiniti assi liberi. Ad esempio nel caso di una sfera omogenea uno qualunque degli infiniti assi passanti per il centro C è asse libero di rotazione; nel caso di un cilindro omogeneo retto, oltre all'asse $\hat{a}$ del cilindro sono assi liberi di rotazione gli infiniti assi ortogonali ad $\hat{a}$ e passanti per il centro C. In generale, *ogni sistema ammette tre assi centrali di inerzia $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$ fra di loro ortogonali.*

b) Se un sistema ruota intorno a un asse centrale di inerzia (ad esempio intorno a $\hat{u}$), il suo momento angolare P_u è parallelo all'asse di rotazione $\hat{u}$ (cioè ad $\vec{\omega} = \omega\hat{u}$) ed è dato da

$$\vec{P}_u = I_u\hat{u} \cdot \omega = \vec{I}_u \cdot \omega = I_u\vec{\omega} \qquad \text{[VII.7]}$$

Il sistema può ruotare liberamente intorno a un asse libero

dove con $\vec{I}_u$ abbiamo indicato $I_u \cdot \hat{u}$, ed I_u è il momento di inerzia del sistema rispetto a $\hat{u}$, definito dalla [VII.5]. In questo caso, se la direzione dell'asse è costante ed è costante ω, è costante $\vec{P}_u$ e dunque $\frac{d\vec{P}_u}{dt} = 0$. Il sistema può ruotare intorno a $\hat{u}$ liberamente, cioè senza che sia necessario applicare all'asse alcun momento delle forze esterne.

c) Se un corpo ruota intorno a un asse $\hat{c}$ qualunque, allora *la quantità $I_c\omega$* (cioè il prodotto fra la velocità angolare e il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse $\hat{c}$) *rappresenta la proiezione P_{ca} sull'asse $\hat{c}$ del momento angolare $\vec{P}_c$* del corpo rispetto a $\hat{c}$

$$P_{ca} = I_c\omega \qquad \text{[VII.8]}$$

Il vettore momento angolare $\vec{P}_c$ può invece essere scritto come

$$\vec{P}_c = \vec{I}\omega \qquad \text{[VII.9]}$$

dove $\vec{I}$ è un vettore, caratteristico del sistema e della sua posizione rispetto all'asse $\hat{c}$, che può essere scritto come

Momenti centrali di inerzia

$$\vec{I} = \vec{I}_u \cos\varphi + \vec{I}_v \cos\chi + \vec{I}_w \cos\psi \qquad \text{[VII.10]}$$

dove $\vec{I}_u = I_u\hat{u}$, $\vec{I}_v = I_v\hat{v}$, $\vec{I}_w = I_w\hat{w}$ (I_u, I_v, I_w momenti di inerzia rispetto agli assi centrali $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$); φ, χ, ψ sono gli angoli che l'asse $\hat{c}$ forma con gli assi centrali di inerzia. Salvo il caso che $\hat{c}$ coincida con uno degli assi centrali (ad esempio con $\hat{u}$, nel qual caso $\cos\varphi = 1$, $\cos\chi = 0$, $\cos\psi = 0$ e dunque la [VII.10] si riduce alla [VII.7]) $\vec{I}$ non è parallelo a $\hat{c}$; esso è un vettore di modulo costante che ruota solidalmente al corpo.

Poiché $\vec{I}_u$, $\vec{I}_v$, $\vec{I}_w$ sono fra di loro ortogonali, dalla [VII.10] segue che il modulo di $\vec{I}$ vale

$$|\vec{I}| = \sqrt{I_u^2 \cos^2\varphi + I_v^2 \cos^2\chi + I_w^2 \cos^2\psi} \qquad \text{[VII.11]}$$

Il modulo P_c del momento angolare $\vec{P}_c$ vale dunque

$$P_c = |\vec{I}| \cdot \omega = \omega\sqrt{I_u^2 \cos^2\varphi + I_v^2 \cos^2\chi + I_w^2 \cos^2\psi} \qquad \text{[VII.12]}$$

e può essere facilmente calcolato, dato ω, quando siano stati calcolati una volta per tutte i momenti centrali di inerzia I_u, I_v, I_w e sia noto l'orientamento dell'asse $\hat{c}$ di rotazione rispetto agli assi centrali di inerzia.

Proiettando la [VII.9] sull'asse $\hat{c}$, e tenendo conto della [VII.10], si ha la proiezione P_{ca} di $\bar{P}_c$ sull'asse:

$$P_{ca} = (I_u \cos^2\varphi + I_v \cos^2\chi + I_w \cos^2\psi)\,\omega \qquad \text{[VII.13]}$$

Confrontando con la [VII.8], si ha

$$I_c = I_u \cos^2\varphi + I_v \cos^2\chi + I_w \cos^2\psi \qquad \text{[VII.14]}$$

La [VII.14] consente di calcolare il momento di inerzia del corpo rispetto a un asse qualunque $\hat{c}$ (passante per il baricentro), una volta noti i momenti centrali di inerzia e l'orientamento di $\hat{c}$ rispetto agli assi centrali di inerzia. Dividendo la [VII.13] per la [VII.12] può essere calcolato il coseno dell'angolo γ che $\bar{P}_c$ forma con l'asse $\hat{c}$

$$\cos\gamma = \frac{P_{ca}}{P_c} = \frac{I_u \cos^2\varphi + I_v \cos^2\chi + I_w \cos^2\psi}{\sqrt{I_u^2 \cos^2\varphi + I_v^2 \cos^2\chi + I_w^2 \cos^2\psi}} \qquad \text{[VII.15]}$$

d) Il componente $\bar{P}_{cn}$ di $\bar{P}_c$ ortogonale all'asse $\hat{c}$ ha modulo P_{cn} dato da

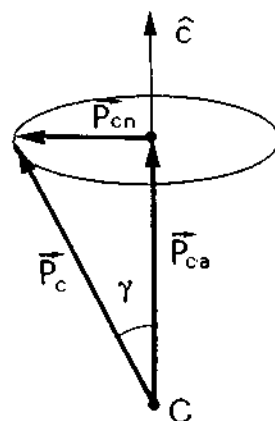
$$P_{cn} = P_c \sin\gamma = |\bar{I}|\,\omega \sqrt{1 - \frac{I_c^2}{|\bar{I}|^2}} = \omega \sqrt{|\bar{I}|^2 - I_c^2} \qquad \text{[VII.16]}$$

con $|\bar{I}|$ e I_c dati rispettivamente dalla [VII.11] e [VII.14]. Se ω è costante, il modulo P_{cn} di $\bar{P}_{cn}$ è costante: esso è un vettore ortogonale all'asse, rotante con velocità angolare ω, e la sua derivata (secondo la [II.37]) è data da:

$$\frac{d\bar{P}_{cn}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{P}_{cn} = \omega^2 \sqrt{|\bar{I}|^2 - I_c^2}\;\hat{n} \qquad \text{[VII.17]}$$

dove $\hat{n}$ è il versore ortogonale a $\hat{c}$ e ortogonale a $\bar{P}_{cn}$. Se l'asse di rotazione $\hat{c}$ non coincide con un asse libero, la [VII.17] è diversa da zero anche se ω è costante; è dunque necessario che sull'asse venga applicato, per mantenerne costante la direzione, un momento (rotante) delle forze ortogonale all'asse; momento che usualmente viene esplicato dai supporti dell'asse, che subiscono così una sollecitazione.

Se un corpo ruota liberamente, esso ruota intorno a un asse libero di rotazione. Solo se l'asse è vincolato, mediante opportuni supporti (o comunque da un opportuno momento esterno), a mantenere costante il suo orientamento, il corpo può ruotare attorno a un asse $\hat{c}$ diverso da un asse libero. Abbiamo visto tuttavia che in questo caso i supporti dell'asse subiscono delle forze rotanti, che tendono a logorarli. Per questo motivo, quando si progetta un corpo rotante si prende cura (salvo particolari esigenze in contrario) che l'asse di rotazione coincida con un asse libero: è questo ad esempio il significato della «equilibratura» delle ruote di una automobile.

Per questi motivi è piuttosto usuale che il momento angolare $\bar{P}$ sia espresso dalla [VII.7], anziché dalla più complicata [VII.9]: quest'ultima,

insieme alle relazioni di corredo che consentono di calcolare il modulo e la direzione di $\vec{I}$, serve dunque di solito solo in fase progettuale per valutare, e dunque eliminare, le indebite sollecitazioni cui sarebbe sottoposto l'asse qualora per difetti di progettazione esso non coincidesse con un asse libero. (Vedi esempio E.VII.11).

VII.3. Calcolo del momento di inerzia

Il calcolo del momento di inerzia I_c di un corpo rispetto a un asse $\hat{c}$ può essere effettuato con tecniche analoghe a quelle introdotte nel paragrafo VI.4 per il calcolo della posizione del centro di massa, cioè per il calcolo della [VI.18]. In effetti, anche per il calcolo della [VII.5] è necessario esprimere l'elemento di massa dm in funzione della sua posizione e del suo volume $d\tau$; e ciò si fa utilizzando la densità ρ definita dalla [VI.19]:

$$dm = \rho\, d\tau$$

Introducendo questa relazione nella [VII.5] si ha

$$I_c = \int h^2 \rho\, d\tau \qquad \text{[VII.18]}$$

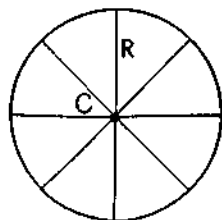
L'integrando della [VII.18], ρh^2, risulta così essere funzione della posizione; e l'integrale può essere eseguito pur di esprimere ρ, h^2 e $d\tau$ in funzione delle stesse variabili. Naturalmente, qualora il corpo rigido considerato possa essere schematizzato come un corpo in due dimensioni, o in una sola dimensione, al posto della [VI.19] si userà la [VI.21] o, rispettivamente, la [VI.22].

In pratica, il calcolo del momento di inerzia mediante la [VII.18] risulta particolarmente semplice solo qualora il corpo sia dotato di simmetria intorno all'asse $\hat{c}$ rispetto a cui il momento di inerzia viene calcolato; e ciò accade solo se l'asse $\hat{c}$ coincide con un asse centrale di inerzia. Tuttavia, una volta calcolati i momenti centrali di inerzia, il momento di inerzia rispetto a un asse qualunque passante per il baricentro può essere calcolato facilmente tramite la [VII.14]; e vedremo più avanti che anche il momento di inerzia rispetto a un asse qualunque $\hat{a}$ (non baricentrale) può essere facilmente ricondotto al momento di inerzia I_c rispetto all'asse baricentrale $\hat{c}$ parallelo a $\hat{a}$.

Esempi

E.VII.3. *Calcolare il momento di inerzia di una ruota di bicicletta rispetto all'asse passante per il centro C e ortogonale al piano della ruota. Si trascuri, rispetto al raggio R, lo spessore del cerchione, la massa dei raggi R e del mozzo, cosicché tutta la massa della ruota possa essere considerata concentrata, omogeneamente, sulla circonferenza di raggio R.*

Sostituendo nella [VII.5] la [VI.22] per esprimere dm, si ha:

$$I_c = \int h^2 \lambda\, dl$$

dove $\lambda = M/2\pi R$, e dl è l'elemento di circonferenza. Si ha inoltre $h = R =$ costante, per cui:

$$I_c = \int h^2 \lambda \, dl = \int R^2 \frac{M}{2\pi R} \, dl = \frac{R^2 M}{2\pi R} \int dl = \frac{R^2 M}{2\pi R} \cdot 2\pi R = R^2 M .$$

E.VII.4. *Calcolare il momento di inerzia di un disco omogeneo di massa M e raggio R, rispetto all'asse baricentrale ortogonale al piano del disco.*

La densità superficiale, costante, del disco (massa per unità di superficie) è $\sigma = \dfrac{M}{\pi R^2}$. Sostituendo la [VI.21] nella [VII.5], si ha:

$$I_c = \int h^2 \sigma \, dS = \int h^2 \frac{M}{\pi R^2} \, dS$$

Immaginiamo di suddividere il disco in tante corone circolari, di cui la generica ha raggio r e spessore dr. Si ha allora $h^2 = r^2$ e $dS = 2\pi r \, dr$, per cui la precedente relazione diviene:

$$I_c = \int r^2 \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r \, dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 \, dr = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2 .$$

E.VII.5. *Calcolare il momento di inerzia di una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza l rispetto a un asse ortogonale alla sbarretta e passante per il centro C.*

La densità lineare della sbarretta è $\lambda = \dfrac{M}{l}$; sostituendo la [VI.22] nella [VII.5], avendo scelto l'asse x così come mostrato in figura, si ha:

$$I_c = \int h^2 \, dm = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{M}{l} \, dx = \left[\frac{1}{3} \frac{M}{l} x^3 \right]_{-l/2}^{l/2} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{M}{l} \left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right) = \frac{M l^2}{12} .$$

Teorema di Huygens-Steiner

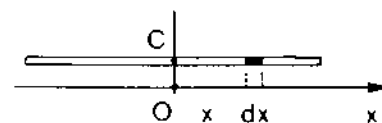
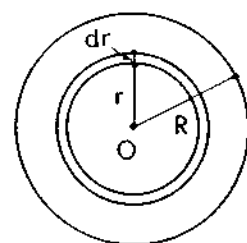
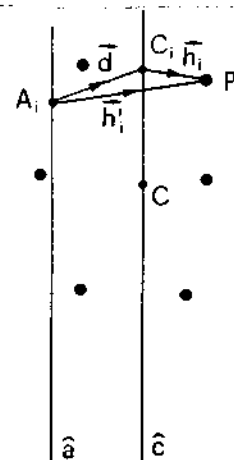
Quando di un corpo rigido ci sia noto il momento di inerzia I_c rispetto a un asse $\hat{c}$ passante per il centro di massa, il momento di inerzia I_a rispetto ad un altro asse $\hat{a}$ parallelo a $\hat{c}$ può essere facilmente calcolato mediate il *teorema di Huygens-Steiner*, secondo il quale:

$$I_a = I_c + M d^2 \qquad \text{[VII.19]}$$

dove M è la massa totale del sistema e d la distanza fra l'asse $\hat{a}$ e l'asse $\hat{c}$.

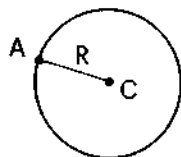
Dimostrazione. Per semplificare il formalismo, riferiamoci a un sistema discreto. Ponendo l'attenzione sul punto P_i del sistema (di massa m_i) consideriamo il piano per P_i ortogonale agli assi $\hat{c}$ ed $\hat{a}$; siano C_i e A_i le intersezioni di questo piano con gli assi; chiameremo

$$\vec{h}'_i \equiv A_i P_i$$
$$\vec{h}_i \equiv C_i P_i$$
$$\vec{d} \equiv A_i C_i$$

Si ha evidentemente: $\vec{h}'_i = \vec{d} + \vec{h}_i$.

Il momento di inerzia I_a rispetto all'asse $\hat{a}$ può dunque essere espresso come:

$$I_a = \sum m_i h_i'^2 = \sum m_i \vec{h}_i' \cdot \vec{h}_i' = \sum m_i (\vec{d} + \vec{h}_i) \cdot (\vec{d} + \vec{h}_i) =$$
$$= \sum m_i d^2 + \sum m_i h_i^2 + 2\vec{d} \cdot \sum m_i \vec{h}_i$$

Di questi tre termini, il primo è pari a Md^2; il secondo è pari al momento di inerzia I_c rispetto all'asse baricentrale $\hat{c}$; il terzo è nullo, perché secondo la [VI.15] (proiettata ortogonalmente agli assi) si ha $\sum m_i \vec{h}_i = M\vec{h}_c$, dove $\vec{h}_c$ rappresenta la distanza fra il centro di massa C e l'asse $\hat{c}$, distanza che è nulla per ipotesi. Resta così dimostrato il teorema di Huygens-Steiner.

Esempi

E.VII.6. *Calcolare il momento di inerzia del disco di cui all'esempio E.VII.4, rispetto all'asse $\hat{a}$ ortogonale al disco e passante per un punto A periferico al disco.*

La distanza fra l'asse $\hat{a}$ e il centro di massa vale R.
La [VII.19] si scrive dunque:

$$I_a = I_c + MR^2 = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

Abbiamo usato il risultato dell'esempio E.VII.4 $\left(I_c = \frac{1}{2} MR^2\right)$.

E.VII.7. *Calcolare il momento di inerzia della sbarretta di cui all'esempio E.VII.5 rispetto a un asse $\hat{a}$ passante per un estremo.*

In questo caso, la distanza fra l'asse $\hat{a}$ e il centro di massa vale $l/2$; la [VII.19] si scrive dunque:

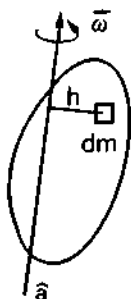
$$I_a = I_c + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{3}$$

Abbiamo usato il risultato dell'Esempio E.VII.5 $\left(I_c = \frac{Ml^2}{12}\right)$.

VII.4. Energia cinetica di un sistema rigido

L'energia cinetica di un sistema rigido che ruoti intorno ad un asse $\hat{a}$ assume una forma particolarmente semplice in termini del momento di inerzia I_a e della velocità angolare ω.

La velocità $\vec{v}$ dell'elemento dm, che si muove su traiettoria circolare di raggio h, ha infatti modulo $v = \omega h$; e dunque il relativo contributo dK dell'energia cinetica K del sistema vale

$$dK = \frac{1}{2} dm\, v^2 = \frac{1}{2} dm\, h^2 \omega^2$$

Dunque l'energia cinetica totale del sistema è:

$$K = \int dK = \int \frac{1}{2}\, dm h^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\, \omega^2 \int dm h^2 = \frac{1}{2}\, I_a \omega^2 \qquad [\text{VII.20}]$$

Energia cinetica di un sistema rigido rotante

Utilizzando il teorema di Koenig (eq. [VI.45]) e la [VII.20], anche nel caso generale l'energia cinetica di un sistema rigido assume una espressione particolarmente semplice. In un sistema baricentrale, il sistema compie infatti in ogni istante una rotazione intorno a un asse $\hat{c}$; per cui la [VI.45] diviene:

$$K = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \qquad [\text{VII.21}]$$

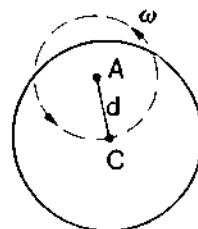
Energia cinetica di un sistema rigido qualunque

dove I_c è il momento di inerzia rispetto all'asse (istantaneo) di rotazione.

Esempio

E.VII.8. *Calcolare l'energia cinetica di un disco che ruoti con velocità angolare* ω *intorno a un asse* $\hat{a}$ *ortogonale ad esso e spostato di un tratto* d *rispetto al centro* C. (R = raggio del disco; M = massa).

Il baricentro C del disco compie un moto circolare con velocità $v_c = \omega d$; per cui la [VII.21] si scrive:

$$K = \frac{1}{2} M \omega^2 d^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 = \frac{1}{2} M d^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} M \left(d^2 + \frac{R^2}{2} \right) \omega^2 \qquad [\text{VII.22}]$$

Lo stesso risultato si ottiene in questo caso (trattandosi di un corpo rotante intorno a un asse fisso) usando la [VII.20]. Usando il teorema di Steiner (eq. [VII.19]), si ha infatti

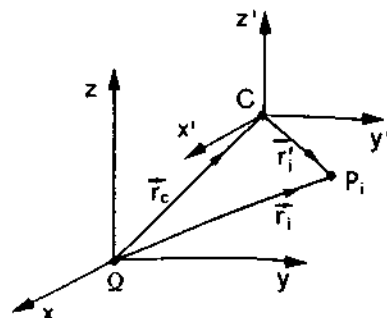
$$I_a = I_c + M d^2 = \frac{1}{2} M R^2 + M d^2$$

Espressione che inserita nella [VII.20] fornisce la [VII.22].

VII.5. Momento angolare rispetto a un polo fisso

Molti problemi possono essere trattati più efficacemente calcolando il momento angolare del sistema rispetto a un polo fisso anziché rispetto al centro di massa C.

Considerato dunque un sistema di punti $S \equiv \{P_i\}$ di cui sia C il centro di massa, sia Ω il polo e sia Ωxyz il sistema di riferimento in cui si sia scelto di descrivere il moto.

Per comodità, abbiamo scelto l'origine del sistema di riferimento coincidente con il polo Ω. Sia inoltre $Cx'y'z'$ un sistema di riferimento baricentrale (con origine in C) e orientato come Ωxyz (o comunque con orientamento fisso rispetto ad esso).

Considerato il punto P_i del sistema, si ha

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}'_i$$

con $\vec{r}_i$, $\vec{r}_c$ e $\vec{r}'_i$ definiti in figura. Derivando si ha (vedi par. VI.8):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}'_i$$

Calcoliamo ora il momento angolare $\vec{P}$ del sistema S rispetto al polo Ω. Si ha:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \textstyle\sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_c + \vec{r}'_i) \times m_i(\vec{v}_c + \vec{v}'_i) = \\ &= \vec{r}_c \times \textstyle\sum m_i\vec{v}_c + \vec{r}_c \times \sum m_i\vec{v}'_i + \sum \vec{r}'_i \times m_i\vec{v}_c + \sum \vec{r}'_i \times m_i\vec{v}'_i\end{aligned} \qquad \text{[VII.22]}$$

Analizziamo ciascuno di questi quattro termini. Si ha:

- $\vec{r}_c \times \sum m_i\vec{v}_c = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c$ dove $M = \sum m_i$ è la massa totale del sistema.
- $\vec{r}_c \times \sum m_i\vec{v}'_i = 0$. Infatti $\sum m_i\vec{v}'_i$ può essere scritto, secondo la [VI.26], come $M\vec{v}'_c$, dove $\vec{v}'_c$ è la velocità del baricentro nel sistema baricentrale (e dunque $\vec{v}'_c = 0$).
- $\sum \vec{r}'_i \times m_i\vec{v}_c = (\sum m_i r'_i) \times \vec{v}_c = 0$. Infatti $\sum m_i\vec{r}'_i$ può essere scritto, secondo la [VI.15], come $M\vec{r}'_c$, dove $\vec{r}'_c$ è il vettore posizione del baricentro nel sistema baricentrale (e dunque $\vec{r}'_c = 0$).
- $\sum \vec{r}'_i \times m_i\vec{v}'_i = \vec{P}_c$, cioè rappresenta il momento angolare totale $\vec{P}_c$ del sistema rispetto al centro di massa C del sistema.

In definitiva, la [VII.22] può essere scritta come

Momento angolare rispetto a un polo fisso

$\vec{P} = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c + \vec{P}_c$

$$\vec{P} = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c + \vec{P}_c \qquad \text{[VII.23]}$$

Il momento angolare di un sistema rispetto a un polo fisso qualunque Ω può essere scritto come somma del momento angolare $\vec{r}_c \times M\vec{v}_c$ del centro di massa, cioè del momento angolare che competerebbe ad un punto materiale di massa M concentrato nel centro di massa e che si muovesse con la velocità del centro di massa, e del momento angolare $\vec{P}_c$ rispetto al centro di massa. Nel caso di un sistema rigido, usando per $\vec{P}_c$ l'espressione [VII.9], la [VII.23] diviene:

$$\vec{P} = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c + \bar{I}_c\omega \qquad \text{[VII.24]}$$

Esempio

E.VII.9. *Una boccia di raggio R (sfera omogenea) viene lanciata tangenzialmente a un piano orizzontale, con velocità iniziale v_0 ma senza alcuna rotazione attorno al suo asse. Inizialmente, il punto di contatto striscia sul piano; ma a causa dell'attrito, dopo un certo tratto l essa prende a rotolare senza stri-*

sciare. a) Con che velocità v procede da allora in poi il suo centro C? b) Quanta energia è stata dissipata dall'attrito finché la boccia ha proceduto strisciando? (Considerando il vincolo perfetto, quando la boccia prende a rotolare non vi è più dissipazione).

a) Il peso $m\vec{g}$ della boccia è equilibrato dalla reazione normale $\vec{N}$ del piano; per cui l'unica forza efficace è la forza f_t di attrito. Questa forza è orizzontale (tangente al piano) per cui il suo momento $\vec{m}$ rispetto a un punto Ω qualunque del piano di appoggio è nullo: per conseguenza il momento della quantità di moto $\vec{P}$ rispetto a Ω si conserva. Notiamo che $\vec{P}$ è ortogonale al piano del disegno, per cui possiamo limitarci a considerare il modulo:

$$P_o = P_f$$

dove P_o e P_f rappresentano rispettivamente il valore iniziale e finale del modulo di $\vec{P}$. Per calcolare P_o e P_f usiamo la [VII.24], tenendo conto che inizialmente il corpo non ruota ($\omega_o = 0$) e che alla fine esso ruota su un piano ortogonale al foglio, per cui $|\bar{I}\omega_f| = I_c\omega_f$; la [VII.24] si scrive dunque:

$$m v_o r_o \sin\theta_o = m v_f r \sin\theta + I_c \omega_f .$$

Ora notiamo che $r_o \sin\theta_o = r \sin\theta = R$ in qualunque posizione. Inoltre

$$I_c = \frac{2}{5} m R^2 \quad \text{e} \quad \omega_f = \frac{v_f}{R}$$

(perché alla fine la sfera rotola senza strisciare); per cui:

$$m v_o R = m v_f R + \frac{2}{5} m R^2 \frac{v_f}{r} = m v_f R \left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{5} m v_f R$$

da cui si ricava

$$v_f = \frac{5}{7} v_o$$

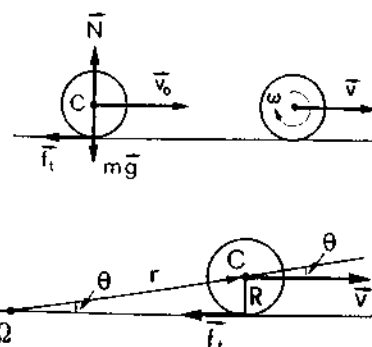
b) Inizialmente l'energia cinetica valeva $K_o = \frac{1}{2} m v_o^2$; alla fine essa vale

$$K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_f^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} m R^2 \frac{v_f^2}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{2} m v_f^2 \left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{5}\left(\frac{1}{2} m \left(\frac{5}{7} v_o\right)^2\right) =$$

$$= \frac{5}{7}\left(\frac{1}{2} m v_o^2\right) = \frac{5}{7} K_o .$$

La differenza fra l'energia cinetica iniziale e quella finale (energia cinetica dissipata) risulta dunque:

$$\Delta K = K_o - K_f = K_o - \frac{5}{7} K_o = \frac{2}{7} K_o = \frac{2}{7}\frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{m v_o^2}{7} .$$

VII.6. Moto di un sistema rigido non vincolato. Il caso notevole di un proiettile non puntiforme

Moto di un sistema rigido non vincolato

In assenza di vincoli, il sistema dispone di tutte le libertà di movimento; e dunque, trattandosi di un corpo rigido, esso ha sei gradi di libertà. Non essendo presenti reazioni vincolari, possiamo supporre che le sollecitazioni esterne siano completamente note; per cui è noto, in particolare, il primo membro delle equazioni cardinali (VI.27):

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = \dfrac{d\vec{Q}}{dt} \\ \vec{M}^{(e)} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} \end{cases} \qquad \text{[VI.27]}$$

in funzione della configurazione (ed eventualmente dello stato di moto) del sistema. La soluzione di queste sei equazioni scalari, fra di loro indipendenti, consente di ricavare la legge del moto; cioè di esprimere come funzione esplicita del tempo i sei parametri geometrici che descrivono la configurazione del sistema (ad esempio le coordinate del centro di massa C, e gli angoli che individuano l'orientamento del sistema intorno a C).

Condizioni iniziali

Per fare ciò, è necessario fornire anche le condizioni iniziali. Queste possono essere espresse specificando, oltre alla posizione iniziale del sistema, il valore $\vec{Q}_0$ e $\vec{P}_0$ che all'istante $t = 0$ hanno la sua quantità di moto $\vec{Q}$ e il suo momento angolare $\vec{P}$.

$$\begin{cases} \vec{Q}(0) = \vec{Q}_0 \\ \vec{P}(0) = \vec{P}_0 \end{cases} \qquad \text{[VII.25]}$$

Come abbiamo visto nel capitolo V, se si escludono le forze di natura elettromagnetica di cui non ci occupiamo in questo volume, le uniche forze che un sistema può subire a distanza (cioè senza essere a contatto con altri corpi solidi, così come accade a un corpo non vicolato) sono le forze gravitazionali e le forze esercitate da un eventuale mezzo fluido (ad esempio l'aria) in cui il moto del sistema avvenga.

Proiettile non puntiforme

Ciò considerato, il caso più notevole di moto di sistema rigido non vincolato con cui si ha a che fare usualmente è il moto di un grave non puntiforme; cioè di un sistema rigido esteso in moto sotto l'azione della forza peso (*proiettile non puntiforme*).

In questo paragrafo discutiamo per l'appunto il moto di un proiettile non puntiforme. Non escludiamo il caso che esso sia inizialmente dotato di moto rotatorio, ma limitiamo la nostra attenzione al caso che tale rotazione iniziale avvenga attorno a un asse libero $\hat{u}$. Cominciamo col caso più semplice, in cui le forze di resistenza del mezzo siano assenti o trascurabili, per poi introdurre queste complicazioni per gradi.

Come abbiamo discusso nel par. [VI.9], l'effetto della forza peso sul moto di un sistema rigido può essere correttamente descritto immaginando che il peso totale $M\vec{g}$ sia applicato al baricentro C del sistema, coincidente col centro di massa. Scegliendo dunque C come polo per il calcolo dei momenti, il momento della forza è nullo; e dunque per un corpo rigido sottoposto alla sola forza peso le equazioni cardinali [VI.27] possono essere scritte come

$$\begin{cases} M\vec{g} = \dfrac{d\vec{Q}}{dt} \\ 0 = \dfrac{d\vec{P}}{dt} \end{cases} \qquad \text{[VII.26]}$$

Si ha inoltre $\vec{Q} = M\vec{v}_c$, con $\vec{v}_c$ velocità del centro di massa; ed essendo il corpo non vincolato si ha anche (secondo la [VII.7]) $\vec{P}_u = I_u\vec{\omega}$ dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare intorno all'asse libero di rotazione $\hat{u}$, e I_u è il momento di inerzia rispetto a $\hat{u}$. Tenuto conto di ciò, le [VII.26] e le [VII.25] divengono rispettivamente:

$$\begin{cases} M\vec{g} = M\vec{a}_c \\ O \ = I_u \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v}_c(0) = \vec{v}_0 \\ \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}_0 \end{cases} \qquad \text{[VII.27]}$$

dove con $\vec{v}_0$ e $\vec{\omega}_0$ abbiamo indicato la velocità iniziale del baricentro e la velocità angolare con cui il corpo inizialmente ruota intorno all'asse $\hat{u}$.

La soluzione delle [VII.27] è estremamente semplice. La prima di queste equazioni mostra che il centro di massa C si muove come un proiettile puntiforme; e dunque ne compirà il caratteristico moto parabolico (vedi esempio E.II.26 e successivi). La seconda delle [VII.27] mostra che $\vec{\omega}$ = costante = $\vec{\omega}_0$. L'asse di rotazione $\hat{u}$ mantiene dunque invariato il suo orientamento; e intorno ad esso il corpo continua a ruotare con velocità angolare costante pari a quella iniziale. La rotazione avviene attorno a un asse principale di inerzia; se ad esempio il proiettile ha forma cilindrica, a seconda delle condizioni iniziali, esso può ruotare attorno all'asse del cilindro, ovvero attorno ad un asse ortogonale a questo e passante per il centro di massa C.

Effetto delle forze esercitate dal mezzo

Discutiamo ora quale può essere, a seconda dei casi, l'effetto delle forze esercitate dal fluido (ad es. aria) entro cui il moto del proiettile avviene. Formalmente, l'effetto dell'aria è quello di introdurre un termine vettoriale al primo membro di ciascuna delle equazioni [VII.27].

$$\begin{cases} \vec{f}_R + M\vec{g} = M\vec{a}_c \\ \vec{m}_R \qquad = I_u \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v}_c(0) = \vec{v}_0 \\ \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}_0 \end{cases} \qquad \text{[VII.28]}$$

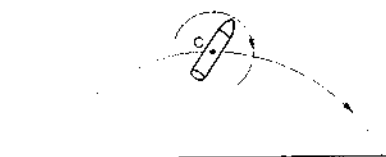
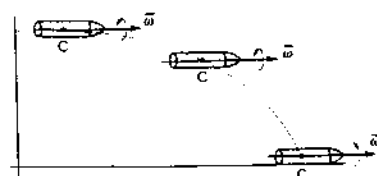
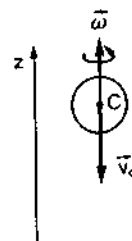
Come ogni altro sistema di forze, anche le forze esercitate dall'aria sono infatti equivalenti (quanto al loro effetto sul moto di un corpo rigido) a una forza applicata al centro di massa (pari al risultante $\vec{f}_R$) più una coppia (di momento $\vec{m}_R$). Ciò che cambia di caso in caso è l'espressione che può essere data a $\vec{f}_R$ e $\vec{m}_R$ in funzione delle grandezze in gioco.

Il caso più semplice si presenta quando il proiettile è omogeneo e di forma particolarmente simmetrica (ad esempio cilindrica o sferica), e quando l'asse principale di inerzia intorno a cui esso ruota è parallelo alla velocità. Questa situazione si presenta ad esempio nel caso di una sfera che cade lungo la verticale, essendogli stata impressa inizialmente una rotazione attorno all'asse centrale verticale.

In questo caso la forza $\vec{f}_R$ può essere scritta come

Resistenza viscosa

$$\vec{f}_R = -\beta\vec{v}_0 \qquad \text{[VII.29]}$$

Se la velocità della sfera è sufficientemente bassa, β è indipendente dalla velocità (moto viscoso); la prima delle [VII.28] si riduce alla [V.42], e può dunque essere risolta così come abbiamo mostrato nel paragrafo V.7.1. nel caso di un grave puntiforme. Anche qualora β abbia una dipendenza (nota)

dalla velocità v_c (ad esempio $\beta = k v_c$, cosicché il modulo di $\bar{f}_R$ sia proporzionale a v_c^2) la prima delle [VII.28] può essere risolta con relativa semplicità per separazione di variabili.

Per sua parte, anche il momento $\bar{m}_R$ che compare nella seconda delle [VII.28] può essere scritto con buona approssimazione, nelle condizioni che stiamo trattando, in forma particolarmente semplice; si può porre infatti

$$\bar{m}_R = -\gamma\bar{\omega} \qquad \text{[VII.30]}$$

Il momento delle forze di resistenza dell'aria è cioè diretto come $\bar{\omega}$ ed opposto in verso: si tratta di un effetto frenante che tende a rallentare la rotazione, senza tuttavia indurre alcuna modifica nella direzione dell'asse di rotazione. Ancora una volta, il caso più semplice si ha quando γ sia indipendente dallo stato di moto del sistema. Lasciamo al lettore di verificare che se γ è costante l'equazione che si ottiene introducendo la [VII.30] nella seconda delle [VII.28] ammette come soluzione l'espressione esponenziale $\omega(t) = \omega_0 e^{-t/\tau}$, dove $\tau = I_u/\gamma$.

Diminuzione esponenziale della velocità angolare

Analizziamo ora il caso che il corpo, omogeneo e simmetrico, sia dotato inizialmente di una rotazione con velocità angolare $\bar{\omega}_0$ attorno a un asse libero $\hat{u}$ *non* parallelo alla velocità $\bar{v}_c$ del centro di massa; per semplicità, supponiamo che l'asse sia ortogonale alla velocità (e, nel disegno, ortogonale al piano del foglio).

In questo caso, lo strato di aria a contatto col corpo, che il corpo ruotando trascina parzialmente con sé imprimendogli una certa velocità tangenziale media $\bar{v}_t$, produce una compressione dell'aria sul lato in cui questa velocità si somma alla velocità $\bar{v}_c$ del centro di massa; e una decompressione sul lato opposto.

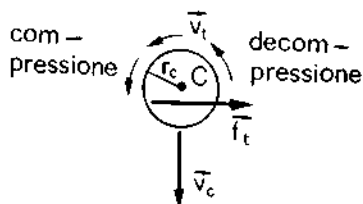
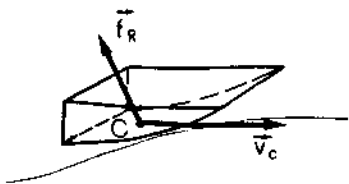
Questa differenza di pressione fa sì che alla forza di resistenza $\bar{f}_R$ opposta al moto, espressa dalla [VII.29], si sommi una forza trasversale $\bar{f}_t$, ortogonale a $\bar{\omega}$ e a $\bar{v}_c$, che può essere posta nella forma

$$\bar{f}_t = \delta \cdot \bar{\omega} \times \bar{v}_c \qquad \text{[VII.31]}$$

dove δ è un parametro che in molte situazioni può essere considerato, in buona approssimazione, come costante. Questa forza tende a far deviare lateralmente il corpo, incurvandone la traiettoria.

Il fenomeno diviene particolarmente rilevante nel caso di oggetti leggeri, quando gli effetti dipendenti dalle dimensioni geometriche (forze esercitate dal mezzo) divengono confrontabili, nella prima delle equazioni [VII.28], coi termini proporzionali alla massa. È noto a tutti, ad esempio, che un pallone da calcio può procedere su una traiettoria la cui proiezione orizzontale è incurvata, e ciò succede quando gli sia stata impressa una rotazione attorno a un asse (verticale) ortogonale al moto: nel linguaggio comune si usa dire che gli è stato dato un «effetto». Notare che l'introduzione del termine [VII.31] accoppia fra di loro le due equazioni [VII.28] introducendo nella prima una forza dipendente da $\bar{\omega}$. Considerata la semplicità della legge che esprime la funzione $\omega(t)$ che risolve la seconda delle [VII.28], la prima delle [VII.28] resta comunque risolubile con relativa semplicità (salvo la determinazione, che non può essere che empirica, dei coefficienti che caratterizzano le forze); ciononostante, noi preferiamo non andare qui oltre le considerazioni qualitative che abbiamo fatto più sopra.

Pallone dotato di «effetto»

Quando il corpo rigido non sia omogeneo, e/o la sua forma non sia completamente simmetrica, allora la forza $\bar{f}_R$ e il momento $\bar{m}_R$ esercitati dal

MOTO DI UN CORPO RIGIDO NON VINCOLATO: CASO GENERALE

Nella nostra trattazione del moto di corpi rigidi, non abbiamo analizzato il più generale dei moti che un tale corpo può compiere: ci siamo infatti limitati sostanzialmente a considerare il caso che esso ruoti intorno a un asse con orientamento fisso. Se il corpo è vincolato, tale asse può essere un asse qualunque, purché la costanza del suo orientamento sia garantita dai vincoli; se il corpo è libero, l'asse di rotazione con orientamento fisso non può che essere un asse centrale di inerzia. Abbiamo anche considerato il caso che un corpo non sia libero (moto del giroscopio, sottoposto a un sistema di forze costanti a momento non nullo), limitandoci però all'ipotesi che il corpo fosse stato inizialmente posto in rotazione intorno a un asse libero; e che a partire dall'istante iniziale il momento delle forze applicate fosse capace di introdurre solo una perturbazione piccola rispetto al moto del sistema libero.

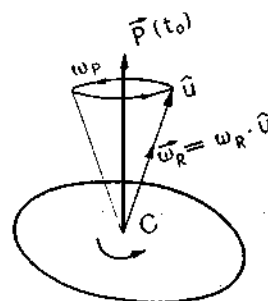
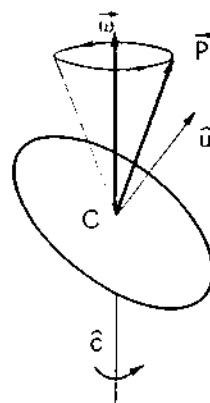
Il caso più generale si ha quando il corpo è posto inizialmente in rotazione intorno a un asse diverso da un asse centrale di inerzia; e a partire dall'istante iniziale il moto si svolga sotto l'azione di un sistema di forze qualunque. In questi casi il moto avviene con modalità generalmente assai complesse: non solo l'asse di rotazione cambia istante per istante di orientamento nel sistema di riferimento inerziale in cui descriviamo il moto, ma cambia anche il suo orientamento rispetto al corpo rigido; né resta costante in generale il modulo ω della velocità angolare.

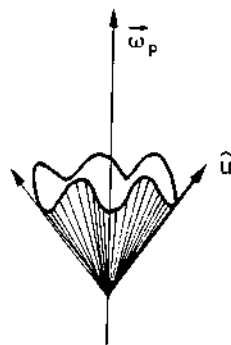
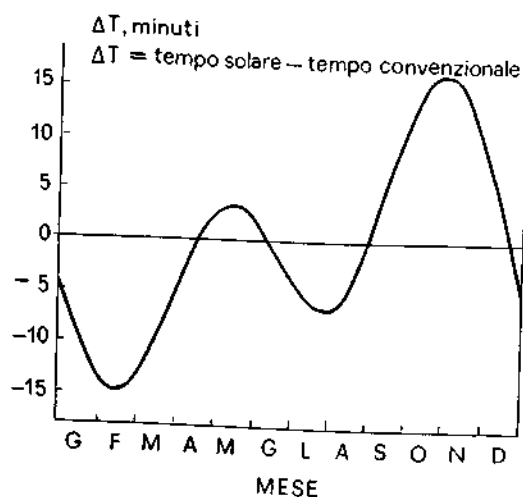
La soluzione delle equazioni del moto è in generale assai complicata, e anche l'impostazione di tali equazioni – dette equazioni di Eulero – richiede l'uso di un formalismo più generale rispetto a quello da noi introdotto. Anche nel caso in cui il corpo, dopo essere stato posto inizialmente in rotazione intorno a un asse diverso da un asse centrale di inerzia, venga poi lasciato completamente libero (non sottoposto ad alcuna forza), il moto avviene con modalità complesse che possono essere tanto più elaborate quanto meno regolare è la geometria del sistema. Per una trattazione rigorosa e completa rimandiamo a testi di meccanica avanzata.

Qui, tanto per illustrare qualitativamente il fenomeno, ci limitiamo a considerare a titolo di esempio un sistema semplice, dando una descrizione fenomenologica del suo moto.

Consideriamo un disco omogeneo, saldato ad un asse $\hat{c}$ passante per il centro C ma non ortogonale al disco stesso. Come vediamo nell'esempio E.VII.11, quando il disco ruota con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega \hat{c}$, il suo momento angolare $\vec{P}(t)$ ha una direzione che non coincide né con la direzione di $\vec{\omega}$ né con la direzione dell'asse centrale $\hat{u}$ ortogonale al disco in C: in effetti, il momento angolare $\vec{P}(t)$ compie un moto di precessione con velocità angolare ω intorno all'asse $\hat{c}$, così come mostriamo schematicamente in figura.

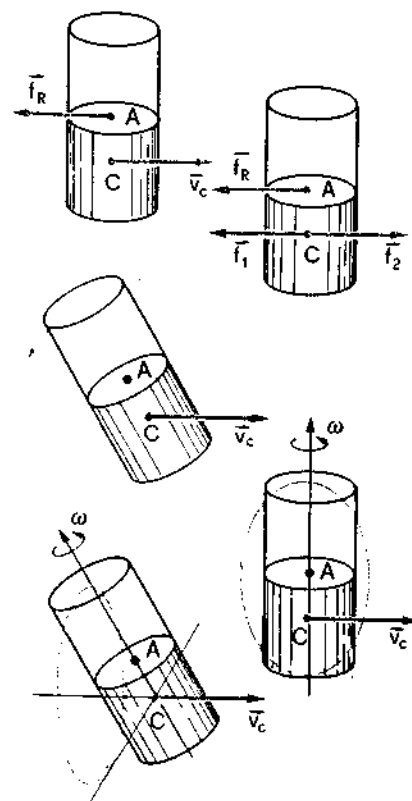
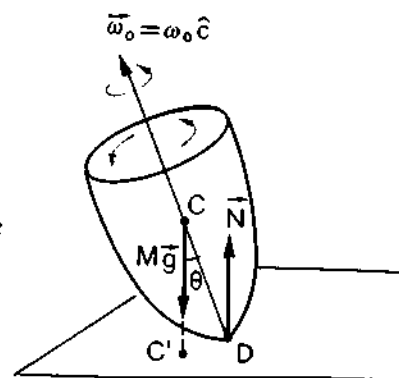
Se all'istante $t = t_0$ la saldatura che fissa il disco all'asse si spezza, per $t \geq t_0$ (essendo il disco libero) il suo momento angolare resta costante pari a $\vec{P}(t_0)$. L'asse di rotazione prende a compiere una precessione intorno a $\vec{P}(t_0)$, e il disco, pur essendo libero, «sfarfalla».

In questo caso, in cui il sistema ha simmetria cilindrica intorno all'asse $\hat{u}$, questo sfarfallamento avviene con modalità relativamente semplici: il disco ruota con velocità angolare $\vec{\omega}_R = \omega_R \hat{u}$ intorno all'asse $\hat{u}$, e questo a sua volta compie una precessione intorno a $\vec{P}(t_0)$ con velocità angolare $\vec{\omega}_P = \omega_P \hat{P}_0$ ($\hat{P}_0 \equiv$ versore di $\vec{P}(t_0)$), e sia ω_R che ω_P sono costanti. Evidentemente, la velocità angolare risultante $\vec{\omega}$ del corpo ($\vec{\omega} = \vec{\omega}_R + \vec{\omega}_P$) è costante in modulo ma non in direzione.

Se il sistema non avesse simmetria cilindrica intorno a $\hat{u}$ lo sfarfallamento sarebbe meno regolare, non essendo costante il modulo di $\vec{\omega}_R$ né l'angolo che essa forma con $\bar{P}(t_0)$; note le caratteristiche geometriche del corpo, la soluzione può però essere costruita anche graficamente attraverso una tecnica (*costruzione di Poinsot*) che si trova usualmente descritta nei buoni testi di meccanica razionale.

Superficie generata dall'asse di una trottola nel suo moto di precessione con sovrapposta nutazione

Naturalmente, il moto può assumere complessità ancor maggiore qualora il corpo, anziché essere libero, sia sottoposto a un sistema di forze esterne a momento risultante non nullo. Ad esempio, una trattazione rigorosa del moto della trottola - in cui si rinunci all'ipotesi, da noi fatta nel par. VII.7, che la velocità angolare di precessione sia molto minore di quella di rotazione - porta a evidenziare un moto più complesso per l'asse della trottola: esso compie una «*nutazione*» (che a seconda dei casi può essere di dondolamento, come mostrato in figura, o di avvitamento) che si sovrappone alla precessione.

Anche la Terra, nel suo moto intorno al Sole, è soggetta a fenomeni analoghi: nella figura è riportata la cosiddetta *equazione del tempo* che rappresenta la differenza in minuti fra il mezzogiorno solare e quello convenzionale, come funzione del mese dell'anno. Le fluttuazioni intorno al valor medio nullo solo dovute a oscillazioni, intorno al valor medio, della velocità angolare con cui la Terra ruota intorno al suo asse.

mezzo possono essere i più vari, sia come valore che come direzione. Ad esempio si può avere una forza $\vec{f}_R$ che ha direzione diversa da quella opposta alla velocità, come nel caso della forza portante che si esercita sulle ali di un aeroplano.

Ovvero si può avere una forza frenante $\vec{f}_R$ diretta in direzione opposta alla velocità $\vec{v}_c$ del centro di massa, ma applicata in un punto diverso dal centro di massa C. Ad esempio nel caso di un cilindro non omogeneo, metà pieno e metà vuoto, la forza $\vec{f}_R$ è applicata nel centro geometrico A del cilindro. $\vec{f}_R$ è in questo caso equivalente a una forza $\vec{f}_1$ (pari a $\vec{f}_R$) applicata in C, più una coppia ($\vec{f}_R$, $\vec{f}_2$, di braccio AC) il cui momento $\vec{m}_R$ è ortogonale ad AC e alla velocità $\vec{v}_c$. Se il cilindro non era dotato inizialmente di alcuna velocità di rotazione, allora il momento $\vec{m}_R$ tende a farlo ruotare intorno all'asse per C ortogonale a $\vec{v}_c$ e ad AC, portando la parte più leggera a valle rispetto al moto.

Se invece il corpo è dotato inizialmente di una velocità di rotazione $\vec{\omega}$ intorno all'asse AC, allora lo stesso momento $\vec{m}_R$ tende a farlo ruotare nel piano ortogonale a $\vec{v}_c$: come ciò possa accadere, sarà chiarito dalle considerazioni che nel prossimo paragrafo faremo a proposito del giroscopio. Gli stessi meccanismi giroscopici fanno sì che, qualora l'asse AC intorno a cui il cilindro ruota sia inizialmente inclinato, un momento $\vec{m}_R$ ortogonale alla velocità angolare induca un moto di precessione che porta l'asse di rotazione a generare un cono («sfarfallamento»).

Moto di una trottola in assenza di attrito

VII.7. Giroscopio appoggiato a un piano (moto di una trottola)

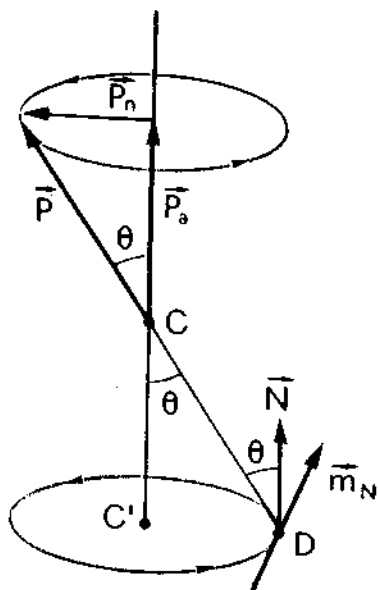
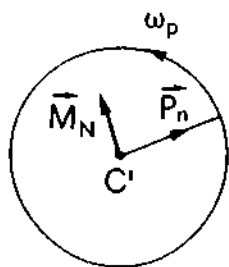
Consideriamo un sistema rigido S, omogeneo, dotato di simmetria di rotazione intorno ad un asse $\hat{c}$ (passante per il centro di massa C): l'asse $\hat{c}$ rappresenta per il sistema un asse libero di rotazione.

Supponiamo che al sistema venga impressa una rotazione intorno all'asse $\hat{c}$ con velocità angolare iniziale $\vec{\omega}_c = \omega_0 \hat{c}$; e che esso venga poi appoggiato su un piano orizzontale avendo portato l'asse $\hat{c}$ a formare un angolo θ (diverso da 0 e da $\pi/2$) con la verticale. Trascuriamo per il momento tutti gli attriti: sia l'attrito radente nel punto di contatto D fra il sistema (che, coerentemente col linguaggio comune, chiameremo «trottola») e il piano di appoggio; sia le forze esercitate dall'aria, cioè dal mezzo entro cui il moto avviene.

Le forze che agiscono sul sistema sono allora solo la forza peso $M\vec{g}$ applicata al centro di massa C e la reazione vincolare esercitata dal piano di appoggio nel punto di contatto D. Per l'ipotesi di assenza di attrito, tale reazione sarà normale al piano (cioè verticale); indichiamola con $\vec{N}$.

Le equazioni cardinali per il sistema si scrivono:

$$\begin{cases} M\vec{g} + \vec{N} = M\vec{a}_c \\ \vec{m}_N = I_c \dfrac{d\vec{\omega}_c}{dt} \end{cases} \qquad \text{[VII.32]}$$

dove M è la massa del sistema; $\vec{a}_c$ l'accelerazione del centro di massa C; $\vec{m}_N$ è il momento della reazione $\vec{N}$ rispetto a C (abbiamo scelto come polo il centro di massa; e dunque il momento della forza peso è nullo); I_c è il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse $\hat{c}$; e $\vec{\omega}_c$ è la sua velocità angolare attorno a $\hat{c}$. Notiamo che nello scrivere la seconda delle [VII.32]

abbiamo supposto che il momento angolare $\bar{P}$ del sistema sia dato da $\bar{P} = I_c\bar{\omega}_c$. Ciò in realtà è vero solo approssimativamente, perché come vedremo fra poco il sistema non è dotato solo della velocità angolare $\bar{\omega}_c$ intorno a $\hat{c}$, ma anche l'asse $\hat{c}$ è dotato di un movimento di rotazione (precessione) con velocità angolare $\bar{\omega}_p$. Tutta la nostra trattazione vale pertanto solo fino a che la precessione è molto lenta rispetto alla rotazione intorno all'asse ($\omega_p \ll \omega_c$); vedremo più avanti quale condizione deve essere verificata perché ciò sia vero.

Notiamo intanto che le forze $M\bar{g}$ ed $\bar{N}$ sono entrambe verticali; essendo dunque nulla la proiezione orizzontale del risultante, ciò significa che è nulla la proiezione orizzontale di $\bar{a}_c$. Dunque se il baricentro è stato posto inizialmente fermo, la sua proiezione C' sul piano orizzontale resta necessariamente ferma.

Notiamo inoltre che il momento $\bar{m}_N = CD \times \bar{N}$, essendo ortogonale sia a CD che a $\bar{N}$, è ortogonale a $\bar{\omega}_c$ (che è diretto come CD), ed è orizzontale (poiché $\bar{N}$ è verticale). Ciò ci porta a due importanti conclusioni a proposito del moto del nostro sistema. La prima conclusione è che la velocità angolare $\bar{\omega}_c$ può cambiare solo in direzione, ma non in modulo: infatti la seconda delle [VII.32] ci dice che $\frac{d\bar{\omega}_c}{dt}$ (che è proporzionale a $\bar{m}_N$) è ortogonale a $\bar{\omega}_c$; e dunque per la [II.36] $\frac{d\omega_c}{dt} = 0$. Dunque il modulo P di $\bar{P}$ è costante: $P = I_c\omega_c$.

La seconda conclusione è che, essendo nulla la componente verticale di $\bar{m}_N$, la componente verticale di $\bar{P}$ è costante; ed essendo costante il suo modulo, non può che essere costante l'angolo θ. Segue anche che la quota del baricentro $C'C = DC\cos\theta$ è costante; avendo già concluso precedentemente che la proiezione C' è ferma, si conclude che il centro di massa resta immobile. Dal punto di vista dinamico, segue che $M\bar{g} + \bar{N} = 0$: la reazione normale $\bar{N}$ è uguale e opposta al peso.

Il centro di massa resta fermo

In conclusione, l'unico movimento che l'asse della trottola può compiere è una precessione intorno a C: ciò significa che il punto di contatto D percorre una circonferenza intorno a C', circonferenza di raggio $R = DC\sin\theta$, dove DC è la distanza del baricentro dal punto di contatto e θ è l'angolo di inclinazione che è stato dato inizialmente alla trottola, e che permane costante nel tempo.

Moto di precessione

Resta da determinare solo la velocità angolare ω_p con cui la precessione viene compiuta, cioè la velocità angolare con cui D percorre la circonferenza. Ciò può essere calcolato utilizzando la seconda delle [VII.32], e più precisamente la sua proiezione sul piano orizzontale (la sua proiezione sull'asse verticale, come abbiamo visto, è identicamente nulla nelle approssimazioni da noi fatte).

Dalla precedente figura, vediamo immediatamente che

$$\begin{cases} |\bar{p}_n| = P\sin\theta = I_c\omega_0\sin\theta = \text{costante} \\ |\bar{m}_N| = CD \cdot N \cdot \sin\theta = l \cdot Mg \cdot \sin\theta \end{cases} \qquad \text{[VII.33]}$$

dove con l abbiamo chiamato la distanza fra il centro di massa C e il punto di contatto D. D'altra parte, $\bar{p}_n$ rappresenta un vettore di modulo costante ruotante nel piano con velocità angolare ω_p; per cui secondo la [II.37] si ha

$$\frac{d\bar{p}_n}{dt} = \bar{\omega}_p \times \bar{p}_n \quad \text{da cui} \quad \left|\frac{dp_n}{dt}\right| = \omega_p|\bar{p}_n| \qquad \text{[VII.34]}$$

In definitiva la proiezione orizzontale della seconda delle [VII.32] diviene in modulo (tenendo conto delle [VII.33] e della [VII.34]):

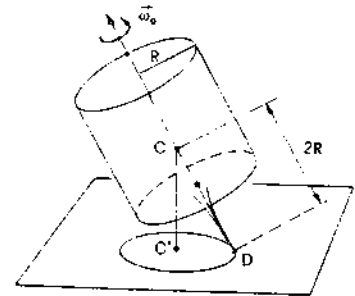
$$lMg\sin\theta = |\bar{m}_n| = \left|\frac{dp_n}{dt}\right| = \omega_p|\bar{p}_n| = \omega_p I_c\omega_o\sin\theta$$

da cui

$$\omega_p = \frac{lMg}{I_c\omega_o} \qquad \text{[VII.35]}$$

Per valutare un ordine di grandezza di ω_p, immaginiamo ad esempio che il sistema sia costituito da un cilindro omogeneo di raggio $R = 0{,}1$ m (per il quale $I_c = \frac{1}{2}MR^2$); sia inoltre $CD = l = 2R$. Se il giroscopio ruota intorno al suo asse a 30 giri al secondo, si ha $\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(1/30)\text{ s}} \simeq 90\text{ s}^{-1}$. Sostituendo nella [VII.35] si ha:

$$\omega_p = \frac{2R\cdot M\cdot 9{,}2\text{ m s}^{-2}}{\frac{1}{2}MR^2\cdot 190\text{ s}^{-1}} \simeq 2\text{ s}^{-1} \qquad \text{[VII.36]}$$

Piano di appoggio dotato di attrito

In questo caso si ha dunque $\omega_o \simeq 10^2\omega_p$; ed è soddisfatta la condizione perché valgano le approssimazioni da noi fatte.

Va notato che qualora il piano di appoggio presenti attrito (come accade di fatto nella pratica) è normale che a causa dell'attrito il punto D resti fermo. In questo caso la precessione avviene intorno a D anziché intorno a C; ed è quest'ultimo (anziché D) a compiere una traiettoria circolare di raggio $r = l\sin\theta$ con velocità angolare ω_p. La trattazione può essere fatta esattamente come nel caso di assenza di attrito (con gli stessi risultati per ω_p) pur di prendere come polo per il calcolo dei momenti il punto D anziché il punto C.

Il baricentro compie ora una traiettoria circolare con velocità angolare costante; la sua accelerazione (centripeta) vale dunque, in modulo

$$a_c = \omega_p^2 r = \omega_p^2 l\sin\theta$$

La componente orizzontale della forza che deve imprimere questa accelerazione al centro di massa è la forza di attrito, di modulo f_t; per cui deve essere:

$$f_t = Ma_c = M\omega_p^2 l\sin\theta$$

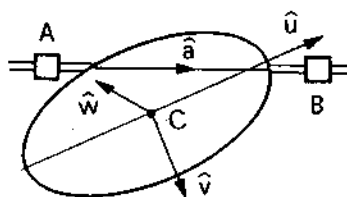
Poiché la componente normale della reazione vincolare ha modulo $N = Mg$, la condizione perché il punto di contatto D resti fermo è che sia (vedi eq. [V.67]):

$$\frac{f_t}{N} = \frac{M\omega_p^2 l\sin\theta}{Mg} = \omega_p^2\frac{l\sin\theta}{g} < \mu \qquad \text{[VII.37]}$$

dove μ è il coefficiente di attrito.

Ad esempio nelle condizioni numeriche espresse dalla [VII.36], la [VII.37] diviene (ponendo, per fissare le idee, $\theta = 45°$):

$$\frac{\omega_p^2 l \sin\theta}{g} \simeq \frac{4\,\mathrm{s}^{-2} \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} \cdot 0{,}7}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}} \simeq 0{,}05 < \mu$$

e questa condizione è praticamente sempre soddisfatta anche se il piano di appoggio è estremamente liscio.

VII.8. Corpo rigido girevole intorno a un asse fisso

Consideriamo un corpo rigido ruotante, con velocità angolare non necessariamente costante, intorno a un asse $\hat{a}$ fisso: per ottenere ciò, l'asse sarà realizzato meccanicamente mediante una sbarretta rigida (perno) la cui direzione è mantenuta fissa da due supporti A e B che impediscono anche all'asse di scorrere su se stesso. In generale, il centro di massa C del sistema non appartiene all'asse, e l'asse $\hat{a}$ non coincide con un asse centrale di inerzia né con un *asse principale di inerzia* (come è detto ogni asse parallelo agli assi centrali).

Asse principale di inerzia

Supponiamo di conoscere, in funzione dei parametri cinematici del sistema (configurazione e velocità) ed eventualmente del tempo t, le sollecitazioni (forze esterne attive) che agiscono sul sistema. Sia $\vec{F}$ il risultante di queste forze ed $\vec{M}$ il momento risultante rispetto a un polo Ω, che per semplicità supponiamo appartenente all'asse. Oltre a queste forze attive, agiscono in generale sul sistema anche delle reazioni vincolari esercitate dall'asse: sia $\vec{R}$ il risultante delle reazioni vincolari e $\vec{\tau}$ il loro momento risultante rispetto a Ω. Per il momento, supponiamo che siano assenti gli attriti. Ciò significa che la componente τ_a di $\vec{\tau}$ lungo l'asse è nulla: sarebbe questa sua componente, infatti, l'unica che con la sua presenza tenderebbe a rallentare la rotazione.

Le equazioni cardinali [VI.27] si scrivono allora

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{R} = \dfrac{d\vec{Q}}{dt} & \text{[VII.38 a]} \\ \vec{M} + \vec{\tau} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} & \text{[VII.38 b]} \end{cases}$$

Ci proponiamo di discutere come possa essere determinato il moto del corpo rigido, e come possano essere calcolate le sollecitazioni $\vec{R}$ e $\vec{\tau}$ esplicate dai vincoli. Il metodo che deve essere seguito a tal fine è concettualmente assai semplice. Cominciamo col notare che il sistema ha un solo grado di libertà: la sua posizione è completamente determinata dall'angolo θ che un piano qualunque passante per l'asse e solidale al corpo forma con un piano fisso.

Componente assiale della seconda equazione cardinale

Per determinare la funzione $\theta(t)$ che descrive completamente il moto, può essere usata la componente lungo l'asse $\hat{a}$ di rotazione della [VII.38 b]. Essendo $\tau_a = 0$, e tenuto conto della [VII.8], questa equazione si scrive

$$M_a = I_a \frac{d\omega}{dt} = I_a \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \text{[VII.39]}$$

Quando il momento assiale delle forze sia noto, come abbiamo supposto, in funzione di θ (ed eventualmente di $\frac{d\theta}{dt}$ e del tempo t), questa equazione differenziale può essere sempre risolta, almeno in linea di principio, una volta assegnate le condizioni iniziali.

Poiché il sistema ha un solo grado di libertà, una volta noto $\theta(t)$ possono essere calcolati, in base a pure considerazioni geometriche e cinematiche, i secondi membri delle altre cinque equazioni [VII.38]. La procedura con cui ciò può essere fatto è semplice. Infatti il centro di massa C percorre una circonferenza (o un arco di circonferenza) giacente su un piano ortogonale all'asse; la sua accelerazione $\bar{a}_c$ è dunque facilmente espressa in funzione della velocità angolare $\omega(t)$ (e della sua derivata); e risulta così noto $\frac{d\bar{Q}}{dt} = M\bar{a}_c$. Quanto al componente $\bar{P}_{an}$ di $\bar{P}_a$ ortogoale all'asse, esso può essere calcolato con relativa semplicità, mediante le formule ricavate nel par. VII.3, una volta nota la componente $P_{aa} = I_a\omega(t)$ di $\bar{P}_a$ parallela all'asse. Infatti l'angolo γ (costante) che $\bar{P}_a$ forma con $\hat{a}$ è lo stesso angolo che $\bar{P}_a$ forma con un asse $\hat{c}$ passante per C parallelo ad $\hat{a}$; ed è dunque espresso dalla [VII.15]. Gli esempi che seguono serviranno a meglio chiarire quanto più sopra abbiamo detto.

Una volta noti i secondi membri delle equazioni [VII.38], queste stesse relazioni ci forniscono lo strumento per un immediato calcolo delle incognite dinamiche che compaiono al primo membro, e rappresentate dalle tre componenti di $\bar{R}$ e dalle due componenti di $\bar{\tau}$ ortogonali all'asse.

Quando è presente l'attrito, al primo membro della [VII.39] compare anche il termine τ_a. Il caso più semplice si ha quando l'effetto dominante sia quello dovuto alla resistenza del mezzo; il momento dell'attrito può allora essere scritto nella forma $\tau_a = -\beta\frac{d\theta}{dt}$, e la soluzione della [VII.39], benché matematicamente più complessa, procede concettualmente come nel caso in cui τ_a sia trascurabile. Quando invece il contributo τ_a degli attriti sia dominato dai contributi di attrito radente (cosicché τ_a è dovuto a termini proporzionali, tramite coefficienti di attrito, alle reazioni vincolari normali) la soluzione della [VII.39] diviene concettualmente assai più complessa. Il procedimento più efficace può essere allora quello «perturbativo». Si risolve cioè il problema in prima approssimazione trascurando l'attrito, e si determinano le reazioni vincolari normali con la procedura sopra descritta. Si calcola poi il momento τ_a che in corrispondenza ne risulta; e usando questo valore di τ_a al primo membro della [VII.39] si calcola una soluzione di seconda approssimazione. Se necessario, il procedimento può essere ripetuto più volte, migliorando di volta in volta il livello di approssimazione.

Soluzione perturbativa

Gli esempi che facciamo sono tuttavia trattati tutti nell'ipotesi di assenza di attrito.

Esempio

E.VII.10. *Una piastra metallica rettangolare omogenea di massa m, con lati b e c, è appesa a un asse orizzontale $\hat{a}$ ortogonale ad essa e passante per il punto mediano A del suo lato minore b. a) Determinare la legge del moto per piccole oscillazioni; b) calcolare, in funzione del tempo, il risultante $\bar{R}$ e il momento risultante $\bar{\tau}$ delle reazioni vincolari.*

La forza attiva è la sola forza peso $m\bar{g}$; la [VII.39] si scrive pertanto:

$$|\overline{AC} \times m\bar{g}|_a = I_a \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \text{[VII.40]}$$

La proiezione sull'asse $\hat{a}$ del momento della forza peso vale (vedi eq. [IV.31]):

$$|\overline{AC} \times m\bar{g}|_a = -\, mg\frac{c}{2}\sin\theta\,.$$

Il momento di inerzia I_u rispetto all'asse centrale $\hat{u}$ ortogonale alla piastra per il centro di massa C vale (vedi tab. VII.1)

$$I_u = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)\,;$$

ed usando il teorema di Steiner (eq. [VII.19]) si ricava

$$I_a = I_u + m\cdot(AC)^2 = \frac{m}{12}(b^2+c^2) + m\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{m}{12}(b^2+4c^2)\,.$$

I_a è dunque noto in funzione dei dati del problema. La [VII.40] si scrive dunque

$$-\, mg\frac{c}{2}\sin\theta = I_a\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

e per piccole oscillazioni ($\sin\theta \simeq \theta$):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgc}{2I_a}\theta = 0$$

Questa equazione è formalmente identica alla [IV.33]; la sua soluzione è pertanto formalmente identica alla [IV.34]:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgc}{2I_a}} \qquad \text{[VII.41]}$$

b) Per il calcolo delle reazioni vincolari cominciamo col notare che l'asse $\hat{a}$, essendo parallelo all'asse $\hat{u}$, è un asse principale di inerzia; per conseguenza il momento angolare $\bar{P}_a$ è parallelo all'asse $\hat{a}$. Considerata dunque la proiezione dell'equazione [VII.38b] sul piano ortogonale all'asse

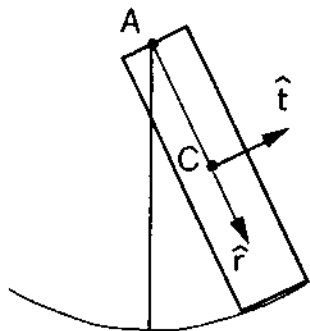
$$\bar{M}_n + \bar{\tau}_n = \frac{d\bar{P}_{an}}{dt}$$

il suo secondo membro è identicamente nullo. Poiché in questo caso anche $\bar{M}_n = 0$ (la forza peso ha momento parallelo all'asse $\hat{a}$), la precedente equazione diviene

$$\bar{\tau}_n = 0$$

Il componente normale all'asse del momento delle reazioni vincolari è nullo.

Per il calcolo del risultante $\bar{R}$ delle reazioni, portiamo l'attenzione sull'equazione [VII.38a]. Proiettando, per comodità, questa equazione sull'asse z ortogonale al piano e sui versori tangenziale $\hat{t}$ e radiale $\hat{r}$ rispetto alla traiettoria del centro di massa C, si ha

$$\begin{cases} F_t + R_t = m a_{ct} \\ F_r + R_r = m a_{cr} \\ F_z + R_z = m a_{cz} \end{cases} \qquad \text{[VII.42]}$$

D'altra parte, essendo $\bar{F} = m\vec{g}$ si ha

$$F_t = -mg\sin\theta; \quad F_r = mg\cos\theta; \quad F_z = 0.$$

Inoltre, poiché il centro di massa C si muove su un arco di circonferenza di raggio $\frac{c}{2}$ si ha:

$$a_{ct} = \frac{c}{2}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{c}{2}\omega_0^2\theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

$$a_{cr} = -\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cdot \frac{c}{2} = -\frac{c}{2}\omega_0^2\theta_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi);$$

$$a_{cz} = 0;$$

per cui in definitiva le relazioni [VII.42] divengono:

$$\begin{cases} -mg\sin\theta + R_t = -\frac{c}{2}m\omega_0^2\theta_0\sin(\omega_0 t + \varphi) \\ mg\cos\theta + R_r = -\frac{c}{2}m\omega_0^2\theta_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ R_z = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} R_t = m(g\sin\theta - \frac{c}{2}\omega_0^2\theta) \\ R_r = m(g\cos\theta - \frac{c}{2}\omega_0^2(\theta_0^2 - \theta^2) \\ R_z = 0 \end{cases}$$

Nello scrivere queste relazioni abbiamo tenuto conto del fatto che $\theta_0\sin(\omega_0 t + \varphi) = \theta$ e che

$$\theta_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \theta_0^2(1 - \sin^2(\omega_0 t + \varphi)) = \theta_0^2 - \theta_0^2\sin^2(\omega t + \varphi) = \theta_0^2 - \theta^2.$$

Notiamo che il moto del sistema analizzato nell'esempio E.VII.10 è indipendente dalla particolare forma geometrica: qualunque corpo girevole senza attrito attorno a un asse orizzontale fisso non passante per il baricentro si comporta allo stesso modo, e le sue piccole oscillazioni dovute alla forza peso sono descritte dalla [VII.41], con $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$, dove d è la distanza fra l'asse e il baricentro, e I è il momento di inerzia rispetto all'asse. Un tale sistema viene detto *pendolo fisico* o *pendolo composto.*

Pendolo fisico

Notiamo anche che ogni qualvolta si abbia a che fare con un sistema a un solo grado di libertà – cosicché la soluzione della legge del moto possa essere ricavata a partire da un'unica equazione dinamica scalare – la cinematica del moto può essere trovata anche a partire dal teorema dell'energia cinetica. Questo approccio è particolarmente conveniente nel caso in cui gli attriti possano essere trascurati, cosicché il teorema dell'energia cinetica si trasforma nel teorema di conservazione dell'energia meccanica. Nel caso particolare del pendolo composto, la soluzione della legge del moto mediante il teorema di conservazione dell'energia procede in maniera del

tutto analoga a quanto abbiamo visto nel par. IV.10 per il pendolo semplice, con l'unica accortezza di sostituire la [VII.21] al posto di $\frac{1}{2}mv^2$ come espressione dell'energia cinetica.

Altri esempi di applicazioni del teorema di conservazione dell'energia al caso di sistemi rigidi verranno descritti nei prossimi paragrafi.

Esempi

E.VII.11. *Un disco omogeneo di massa m e raggio r ruota con velocità angolare ω costante attorno a un asse ĉ orizzontale solidale con esso passante per il centro C; asse che forma un angolo di 30° con la normale n̂ al disco. Determinare il risultante $\vec{R}$ e il momento risultante $\vec{\tau}$ delle reazioni vincolari esplicate dall'asse. Le sollecitazioni agenti sul sistema sono, oltre alla forza peso, una coppia motrice con momento $\vec{M}_m$ costante parallelo all'asse. ($m = 2$ kg; $r = 10$ cm; $\omega = 600\ s^{-1}$; $M_m = 6\ N \cdot m$).*

Poiché l'asse di rotazione (fisso) passa per il centro di massa C, quest'ultimo è e rimane fermo; la sua accelerazione $\vec{a}_c$ è dunque nulla. La equazione [VII.38 a] si scrive pertanto

$$m\vec{g} + \vec{R} = 0$$

da cui

$$\vec{R} = -m\vec{g}.$$

Il modulo del risultante R delle reazioni vincolari vale dunque

$$R = mg = 2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \simeq 20\ \text{N}.$$

Per il calcolo del momento $\vec{\tau}$ usiamo la [VII.38 b]; essendo nullo il momento della forza peso rispetto a C, scegliendo quest'ultimo come polo per i momenti, la suddetta equazione si scrive

$$\vec{M}_m + \vec{\tau} = \frac{d\vec{P}_c}{dt} \qquad \text{[VII.43]}$$

Proiettando sull'asse $\hat{c}$, quest'equazione diviene (usando la [VII.8]:

$$M_m + \tau_c = I_c\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \text{(essendo } \omega \text{ costante)}$$

e quindi

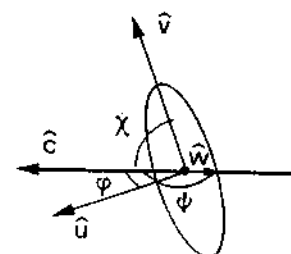
$$\tau_c = -M_n$$

Il momento parallelo all'asse delle reazioni vincolari (momento di attrito) è uguale e opposto al momento della coppia motrice; esso vale in modulo $|\tau_n| = 6 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$. Proiettando la [VII.43] sul piano ortogonale all'asse (e tenuto conto che $\vec{M}_m$ è parallelo ad esso) si ha

$$\vec{\tau}_n = \frac{d\vec{P}_{cn}}{dt}$$

Per calcolare il modulo $|\vec{\tau}_n|$ di $\vec{\tau}_n$ che ci interessa, basta dunque calcolare il modulo $\left|\frac{d\vec{P}_{cn}}{dt}\right|$ che secondo la [VII.17] è dato da:

$$|\tau_n| = \left|\frac{d\vec{P}_{cn}}{dt}\right| = \omega\sqrt{|\bar{I}|^2 - I_c^2}$$

Prendiamo come assi centrali gli assi $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$ indicati in figura: l'asse $\hat{u}$, ortogonale al disco, forma con $\hat{c}$ un angolo $\varphi = 30°$; l'asse $\hat{v}$ è definito dalla intersezione del piano $\hat{u}\hat{c}$ col piano del disco, e forma con $\hat{c}$ un angolo $\chi = 60°$; l'asse $\hat{w}$, ortogonale a $\hat{v}$ nel piano del disco, forma con $\hat{c}$ un angolo $\psi = 90°$. (Gli assi $\hat{v}$ e $\hat{w}$, fra di loro ortogonali, potrebbero essere presi con qualunque orientamento nel piano del disco, e ciò non modificherebbe il nostro risultato finale). Tenuto conto della espressione dei momenti centrali di inerzia per un disco omogeneo (vedi tabella VII.1), le grandezze che caratterizzano $|\bar{I}|$ e I_c per il nostro disco (eq. VII.11 e VII.14) sono quelle contenute nella seguente tabellina:

$$I_u = 1/2\, m r^2 \qquad \cos\varphi = \sqrt{3}/2$$
$$I_v = 1/4\, m r^2 = 1/2\, I_u \qquad \cos\chi = 1/2$$
$$I_w = 1/4\, m r^2 = 1/2\, I_u \qquad \cos\psi = 0$$

Si ha dunque:

$$|\bar{I}|^2 = I_u^2\cos^2\varphi + I_v^2\cos^2\chi + I_w^2\cos^2\psi =$$
$$= I_u^2\cdot\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}I_u\right)^2\cdot\frac{1}{4} + I_w^2\cdot 0 = \frac{13}{16}I_u^2$$

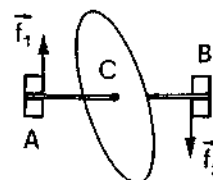
$$I_c = I_u\cos^2\varphi + I_v\cos^2\chi + I_w\cos^2\psi =$$
$$= I_u\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}I_u\cdot\frac{1}{4} + I_w\cdot 0 = \frac{7}{8}I_u$$

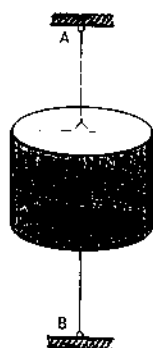
La [VII.17] si scrive dunque nel nostro caso

$$\left|\frac{d\vec{P}_{cn}}{dt}\right| = \omega^2\sqrt{|\bar{I}|^2 - I_c^2} = \omega^2\sqrt{I_u^2\frac{13}{16} - I_u^2\frac{49}{64}} =$$
$$= \omega^2 I_u\sqrt{\frac{3}{64}} = \omega^2\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}\, m r^2\omega^2}{16}$$

Numericamente:

$$|\vec{\tau}_n| = \left|\frac{d\vec{P}_{cn}}{dt}\right| = \frac{\sqrt{3}}{16}\, 2\cdot\text{kg}\cdot(0{,}1)^2\,\text{m}^2\cdot(600)^2\,\text{s}^{-2} \simeq 780\ \text{N}\cdot\text{m}\,.$$

Questo momento è esercitato da una coppia di forze $\vec{f}_1$ ed $\vec{f}_2$ ruotanti esplicate dai supporti A e B; se ad esempio i due supporti distano fra di loro $l = 10$ cm $= 0{,}1$ m, ognuna delle due forze $\vec{f}_1$ ed $\vec{f}_2$ ha modulo $f = \dfrac{780\ \text{N}\cdot\text{m}}{0{,}1\ \text{m}} = 7800$ N. In questo esempio, le sollecitazioni dovute al disassamento sono largamente dominanti rispetto al peso ($\sim$ 20 N); va inoltre considerato che si tratta di forze rotanti che dunque sollecitano intermittentemente ogni punto dei supporti. Sollecitazioni di questo tipo vengono dette «sollecitazioni a fatica», e sono particolarmente dannose, per il logoramento che inducono nelle parti meccaniche di una macchina.

Sollecitazioni a fatica

Pendolo di torsione

E.VII.12. *Un cilindro omogeneo retto è costretto a mantenere verticale il proprio asse $\hat{u}$ mediante un filo di acciaio teso fra due vincoli fissi A e B che ne bloccano gli estremi. Ruotando inizialmente il cilindro di un angolo θ_0 intorno all'asse $\hat{u}$ e abbandonandolo da fermo, esso prende ad oscillare intorno al suo asse in virtù del momento assiale di richiamo elastico $M = -c\theta$ con cui il filo reagisce alla torsione. Determinare la legge del moto, e calcolare il risultante $\vec{R}$ e il momento risultante τ_n delle reazioni vincolari ortogonalmente all'asse.*

La legge del moto può essere determinata usando la proiezione assiale (verticale) della [VII.38b]; equazione che si scrive in questo caso semplicemente:

$$-c\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{I}\theta = 0$$

Questa equazione, formalmente identica alla [IV.33], ammette come soluzione (con le condizioni iniziali del nostro problema, $\theta(0) = \theta_0$ e $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$):

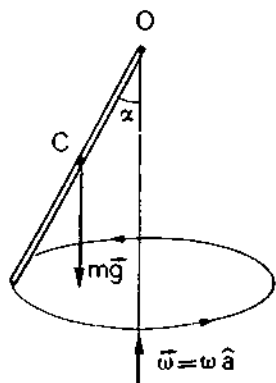
$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{I}}\,.$$

Per il calcolo delle reazioni vincolari, usiamo come al solito la [VII.38a] e la componente sul piano normale all'asse della [VII.38b]. Nel caso del pendolo di torsione, queste equazioni si scrivono:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{R} = m\dfrac{d\vec{v}_c}{dt} = 0 & \text{(il centro di massa è fermo)} \\ \vec{\tau}_n = \dfrac{d\vec{P}_{un}}{dt} = 0 & \text{(l'asse di rotazione } \hat{u} \text{ è asse centrale di inerzia)} \end{cases}$$

da cui:

$$\vec{R} = -m\vec{g}$$
$$\vec{\tau}_n = 0$$

Nel caso del pendolo di torsione, il sistema ruota dunque comunque intorno all'asse verticale, senza bisogno che la direzione dell'asse venga mantenuta meccanicamente bloccata. In effetti, il pendolo di torsione può essere realizzato anche appendendo semplicemente il cilindro omogeneo, mediante un unico filo, al supporto A.

E.VII.13. *Una sbarretta omogenea di lunghezza l e massa m può ruotare liberamente senza attrito attorno a un asse orizzontale su un piano perpendicolare all'asse. L'asse ruota a sua volta, con velocità angolare ω, attorno a un asse verticale (vedi figura). Determinare l'angolo α, rispetto alla verticale, a cui la sbarretta si dispone.*

Il problema può essere risolto usando il modulo della componente normale all'asse della equazione [VII.28b]. Scegliendo come polo il punto O, è nullo il momento della reazione vincolare $\vec{\tau}$, per cui si ha:

$$\left|\frac{d\vec{P}_n}{dt}\right| = |\vec{M}_P| = M_P$$

dove M_P è il modulo del momento della forza peso (anch'esso ortogonale all'asse) che vale $M_P = mg\frac{l}{2}\sin\alpha$. D'altra parte, secondo la [II.37] è $\left|\frac{d\bar{P}_n}{dt}\right| = \omega P_n$ (dove con P_n abbiamo indicato il modulo di $\vec{P}_n$), per cui la precedente relazione diviene

$$\omega P_n = mg\frac{l}{2}\sin\alpha \qquad \text{[VII.44]}$$

Calcoliamo ora P_n in funzione dei parametri cinematici del nostro sistema.
Chiamando $\hat{u}\ \hat{v}\ \hat{w}$ gli assi centrali di inerzia della sbarretta, così come indicato in figura, si ha

$$I_u = \frac{ml^2}{12} \qquad \varphi = \pi/2 - \alpha \qquad \cos\varphi = \sin\alpha$$

$$I_v = \frac{ml^2}{12} \qquad \chi = \pi/2 \qquad \cos\chi = 0$$

$$I_w = 0 \qquad \psi = \alpha \qquad \cos\psi = \cos\alpha$$

Per cui si ha:

$$|\bar{I}| = I_u\cos\varphi = \frac{ml^2}{12}\sin\alpha \qquad \text{(vedi eq. [VII.11])}$$

$$I_c = I_u\cos^2\varphi = \frac{ml^2}{12}\sin^2\alpha \qquad \text{(vedi eq. [VII.14])}$$

e dunque (vedi eq. [VII.15]):

$$\cos\gamma = \frac{I_c}{|\bar{I}|} = \cos\varphi = \sin\alpha\,.$$

Il momento angolare $\bar{P}$ della sbarretta è dunque parallelo ad $\hat{u}$: $\bar{P} = P\cdot\hat{u}$. Per calcolare il modulo P di $\bar{P}$, osserviamo che $P = \frac{P_a}{\cos\gamma} = \frac{P_a}{\sin\alpha}$, per cui il calcolo di P è ricondotto al calcolo della proiezione P_a di $\bar{P}$ sull'asse $\hat{a}$. Per la [VII.8] si ha

$$I_a = I_{a'} + m\,d_c^2 = I_{a'} + m\left(\frac{l}{2}\sin\alpha\right)^2$$

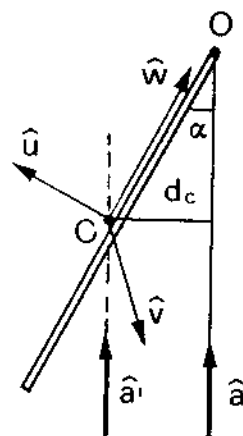
dove $I_{a'}$ è il momento di inerzia della sbarretta rispetto all'asse baricentrale $\hat{a}'$ parallelo ad $\hat{a}$, che per la [VII.14] vale:

$$I'_a = I_u\cos^2\varphi = I_u\sin^2\alpha = \frac{ml^2}{12}\sin^2\alpha$$

Dunque

$$I_a = \frac{ml^2}{12}\sin^2\alpha + m\left(\frac{l}{3}\sin\alpha\right)^2 = \frac{ml^2}{3}\sin^2\alpha$$

[illegible] cui $P_a = I_a\omega = \frac{ml^2}{3}\sin^2\alpha\cdot\omega$ e dunque infine:

$$P = \frac{P_a}{\sin\alpha} = \frac{ml^2}{3}\sin\alpha\cdot\omega\,.$$

Possiamo ora calcolare $P_n = P \sin\gamma = P \cos\alpha = \frac{m l^2}{3} \cdot \omega \sin\alpha \cos\alpha$. Inserendo questo valore di P_n nella [VII.44] si ha:

$$\frac{m l^2}{3} \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha = m g \frac{l}{2} \sin\alpha$$

relazione che risolve il nostro problema.

Osserviamo che in questo caso la soluzione poteva essere trovata più speditamente ponendosi in un sistema di riferimento (non inerziale) rotante con velocità angolare ω, col che il problema si riduce a un problema di equilibrio relativo. In tale sistema di riferimento rotante, le forze attive agenti sul sistema sono la forza peso e la forza (apparente) centrifuga; per cui scegliendo come polo il punto O (rispetto a cui è nullo il momento della reazione vincolare) si ha la condizione di equilibrio:

$$M_p + M_c = 0$$

dove M_p e M_c sono i momenti della forza peso e della forza centrifuga, che sono stati scritti in termini scalari poiché l'unica loro componente diversa da zero è quella ortogonale al piano definito dalla sbarretta e dall'asse $\hat{a}$ di rotazione.

Calcoliamo ora il momento M_c della forza centrifuga.

L'elemento dx della sbarretta subisce la forza centrifuga

$$d\vec{f}_c = dm\, \omega^2 \vec{d} = dm\, \omega^2 x \sin\alpha\, \hat{d}$$

dove $\hat{d}$ è il versore di $\vec{d}$. Scriviamo ora dm in fuzione di dx usando la [VI.22]:

$$dm = \lambda\, dx = \frac{m}{l}\, dx\,,$$

per cui

$$d\vec{f}_c = \omega^2 x \sin\alpha \frac{m}{l}\, dx\, \hat{d}\,.$$

Il momento di questa forza $d\vec{m}_c$ rispetto al polo O vale in modulo

$$dm_c = x \cdot df_c \cdot \sin\beta = x \cdot df_c \cdot \cos\alpha = \omega x^2 \sin\alpha \cos\alpha \frac{m}{l}\, dx$$

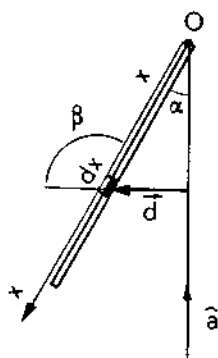
e dunque

$$M_c = \int dm_c = \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \frac{m}{l} \int_0^l x^2\, dx = \omega^2 \frac{l^2}{3}\, m \sin\alpha \cos\alpha\,.$$

Tenuto conto che il momento della forza peso è $M_p = -\, m g \frac{l}{2} \sin\alpha$, la condizione di equilibrio $M_p + M_c = 0$ si traduce in

$$\omega^2 \frac{l^2}{3}\, m \sin\alpha \cos\alpha - m g \frac{l}{2} \sin\alpha = 0$$

da cui

$$\cos\alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{\omega^2 l}$$

E.VII.14. *Una pallina puntiforme di massa m, appoggiata a un piano orizzontale privo di attrito, ruota con velocità angolare ω_0 attorno a un punto O, cui è vincolata da un filo flessibile di lunghezza l.*
a) Se la pallina viene tratta, da una opportuna forza che tira il filo, verso il punto O, con quale velocità angolare ω ruota quando il raggio della traiettoria circolare si è ridotto a l/2?
b) Se invece il filo si avvolge attorno a un piolo centrale, cosicché la pallina compie una spirale avvicinandosi al centro, quale è la sua velocità angolare ω, ancora quando la distanza da O si è ridotta a l/2?

a) La forza che trae la pallina verso il centro è centrale, per cui è nullo il suo momento rispetto a O; e dunque si conserva il momento angolare:

$$m\omega_0 l^2 = m\omega\left(\frac{l}{2}\right)^2 \quad \text{da cui} \quad \omega = 4\omega_0$$

Notare che alla fine la pallina ha energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m\,16\,\omega_0^2\frac{l^2}{4} = 4\left(\frac{1}{2}m\omega_0^2 l^2\right) = 4\cdot\frac{1}{2}mv_0^2$$

cioè quadrupla rispetto a quella iniziale: l'aumento di energia cinetica è avvenuto per conseguenza del lavoro compiuto dalla forza che ha tratto il filo verso il centro.

b) In questo caso il filo non è diretto rigorosamente verso il centro O; la forza non è centrale, e dunque non si conserva il momento angolare. Si conserva invece l'energia cinetica, perché la forza esercitata dal filo è sempre ortogonale alla velocità, e dunque non compie alcun lavoro. Si ha dunque:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2; \quad \text{ovvero} \quad v_0 = v, \quad \text{cioè} \quad \omega_0 l = \omega\frac{l}{2};$$

da cui

$$\omega = 2\omega_0$$

VII.9. Moto di rotolamento

Moto di una ruota

Questo tipo di moto è quello compiuto da una ruota circolare (sia r il suo raggio) che rotola senza strisciare a contatto con la strada: il sistema ruota con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\hat{u}$ intorno all'asse principale di inerzia $\hat{u}$ passante per il suo centro di massa C ortogonale alla ruota, e nello stesso tempo il centro di massa si muove rispetto al terreno con velocità $\vec{v}_c$ ortogonale all'asse e parallela al terreno stesso.

Se non striscia, la ruota costituisce un sistema a un sol grado di libertà

Benché il sistema (che per semplicità schematizziamo come un disco piano) sia dotato di moto di rotazione intorno a un asse che a sua volta trasla, esso è dotato di un solo grado di libertà. Infatti, per conseguenza del fatto che il punto A della ruota a contatto col terreno non striscia (dunque è, istante per istante, fermo rispetto al terreno), la velocità angolare ω della ruota e la velocità $\vec{v}_c$ dell'asse (e dunque del centro di massa della ruota) non sono fra di loro indipendenti, ma sono legati dalla relazione:

$$\omega r = v_c \qquad \text{[VII.45]}$$

ovvero, in termini vettoriali

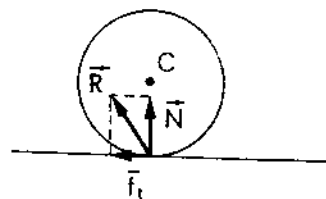
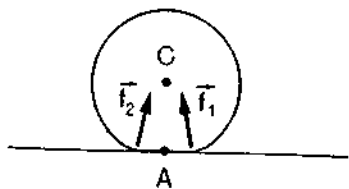
$$\vec{r}\times\vec{\omega} = \vec{v}_c \qquad \text{[VII.45 a]}$$

Che ω e v_c siano legati dalla [VII.45] è facilmente comprensibile anche intuitivamente, sia ponendosi dal punto di vista solidale a C (nel qual caso si vede la periferia della ruota, e con essa il terreno, procedere con velocità ωr), che dal punto di vista solidale ad A (nel qual caso si vede il sistema che ruota con velocità angolare ω intorno al punto A, che pur essendo da istante a istante diverso, è in ogni istante fermo). In base a questi stessi ragionamenti, si conclude che il punto B, diametralmente opposto ad A, si muove con velocità $v_B = 2r\omega = 2v_c$.

Poiché la ruota è un sistema a un sol grado di libertà, basta una sola equazione dinamica, opportunamente scelta, per determinare la legge del moto; le altre equazioni dinamiche possono essere usate per calcolare le reazioni vincolari. Va notato che usualmente la ruota è costruita in modo che l'asse di rotazione sia un suo asse centrale di inerzia (e noi supporremo di trovarci sempre in queste condizioni); ciò annulla tutte le sollecitazioni vincolari rotanti che abbiamo discusso nel par. VII.2, facilitando così il calcolo – quando ciò interessi – delle reazioni vincolari.

Assenza di attrito volvente

Il caso più semplice si presenta quando il vincolo può essere considerato perfetto, cioè quando è trascurabile l'attrito volvente (vedi par. V.9.3). In questo caso la soluzione della legge del moto può essere ottenuta ricorrendo al teorema di conservazione dell'energia; ovvero anche usando la seconda equazione cardinale.

$$\bar{M}^{(e)} = \frac{d\bar{P}}{dt} \qquad \text{[VII.46]}$$

In assenza di attrito volvente, infatti, non solo le forze di attrito non compiono alcun lavoro, cosicché il lavoro, compiuto da sole forze conservative, è esprimibile in termini di variazione dell'energia potenziale; ma si ha anche che, rispetto al punto A assunto come polo (fisso), è nullo il momento della reazione vincolare $\bar{R}$, cosicché l'unico momento che compare al primo membro della [VII.46] resta il momento (noto) delle forze attive.

Presenza di attrito volvente

Va notato che in presenza di attrito volvente, quest'ultimo esercita un momento non nullo, e ciò rende meno immediato l'uso dell'eq. [VII.46] per la soluzione della legge del moto.

Per contro, anche in presenza di attrito volvente è abbastanza usuale che si conosca la reazione vincolare normale $\bar{N}$. Ciò consente di calcolare, tramite la [V.71], la forza tangenziale di attrito volvente e dunque anche il suo lavoro; la legge del moto può essere ricavata ancora facilmente, in questo caso, ricorrendo al teorema dell'energia cinetica.

Esempi

E.VII.15. *Un anello, di massa m e raggio r, rotola senza strisciare, partendo da fermo, lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha_0 = 30°$. a) Determinare la legge del moto. b) Se $\mu = 0,3$ è il coefficiente di attrito, quale è il massimo angolo α di inclinazione oltre il quale il cerchio comincia a scivolare? Si trascuri l'attrito volvente.*

a) Usando il teorema di conservazione dell'energia si ha (indicando con K l'energia cinetica):

$$mgh + K = mgh_0 + K_0 \qquad \text{[VII.47]}$$

Inizialmente, l'oggetto è fermo ($K_0 = 0$); nella posizione generica (individuata dalla coordinata x lungo il piano inclinato con origine nella posizione iniziale) indicando con $v = \frac{dx}{dt}$ la velocità del centro di massa e con ω la velocità angolare dell'anello, usando l'equaz. [VII.21] si ha:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} (m r^2) \cdot \frac{v^2}{r^2} = m v^2$$

Abbiamo tenuto conto del fatto che il momento di inerzia dell'anello (rispetto a un asse baricentrale) vale $m r^2$; e della [VII.45] secondo cui $\omega = \frac{v}{r}$. Si ha inoltre $h = h_0 - x \sin\alpha$. Sostituendo nella [VII.47]

$$m g (h_0 - x \sin\alpha) + m v^2 = m g h_0$$

da cui

$$m v^2 = m g x \sin\alpha$$

Derivando questa relazione, si ha

$$\left(\text{indicando con } a \text{ l'accelerazione } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}\right):$$

$$2 m v a = m g v \sin\alpha$$

e quindi

$$a = g \frac{\sin\alpha}{2} \qquad \text{[VII.48]}$$

Si tratta di un moto uniformemente accelerato con accelerazione $a = g \frac{\sin\alpha}{2}$; la legge del moto (con velocità iniziale nulla) è pertanto data da

$$x = \frac{1}{2} a t^2 = g \frac{\sin\alpha}{4} t^2$$

La legge del moto poteva essere determinata anche usando la seconda equazione cardinale

$$\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad \text{[VII.49]}$$

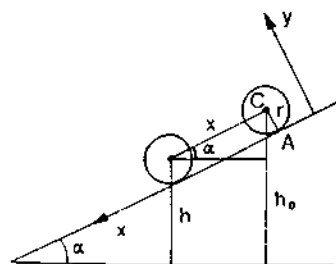
Rispetto al polo A (e considerato che, essendo il problema piano, la [VII.49] può essere scritta scalarmente avendo come unica componente diversa da zero quella ortogonale al piano)

$$M^{(e)} = m g r \sin\alpha$$

e usando l'eq. [VII.24]

$$P = m v r + I \omega = m v r + m r^2 \frac{v}{r} = 2 m v r$$

e quindi

$$\frac{dP}{dt} = 2 m a r$$

Sostituendo nella [VII.49]

$$mgr\sin\alpha = 2mar; \quad \text{cioè} \quad g\sin\alpha = 2a$$

che coincide con la [VII.48].

b) Usando la prima equazione cardinale, si ha:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = m\vec{a}$$

Le forze agenti sono la forza peso e la reazione vincolare $\vec{R}$; dunque

$$m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Proiettando sugli assi x e y (e tenuto conto della [VII.48]):

$$\begin{cases} mg\sin\alpha + f_t = ma = mg\dfrac{\sin\alpha}{2} \\ -mg\cos\alpha + N = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} f_t = -mg\sin\alpha + mg\dfrac{\sin\alpha}{2} = -mg\dfrac{\sin\alpha}{2} \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

Facendo il rapporto membro a membro fra queste due relazioni, la condizione $\dfrac{|f_t|}{N} \leq \mu$ si traduce in questo caso in

$$\frac{|f_t|}{N} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} \leq \mu; \quad \text{dunque} \quad \operatorname{tg}\alpha \leq 2\mu = 0{,}6 \,.$$

E.VII.16. *Un disco omogeneo di massa m e raggio r procede lungo un piano inclinato di un angolo α, in presenza di attrito volvente (con coefficiente $\mu_v = 0{,}10$). Determinare la legge del moto.*

La [VII.47] va completata per tener conto, oltreché del lavoro della forza peso che può essere espresso in termini di variazione di energia potenziale, anche del lavoro della forza di attrito f_t. In conclusione, il teorema della energia cinetica viene ad assumere, nel nostro caso, la seguente espressione:

$$mg\sin\alpha \cdot x - f_t \cdot x = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{v^2}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

Usando la [V.71] si ha inoltre

$$f_t = \mu_v N = \mu_v mg\cos\alpha$$

per cui la precedente relazione diviene

$$mg\sin\alpha \cdot x - \mu_v mg\cos\alpha \cdot x = \frac{3}{4}mv^2$$

derivando questa relazione si ricava immediatamente

$$(mg \sin\alpha - \mu_v\, mg \cos\alpha)\, v = \frac{3}{2}\, m v\, a$$

da cui si ricava per l'accelerazione a l'espressione:

$$a = \frac{2}{3}\, g\, (\sin\alpha - \mu_v \cos\alpha)$$

Si tratta ancora una volta, come si vede, di un moto uniformemente accelerato.

VII.10. Moto di sistemi rigidi a contatto con vincoli

Nel paragrafo V.8 abbiamo introdotto un metodo generale che consente di trattare il moto di un punto materiale che si muove a contatto con dei vincoli; metodo che, in assenza di attriti, definisce univocamente una procedura che, almeno nel caso di geometrie semplici per i vincoli, non implica particolari difficoltà di soluzione.

Il problema è concettualmente più semplice nel caso di vincoli bilaterali, che introducono delle relazioni geometriche ben definite fra i parametri che descrivono il moto.

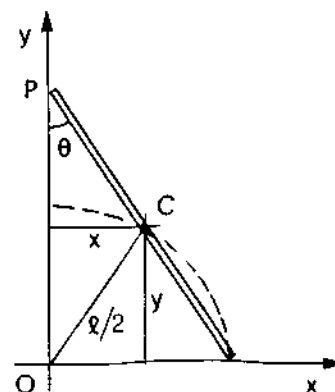
Condizione perché il moto avvenga a contatto col vincolo

Nel caso di vincoli unilaterali, abbiamo visto che conviene affrontare il problema ipotizzando in prima istanza che il vincolo sia bilaterale, e calcolando in tale ipotesi la reazione vincolare N proiettata sulla normale uscente dal vincolo; fino a che $N \geq 0$ il punto si muove a contatto col vincolo anche qualora questo sia unilaterale, mentre quando $N < 0$ il punto perde contatto col vincolo unilaterale e si muove, di lì in poi, liberamente.

Lo stesso metodo può essere usato per trattare i sistemi rigidi; l'unica differenza, non concettuale ma solo pratica, è che il sistema ha potenzialmente sei (anziché tre) gradi di libertà, e in corrispondenza si dispone delle sei equazioni scalari rappresentate dalle equazioni cardinali. Per ogni incognita cinematica eliminata al secondo membro di queste equazioni dalle condizioni vincolari, viene introdotta una incognita dinamica al primo membro; ma il numero complessivo di incognite resta comunque pari al numero di equazioni indipendenti, cosicché il problema ammette sempre – a parte le difficoltà matematiche che ciò possa comportare – soluzione univoca.

A proposito dei sistemi rigidi, ci limitiamo qui a discutere un esempio che può essere illustrativo del modo generale di procedere.

Esempio

E.VII.17. *Una scala di massa m e lunghezza l, schematizzata qui come una sbarretta omogenea, è appoggiata verticalmente a un muro. Né il muro né il pavimento presentano apprezzabile attrito. Partendo da ferma la scala comincia a scivolare. a) Supponendo in prima istanza che il punto P di appoggio col muro sia vincolato a non staccarsi dal muro stesso (vincolo bilaterale) determinare la velocità angolare ω_f con cui la scaletta va a sbattere sul pavimento. b) Se il punto P è semplicemente appoggiato (vincolo unilaterale) determinare il valore dell'angolo θ per il quale la scala perde contatto dal muro.*

a) Il sistema ha un solo grado di libertà. Non essendo presenti attriti, la legge del moto può essere ricavata usando il teorema di conservazione dell'energia; poiché l'unica forza attiva è la forza peso, questo si scrive

$$mgy + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = mgy_0 + \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I\omega_0^2$$

dove y indica la coordinata verticale del baricentro C, v la sua velocità e ω la velocità angolare della sbarretta. I è il momento di inerzia baricentrale $\left(I = \frac{ml^2}{12}\right)$. Inizialmente si ha: $y_0 = l/2$; $v_0 = \omega_0 = 0$; per cui la precedente equazione diviene:

$$mgy + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = mg\, l/2\,. \qquad [VII.49]$$

Poiché il sistema ha un solo grado di libertà, le quantità cinematiche y, v e ω possono essere espresse in funzione di un solo parametro (e delle sue derivate); ad esempio in funzione di θ. Si ha:

$$\begin{cases} x = (l/2)\sin\theta \\ y = (l/2)\cos\theta \end{cases} \text{da cui derivando} \begin{cases} v_x = (l/2)\cos\theta \dfrac{d\theta}{dt} = (l/2)\cos\theta\cdot\omega \\ v_y = -(l/2)\sin\theta \dfrac{d\theta}{dt} = -(l/2)\sin\theta\cdot\omega \end{cases} \qquad [VII.50]$$

da cui

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{l}{2}\cos\theta\cdot\omega\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\sin\theta\cdot\omega\right)^2 = \frac{l^2\omega^2}{4}$$

Sostituendo nella [VII.49]:

$$mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{2} m\frac{l^2\omega^2}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{12}\right)\cdot\omega^2 = mg\, l/2$$

da cui

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(1-\cos\theta) \qquad [VII.51]$$

che esprime la velocità angolare in funzione della posizione, e dunque in sostanza risolve la legge del moto. Ponendo nella [VII.51] $\theta = \pi/2$ si ha la velocità angolare ω_f con cui la scala sbatte contro il pavimento:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

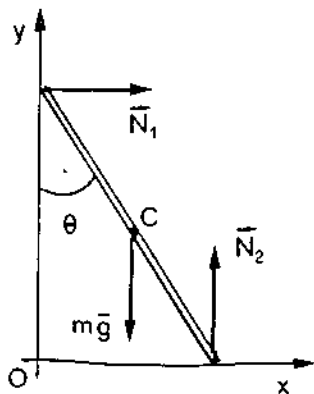
Notiamo, fra parentesi, che essendo

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2\sin^2\theta + \left(\frac{l}{2}\right)^2\cos^2\theta = \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \text{costante},$$

il centro di massa C compie un arco di traiettoria circolare così come indicato dalla linea tratteggiata in figura.

b) La condizione affinché la scala non perda il contatto è che sia $N_1 \geq 0$. N_1 può essere determinato dalla prima equazione cardinale (componente x), considerato che il secondo membro di tale equazione

$$N_1 = ma_x \qquad [VII.52]$$

ci è noto, essendo risolta dalla [VII.51] la legge del moto.

Derivando la prima delle [VII.50] si ha infatti

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{l}{2}\cos\theta \cdot \frac{d\omega}{dt} - \frac{l}{2}\sin\theta \cdot \omega^2 \qquad \text{[VII.53]}$$

ω^2 è dato dalla [VII.51]; e $\frac{d\omega}{dt}$ può essere ricavato derivando la [VII.51] stessa:

$$2\omega\frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{l}\sin\theta \cdot \omega \quad \text{da cui} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

Sostituendo questa espressione per $\frac{d\omega}{dt}$ e la [VII.51] per ω^2 nella [VII.53] si ha

$$a_x = \frac{3g}{2}\sin\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta - 1\right)$$

Per cui la [VII.52] diviene in definitiva

$$N_1 = m\frac{3g}{2}\sin\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta - 1\right)$$

Tenuto conto che θ è compreso fra 0 e $\pi/2$, si ha $\sin\theta \geq 0$; per cui la condizione $N_1 \geq 0$ si riduce a $\frac{3}{2}\cos\theta - 1 \geq 0$, cioè in definitiva

$$\cos\theta \geq \frac{2}{3}.$$

VII.11. Sistemi composti da più sistemi rigidi fra di loro collegati

Capita spesso di avere a che fare con sistemi composti da più parti (ciascuna delle quali può essere considerata come un sistema rigido) fra loro meccanicamente collegate in modo che il moto di ogni parte non è completamente indipendente (o è addirittura completamente determinato) dal moto di altre parti. Ciò capita in particolare per molte macchine. Ad esempio una bicicletta è formata da un telaio, da un manubrio rigidamente collegato alla forcella della ruota anteriore, da due ruote, dai pedali: in condizioni usuali, cioè quando le ruote rotolano senza strisciare sul terreno il moto di ciascuna di queste parti è tutt'altro che indipendente dal moto delle altre parti.

La determinazione della legge del moto può allora risultare in questi casi notevolmente complicata dal punto di vista matematico; non di rado capita che si sia interessati anche a calcolare le sollecitazioni vincolari cui sono sottoposte le varie parti del sistema, e ciò rende ancor più elaborata la soluzione. Tuttavia, almeno in assenza di attriti, l'impostazione del problema può procedere attraverso una metodologia piuttosto ben definita, seguendo la quale si superano con relativa facilità le difficoltà concettuali e si resta alle prese con le sole difficoltà matematiche.

I passi della procedura sono i seguenti:

Conteggio dei gradi di libertà

a) Si fa il conteggio del numero n di gradi di libertà che caratterizzano il sistema. Di solito n è un numero relativamente piccolo, che diffi-

cilmente supera qualche unità. Il numero n può essere scritto in generale come:

$$n = N - m \qquad \text{[VII.54]}$$

dove N è la somma del numero di gradi di libertà delle varie parti del sistema (considerate capaci di muoversi l'una indipendentemente dall'altra); ed m è il numero di relazioni geometriche che legano fra di loro questi N parametri.

Ricerca di tante equazioni dinamiche indipendenti quanti sono i gradi di libertà

b) Si cercano n equazioni dinamiche fra di loro indipendenti relative al moto del sistema nel suo complesso. Queste equazioni avranno al loro primo membro (che comprende le quantità dinamiche) solo le sollecitazioni applicate *dall'esterno* al sistema; non comprenderanno invece – in virtù del terzo principio della dinamica – le forze che mutuamente si scambiano le parti del sistema.

c) In generale, le n equazioni dinamiche trovate comprendono al secondo membro gli N parametri cinematici che descrivono il moto delle varie parti del sistema, o un certo numero di essi. Usando le m relazioni geometriche che legano fra di loro tali parametri, si eliminano quelli ridondanti, cosicché nelle equazioni compaiano tanti parametri quanti sono quelli necessari a descrivere il moto del sistema. Le n equazioni comprendono a questo punto n incognite cinematiche.

Risoluzione delle equazioni dinamiche

d) Si risolve il sistema delle n equazioni dinamiche: risultano a questo punto esplicitamente note le leggi del moto del sistema. Conosciamo cioè a questo punto come gli n parametri che descrivono la posizione del sistema variano col tempo.

Usando le relazioni geometriche, si possono trovare anche le leggi orarie relative agli altri m parametri necessari per descrivere il moto di ciascuna delle parti di cui il sistema è costituito.

Calcolo delle reazioni vincolari

e) Se serve, si possono determinare ora le sollecitazioni dinamiche interne (reazioni vincolari) cui sono sottoposte le parti del sistema. Scrivendo infatti le equazioni dinamiche relative al moto di ogni parte del sistema, queste equazioni comprendono al primo membro le reazioni vincolari incognite; mentre il loro secondo membro ci è noto, essendo ormai stata determinata una volta per tutte la legge del moto per ogni parte del sistema. Queste equazioni dinamiche possono dunque essere usate per ricavare le reazioni vincolari incognite.

Questa procedura, enunciata in termini generali così come noi abbiamo fatto, può apparire complessa. In realtà nella maggior parte dei casi pratici essa risulta ragionevolmente semplice, così come viene illustrato nei due esempi che seguono.

Esempi

E.VII.18. *Consideriamo il sistema rappresentato in figura, costituito da due masse M ed m ($M > m$) collegate fra loro da un filo flessibile e inestensibile di massa trascurabile; e da una carrucola di massa μ e raggio r, appesa a un punto fisso, che sostiene il filo. Si supponga che il filo non scivoli sulla carrucola, ma si trascuri il lavoro compiuto dalle reazioni vincolari (vincoli perfetti). Determinare la legge del moto, e le tensioni $\vec{\tau}$ e $\vec{T}$ esercitate dal filo sulle masse m ed M.*

Il sistema ha un solo grado di libertà, e quindi la legge del moto può essere ricavata a partire da una sola equazione dinamica. Considerato che gli attriti non compiono lavoro, conviene usare il teorema di conservazione dell'energia, che scriveremo nella forma:

$$U_0 - U = K - K_0$$

dove U e K sono energia potenziale ed energia cinetica nella posizione generica e U_0 e K_0 sono energia potenziale ed energia cinetica nella posizione iniziale. Per il nostro sistema questa equazione si specifica nella forma (tenendo conto che $K_0 = 0$):

$$Mg\,(Y_0 - Y) + mg\,(y_0 - y) = \frac{1}{2}\,MV^2 + \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,I\omega^2 \qquad \text{[VII.55]}$$

dove Y e y son le quote di M ed m rispettivamente (Y_0 e y_0 i rispettivi valori iniziali); V la velocità di M e v la velocità di m; $\omega = d\theta/dt$ la velocità angolare della carrucola e I il suo momento di inerzia (Porremo $I = (1/2)\,\mu r^2$, supponendo che la carrucola sia costruita come un disco omogeneo). Come si vede, in questa equazione compaiono, direttamente e/o tramite le derivate, i parametri cinematici y, Y e θ che descrivono la posizione delle varie parti del sistema. Tuttavia – essendo il sistema a un sol grado di libertà – questi parametri devono essere fra di loro legati da due relazioni geometriche, cosicché essi si riducono a un sol parametro indipendente. Si ha infatti, come è facile vedere:

$$\Delta Y = Y - Y_0 = y_0 - y = -\Delta y \quad \text{da cui anche } v = -V$$

$$-\Delta Y = +\Delta y = \Delta\theta \cdot r \quad \text{da cui anche } \omega = -\frac{v}{r} = +\frac{V}{r}.$$

Sostituendo nella [VII.55], questa diviene:

$$(M - m)g\,(Y_0 - Y) = \frac{1}{2}\,MV^2 + \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(M + m + \frac{1}{2}\,\mu\right)V^2$$

da cui derivando (e chiamando $A = \dfrac{dV}{dt}$ l'accelerazione di M):

$$-(M - m)g\,V = \frac{2V}{2}\left(M + m + \frac{1}{2}\,\mu\right)A$$

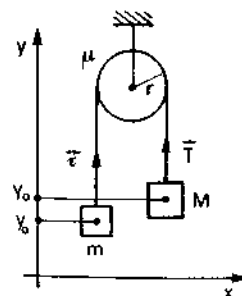
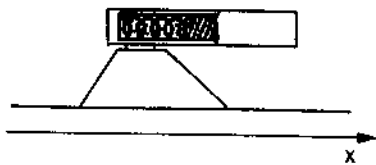
risolvendo rispetto ad A:

$$A = -\frac{(M - m)g}{M + m + (1/2)\,\mu}$$

Si tratta dunque di un moto uniformemente accelerato. Notare che la massa m avrà accelerazione $a = -A = \dfrac{(M - m)g}{M + m + (1/2)\,\mu}$.

Le tensioni τ e T possono essere calcolate scrivendo la prima equazione cardinale per m ed M rispettivamente. Si ha infatti:

$$-Mg + T = MA = -M\frac{(M - m)g}{M + m + (1/2)\,\mu} \quad \text{da cui} \quad T = Mg\frac{2m + (1/2)\,\mu}{M + m + (1/2)\,\mu}$$

$$-mg + \tau = ma = m\frac{(M - m)g}{M + m + (1/2)\,\mu} \quad \text{da cui} \quad \tau = mg\frac{2M + (1/2)\,\mu}{M + m + (1/2)\,\mu}$$

E.VII.19. *Un cannoncino di massa M, montato su una slitta, spara orizzontalmente un proiettile cilindrico di massa m e raggio r. La canna del cannoncino ha una rigatura elicoidale di passo p, cosicché il proiettile acquista una rotazione attorno al proprio asse longitudinale. La propulsione al proiettile è fornita da una molla di massa trascurabile e costante elastica k, inizialmente accorciata di un tratto ξ. Determinare la velocità v con cui viene sparato il proiettile. Si trascurino gli attriti.*

Il sistema ha due gradi di libertà: per descrivere la posizione, va specificata infatti la coordinata x del proiettile nonché la coordinata X del cannone; l'angolo θ di rotazione del proiettile è invece completamente determinato dalla posizione relativa $x - X$. Come equazioni dinamiche, possiamo usare il teorema di conservazione dell'energia (considerato che gli attriti sono trascurabili) e il teorema di conservazione della componente x della quantità di moto (tutte le forze esterne agenti sul sistema, che sono la forza peso e la reazione vincolare esercitata dalle slitte, sono dirette verticalmente):

$$\begin{cases} U_0 + K_0 = U + K \\ Q_{0x} = Q_x \end{cases}$$

Inizialmente si ha $U_0 = \frac{1}{2} k \xi^2$ (l'energia potenziale iniziale è data dall'energia elastica della molla) e $K_0 = 0$ (il sistema è fermo); alla fine si ha $U = 0$ (la molla è completamente decompressa). Si ha inoltre $Q_{0x} = 0$. Pertanto le due precedenti equazioni divengono:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} k \xi^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 & \text{[VII.56 a]} \\ M V + m \mathrm{v} = 0 & \text{[VII.56 b]} \end{cases}$$

In queste equazioni compaiono tre parametri cinematici (v, V, ω); tuttavia (essendo due soli i gradi di libertà) deve esistere fra questi tre parametri una relazione geometrica. In effetti si ha:

$$\theta = \frac{x - X}{p} 2\pi \quad \text{da cui derivando} \quad \omega = \frac{\mathrm{v} - V}{p} 2\pi .$$

Dalla seconda delle [VII.56] si ha

$$V = -\mathrm{v}\frac{m}{M}; \quad \text{per cui} \quad \omega = \frac{2\pi(\mathrm{v} - V)}{p} = \frac{\mathrm{v}}{p}\left(1 + \frac{m}{M}\right) 2\pi .$$

La [VII.56 a] diviene pertanto:

$$\frac{1}{2} k \xi^2 = \frac{1}{2} M \mathrm{v}^2 \frac{m^2}{M^2} + \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right)\frac{\mathrm{v}^2}{p^2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 \cdot 4\pi^2$$

ovvero

$$\frac{1}{2} k \xi^2 = \frac{1}{2} \mathrm{v}^2 B \quad \text{dove} \quad B = m\left(1 + \frac{m}{M}\right) + \frac{1}{2} m \frac{r^2}{p^2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 4\pi^2$$

e dunque

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{k \xi^2}{B}}$$

Tabella VII.1

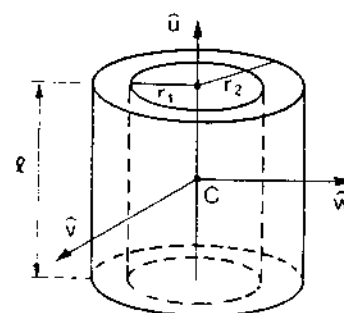
Momenti centrali di inerzia per alcuni solidi omogenei

CILINDRO CAVO

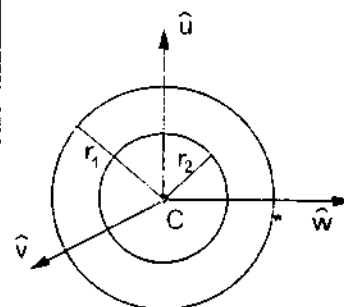
$$I_u = \frac{1}{2} M (r_1^2 + r_2^2)$$

$$I_v = I_w = \frac{1}{4} M (r_1^2 + r_2^2) + \frac{M l^2}{12}$$

N.B. A seconda del valore di r_1, r_2, l, queste stesse espressioni forniscono i momenti centrali di inerzia per:

- cilindro pieno ($r_1 = 0$)
- sbarretta rettilinea ($r_1 = r_2 = 0$)
- disco ($r_1 = l = 0$)
- cerchio ($r_1 = r_2$; $l = 0$)

SFERA CAVA

$$I_u = I_v = I_w = \frac{2}{5} M (r_1^2 - r_2^2)$$

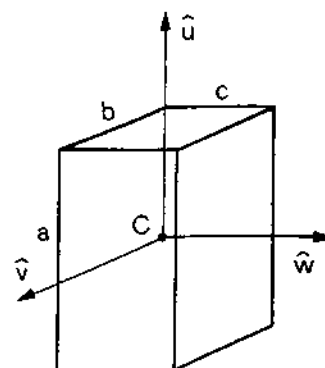
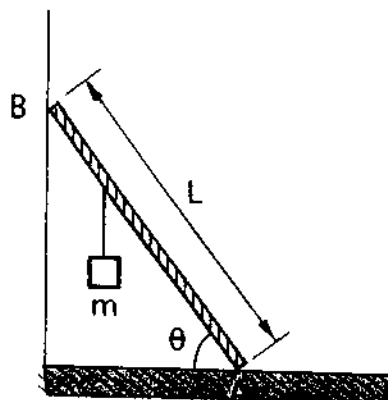
Per $r_2 = 0$ si ha la sfera omogenea piena.

PARALLELEPIPEDO

$$I_u = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$$

$$I_v = \frac{M}{12} (a^2 + c^2)$$

$$I_w = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

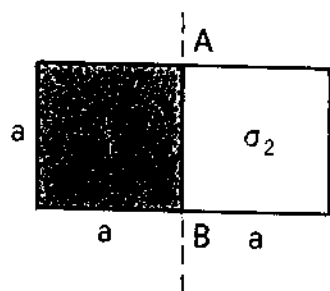
Per $a = b = c$ si ha il cubo $\left(I_u = I_v = I_w = \frac{Ma^2}{6}\right)$

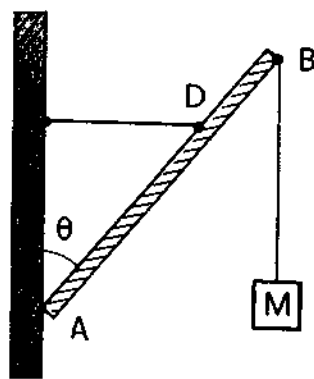
Per $a = 0$ si ha la piastra piana rettangolare.

Esercizi del capitolo VII

VII.1. Un'asta omogenea di massa M è appoggiata ad un pavimento orizzontale scabro. L'angolo tra l'asta ed il piano orizzontale è θ. A distanza $d = 3\ L/4$ dal punto di appoggio A è appeso un corpo di massa m. Se il sistema è in equilibrio, calcolare la forza di attrito (reazione tangenziale) nel punto A.

(Risposta: $f_t^{(A)} = \left(\frac{1}{2}\ M + \frac{3}{4}\ m\right) g \operatorname{cotg}\theta$)

VII.2. Ricavare l'espressione del momento M della coppia di forze necessaria a mantenere in equilibrio un disco omogeneo di raggio R, disposto con asse orizzontale nel campo della forza di gravità, sul quale sia stata saldata, lungo un raggio formante un angolo θ con la verticale, una sbarretta sottile ed omogenea di massa m e lunghezza pari al raggio del disco.

(Risposta: $M = \frac{R}{2}\ mg \operatorname{sen}\theta$)

VII.3. Due lastre piane, rigide, omogenee, quadrate, di densità superficiali σ_1 e σ_2 rispettivamente sono saldate lungo il lato AB. Il sistema è appeso ad un asse orizzontale passante per A. Per effetto della gravità, ed in assenza di attriti, qual'è l'espressione dell'angolo formato, all'equilibrio, dal lato AB rispetto alla verticale?

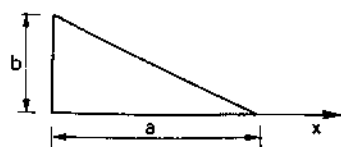
$\left(\text{Risposta: } \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}\right)\right)$

VII.4. Una sbarra rigida AB, di massa m e lunghezza L, può ruotare senza attriti intorno ad una cerniera A fissata ad un supporto verticale. All'estremo B della sbarra è appeso un carico di massa M. La sbarra forma con la verticale un angolo θ, essendo trattenuta da un filo orizzontale il cui carico di rottura è τ_R e che è ancorato alla sbarra nel punto D, distante d dal punto A. Ricavare l'espressione del massimo valore M_{MAX} della massa M, per cui si può avere equilibrio.

$\left(\text{Risposta: } M_{\text{MAX}} = \frac{\tau_R\, d}{Lg} \operatorname{cotg}\theta - \frac{m}{2}\right)$

VII.5. Calcolare il momento d'inerzia di una lamina omogenea (densità e spessore uniformi), a forma di triangolo rettangolo di cateti a e b, la cui massa è M, rispetto al cateto a (asse x).

(Risposta: $I_x = Mb^2/6$)

VII.6. Ricavare il momento d'inerzia del corpo rigido descritto nell'esercizio VII.2, rispetto all'asse del disco, nell'ipotesi che la massa del disco sia M.

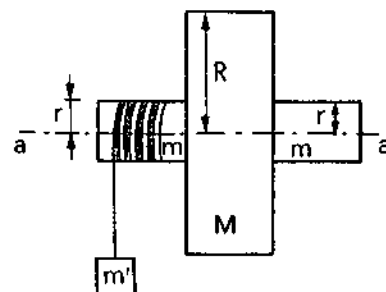
(Risposta: $I_o = \frac{1}{6}\ (3\,M + 2\,m)\ R^2$)

VII.7. Una sbarra sottile ed omogenea di massa M e lunghezza L forma un angolo θ con una retta a, passante per il suo centro di massa. Calcolare il momento d'inerzia I_a della sbarra rispetto alla retta a.

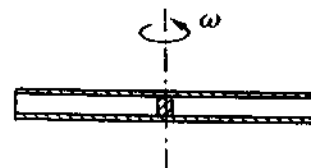
(Risposta: $I_a = \frac{1}{12}\ ML^2 \operatorname{sen}^2\theta$)

VII.8. Un corpo rigido è costituito da due sfere omogenee uguali di massa M e raggio R, rigidamente collegate tra loro da una sottile asta rettilinea ed omogenea di lunghezza L e massa m, saldata lungo la congiungente i due centri delle sfere. Calcolare il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse baricentrale perpendicolare all'asta di collegamento.

$\left(\text{Risposta: } I_a = 2\,M\left[\frac{2}{5}\ R^2 + \left(\frac{L}{2} + R\right)^2 + \frac{1}{12}\ m\,L^2\right]\right)$

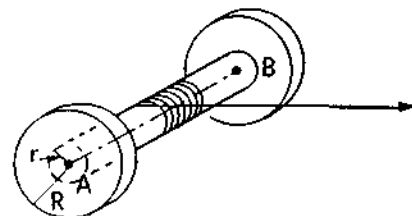
VII.9. Un volano è costituito da un cilindro rigido omogeneo, di massa M e raggio R, saldato ad un albero cilindrico pure rigido ed omogeneo, coassiale al primo cilindro, di raggio r e massa aggiuntiva $2m$. L'asse a dell'intero sistema è disposto orizzontalmente e non ci sono attriti apprezzabili. Intorno all'albero è avvolto un sottile filo inestensibile, in modo da non slittare sull'albero, alla cui estremità è appesa una massa m'. Calcolare l'accelerazione angolare del volano.

$$\left(\text{Risposta: } \dot{\omega} = \frac{2\,m' g r}{MR^2 + 2\,(m + m')\,r^2}\right)$$

VII.10. Un sottile tubo rigido, omogeneo, di massa M, ha al suo interno, in posizione simmetrica rispetto al tubo, un cilindretto molto corto di massa m, di diametro appena inferiore a quello interno del tubo. Il cilindretto può scorrere senza attrito dentro al tubo. Inizialmente tutto ruota con velocità angolare ω_0 intorno ad un asse verticale, che passa per il baricentro del sistema (inizialmente il cilindretto è al centro). Ad un certo istante, per una lievissima perturbazione, il cilindretto si sposta dalla posizione iniziale e viene espulso dal tubo. In assenza di forze esterne, qual'è la velocità angolare ω del tubo, quando il cilindretto ne fuoriesce?

$$\left(\text{Risposta: } \omega = \frac{M}{M + 3\,m}\,\omega_0\right)$$

VII.11. Su un piano inclinato, partendo da fermi dalla stessa quota, rotolano senza strisciare un cilindro ed una sfera aventi lo stesso raggio. Chi arriva prima in fondo al piano inclinato? Al passaggio dal fondo del piano inclinato, quale è il rapporto tra la velocità del cilindro e quella della sfera?

(Risposta: sfera; 0,97)

VII.12. Un sistema rigido, omogeneo, a forma di rocchetto, è costituito da due ruote cilindriche di raggio R collegate da un asse cilindrico di raggio r. Il momento d'inerzia del sistema, rispetto al suo asse di simmetria AB, vale I, mentre la massa totale del rocchetto è M. Un filo inestensibile, flessibile e di massa trascurabile è avvolto intorno all'asse e non vi può scivolare sopra. Al filo è applicata una forza F orizzontale, perpendicolare all'asse del rocchetto e costante. Il filo si svolge dalla parte superiore dell'asse. Determinare l'accelerazione del centro di massa del rocchetto, nell'ipotesi che l'appoggio sia su un piano orizzontale e che si abbia rotolamento puro.

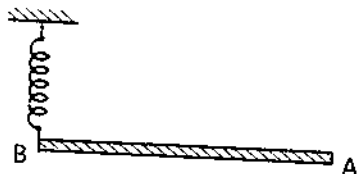
$$\left(\text{Risposta: } a = \frac{R\,(R + r)}{I + MR^2}\,F\right)$$

VII.13. Una scatola cilindrica chiusa e vuota, di altezza h e raggio R, costruita di lamiera omogenea per densità superficiale e spessore (molto minore di R ed h), ruota, intorno al suo asse baricentrale parallelo alle generatrici, con velocità angolare iniziale ω_0. Dopo un intervallo di tempo Δt, a causa di attriti, il cilindro si ferma. Nell'ipotesi che sia costante nel tempo il momento M_f della forza frenante, calcolarne il valore.

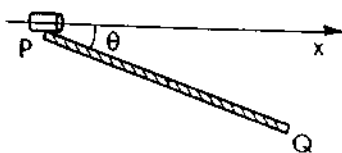
$$\left(\text{Risposta: } M_f = \frac{\sigma \pi R^3\,(R + 2\,h)\,\omega_0}{\Delta t}\right)$$

VII.14. Una sfera omogenea di massa m e raggio r ruota con attrito intorno ad un suo asse baricentrale. Partendo con velocità angolare ω_0, la sfera si ferma dopo un numero n di giri. Qual'è l'espressione del momento M_A della coppia frenante, nel caso in cui sia costante tale coppia?

$$\left(\text{Risposta: } M_A = \frac{m\,r^2\,\omega_0^2}{10\,\pi\,n}\right)$$

VII.15. Un cilindro omogeneo di massa m_1 e raggio R è disposto in modo da ruotare intorno ad un asse fisso orizzontale passante per il suo centro di massa e parallelo alle sue generatrici. Tale rotazione avviene con attrito costante nel tempo. Sul cilindro è avvolto un filo inestensibile, di massa trascurabile, che non slitta sulla superficie del cilindro ed alla cui estremità inferiore è attaccato un corpo di massa m_2. Partendo tutto da fermo, si osserva che quando il corpo è sceso di una quantità h, il cilindro si trova a ruotare con velocità angolare ω_0. In questo momento viene tagliato il filo. Dopo quanto tempo il cilindro si ferma?

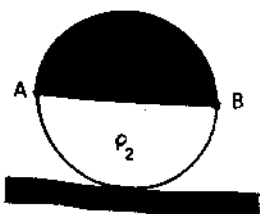
$$\left(\text{Risposta: } \Delta t = \frac{\omega_0 m_1 R^2}{2 M_A} \quad \text{con} \quad M_A = m_2 g R - \frac{\omega_0^2 R^2}{4h}(m_1 + 2m_2)\right)$$

VII.16. Un'asta omogenea di massa m è vincolata a muoversi in un piano verticale mediante una cerniera priva di attrito applicata ad un suo estremo A. L'estremo opposto è collegato ad una molla elicoidale, ad asse verticale, di costante elastica k (vedi figura). Se si sposta di poco la sbarra dalla sua posizione di equilibrio (orizzontale) e la si lascia andare, si osservano delle oscillazioni. Ricavare l'espressione del periodo delle piccole oscillazioni.

$$\left(\text{Risposta: } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}\right)$$

VII.17. Una sbarra omogenea PQ, di massa m e lunghezza L, è incernierata nell'estremo P ad un manicotto di massa trascurabile che può scorrere senza attrito su un filo orizzontale (asse x). La cerniera lavora senza attrito e la sbarra si muove su un piano verticale. Inizialmente la sbarra è ferma ed è sistemata in posizione orizzontale, con il punto P nell'origine dell'asse x. Ad un certo istante la sbarra viene lasciata andare sotto l'azione della forza peso. Determinare la traiettoria del centro di massa della sbarra e la sua velocità v_c quando l'angolo tra la sbarra e la direzione orizzontale assume un generico valore θ.

$$\left(\text{Risposta: } x_c = \text{costante} = L/2; \; v_c(\theta) = \left(\frac{3gL \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta}{3\cos^2\theta + 1}\right)^{1/2}\right)$$

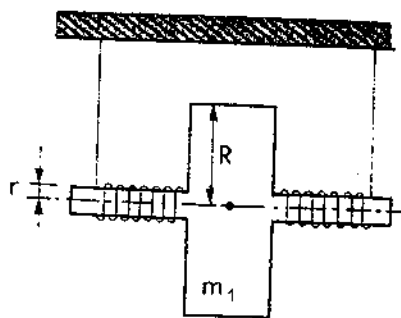
VII.18. Una sbarra omogenea, rigida, di massa m e lunghezza L, porta ai suoi estremi due sfere di piccolo raggio, aventi ciascuna massa m. La sbarra è vincolata a ruotare, inizialmente con velocità angolare ω_0, su un piano orizzontale, intorno ad un asse verticale passante per un punto a distanza x da un estremo della sbarra. Esistono degli attriti che sono assimilabili ad una coppia di forze di momento M costante. Qual'è il valore di x che rende minimo il tempo t_f necessario al sistema per fermarsi?

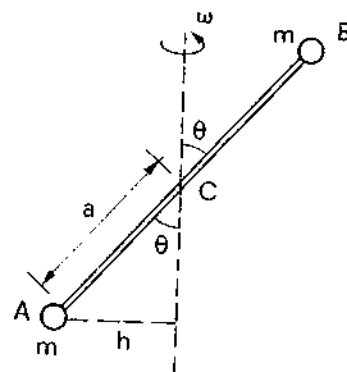
(Risposta: $x = L/2$)

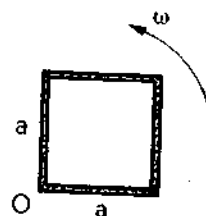
VII.19. Un tubo cilindrico omogeneo, a parete sottile di spessore uniforme, il cui raggio medio è R = 4,9 m, può ruotare senza attriti intorno ad una sua generatrice disposta orizzontalmente. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema nel campo della gravità. (Risposta: T = 6,28 s)

VII.20. Un corpo rigido cilindrico di raggio R e altezza R è costituito da due semicilindri omogenei, entrambi di raggio R, saldati sul piano mediano, di densità ρ_1 e ρ_2 rispettivamente, con $\rho_1 > \rho_2$. Il cilindro può rotolare senza strisciare su un piano orizzontale ed è inizialmente fermo in equilibrio instabile (vedi figura). Per una leggera perturbazione il cilindro inizia a rotolare. Qual'è l'energia cinetica totale del cilindro quando il piano AB è ruotato di $\pi/2$?

$$\left(\text{Risposta: } K = \frac{2}{3} g R^4 (\rho_1 - \rho_2)\right)$$

VII.21. Un disco di Maxwell è costituito da un cilindro omogeneo di massa m_1 e raggio R ai cui lati sono saldati due cilindri coassiali omogenei, uguali, di raggio r e massa complessiva m_2, che funzionano da asse per il cilindro m_1. Sui cilindri laterali sono avvolti due fili inestensibili e di massa trascurabile, ancorati superiormente ad un supporto orizzontale fisso, che non slittano sull'asse e che, in ogni istante, garantiscono l'orizzontalità del sistema. Se si trascurano gli attriti e si lascia cadere il sistema sotto l'azione della gravità, calcolare l'accelerazione a_c del centro di massa.

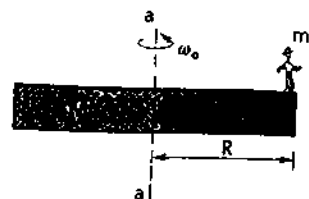
$$\left(\text{Risposta: } a_c = \frac{(m_1 + m_2)\, g}{m_1 + m_2 + \frac{I_c}{r^2}}\right)$$

VII.22. Un corpo rigido è formato da un'asta di lunghezza $2a$ e massa trascurabile, ai cui estremi A e B sono saldati due corpi uguali, praticamente puntiformi, di massa m ciascuno. Il corpo è costretto a ruotare con velocità angolare ω intorno ad un asse verticale, passante per il centro di massa del sistema e formante con l'asta AB un angolo fisso di valore θ. Calcolare il modulo del momento della quantità di moto del sistema rispetto al punto C.

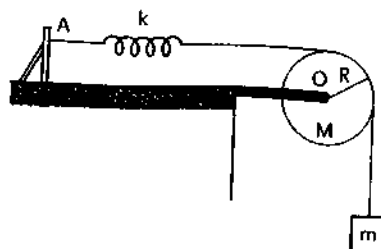
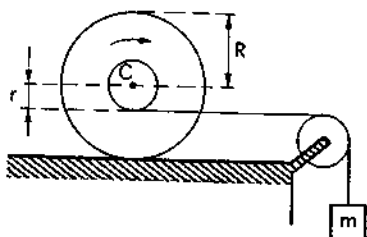
(Risposta: $P = 2ma^2\omega \operatorname{sen}\theta$)

VII.23. Una sottile sbarra di massa m è utilizzata per formare una cornice quadrata di lato a. La cornice è situata su un tavolo orizzontale privo di attrito e ruota con velocità angolare ω intorno ad un asse verticale passante per un suo vertice. Calcolare la reazione vincolare sull'asse di rotazione.

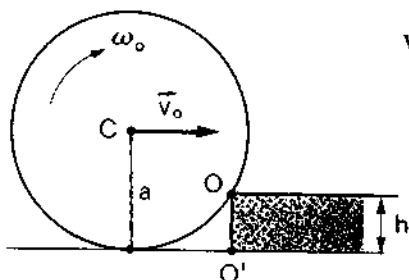
(Risposta: $R = 2\lambda\omega^2 a^2\sqrt{2}$ con $\lambda = m/4a$)

VII.24. Un carrello è costituito da un corpo centrale e da due sistemi ruotanti, uno anteriore ed uno posteriore, costituiti ciascuno da una coppia di ruote di raggio R collegate da un asse rigido. Ciascun sistema ruotante ha momento d'inerzia I. Sia m la massa totale del carrello (corpo centrale + assi e ruote). Il carrello è posto su binari orizzontali, sui quali procede, con moto di puro rotolamento delle ruote, per effetto di una forza orizzontale F costante e parallela ai binari. Determinare l'espressione dell'accelerazione del carrello.

$$\left(\text{Risposta: } a = \frac{FR^2}{mR^2 + 2I}\right)$$

VII.25. Una piattaforma cilindrica, rigida ed omogenea, di massa M e raggio R, può ruotare senza attriti intorno al suo asse, disposto verticalmente. Inizialmente un uomo di massa m è fermo sul bordo della piattaforma, mentre questa ruota liberamente con velocità angolare ω_0. Ad un certo istante l'uomo si mette a camminare ed alla fine raggiunge il centro della piattaforma. Qual'è la velocità angolare finale? È variata l'energia cinetica totale?

$$\left(\text{Risposta: } \omega = \omega_0 \frac{M + 2m}{M}\right)$$

VII.26. Nel sistema descritto in figura la molla, di massa trascurabile, ha costante elastica k; la carrucola, costituita da un cilindro omogeneo di massa M e raggio R, ruota senza attrito intorno all'asse O disposto orizzontalmente. Il filo che collega la molla, un cui estremo è fissato in A, alla massa m, è inestensibile, di massa trascurabile e non slitta sulla carrucola. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni della massa m nel suo moto lungo la verticale.

$$\left(\text{Risposta: } T = 2\pi\sqrt{\frac{M + 2m}{2k}}\right)$$

VII.27. Il rocchetto dell'esercizio VII.12 (di massa totale M, momento di inerzia I_c, raggio delle ruote esterne R e raggio dell'asse r) è sistemato come in figura. Il piano orizzontale è tale che il rocchetto rotola senza strisciare quando il filo, arrotolato sull'asse in modo che non vi possa slittare sopra e che tiri il rocchetto dalla parte inferiore dell'asse, è tirato da una forza orizzontale costante dovuta al peso della massa m. La carrucola su cui passa il filo è di massa trascurabile e non presenta attriti. Il sistema parte da fermo. Calcolare la velocità della massa m dopo che è scesa di una quantità h.

$$\left(\text{Risposta: } v = \sqrt{\frac{2\,m g h\,(R-r)^2}{MR^2 + I + m\,(R-r)^2}}\right)$$

VII.28. Una sfera omogenea di raggio a rotola senza strisciare con velocità di traslazione v_0 su un piano orizzontale; la direzione di $\vec{v}_0$ è perpendicolare alla faccia verticale OO' di un blocco fisso (gradino) di altezza h ($h < a$). L'urto tra sfera e blocco è tale che il punto della sfera, che viene in contatto con lo spigolo O, non slitta e non si stacca, mentre la sfera si solleva dal suolo (come si vedrà nel prossimo capitolo, si dice che si tratta di urto anelastico). Qual'è la minima velocità $v_0^{(MIN)}$ che consente alla sfera di salire sopra il blocco?

$$\left(\text{Risposta: } v_0^{(MIN)} = \frac{a}{7a - 5h}\sqrt{70\,gh}\right)$$

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo VII

VII.1. Scrivere le condizioni di equilibrio per forze e momenti applicati all'asta. È conveniente scegliere il punto A come polo per calcolare i momenti delle forze.

VII.2. Il momento richiesto deve essere uguale ed opposto al momento della forza peso relativa alla sbarretta.

VII.3. Conviene considerare separatamente le forze peso sulle due lastre come applicate ai rispettivi c.d.m. Per l'equilibrio, deve essere nullo il risultante dei momenti di queste due forze rispetto al punto A.

VII.4. Scrivere la condizione di equilibrio per i momenti, per esempio rispetto al polo A e poi cercare il valore di M che rende massima (τ_R) la tensione del filo.

VII.5. Applicare la formula che definisce il momento d'inerzia rispetto ad un asse generico, decomponendo, nell'integrale, il triangolo in elementi dm che equidistino dall'asse x.

VII.6. Suddividere l'integrale complessivo del momento d'inerzia in due contributi separati, uno dovuto al disco ed uno dovuto alla sbarretta.

VII.7. Calcolare in modo diretto, secondo la definizione, il momento d'inerzia $I_a = \int h^2\,dm$. Verificare il risultato ottenuto usando la formula [VII.14].

VII.8. Il momento d'inerzia di un sistema composto è la somma dei momenti d'inerzia dei singoli componenti. Utilizzare il teorema di Huygens-Steiner.

VII.9. Il sistema ha un solo grado di libertà. Proiettare sull'asse a la seconda equazione cardinale della meccanica dei sistemi.

VII.10. Il sistema è isolato e si conserva il momento della quantità di moto. Il cilindretto è corto ed il suo momento della q.d.m. iniziale può essere trascurato. Per il momento di inerzia il sottile tubo può essere assimilato ad una sbaretta rigida.

VII.11. Applicare il teorema dell'energia cinetica ed il teorema di Köenig.

VII.12. Si possono applicare le equazioni cardinali della meccanica dei sistemi rigidi prendendo, come polo per i momenti, il centro di massa C. È possibile anche risolvere il problema facendo ricorso al teorema dell'energia cinetica.

VII.13. Applicare la seconda equazione cardinale della meccanica dei sistemi rigidi, proiettata sull'asse baricentrale di rotazione.

VII.14. Come in tutti i casi in cui si considerano spostamenti e forze che li producono (in questo caso rotazioni e momenti delle forze), conviene ricorrere al teorema dell'energia cinetica.

VII.15. Applicare il teorema dell'energia cinetica e, per la fase di frenamento in assenza di trazione, la seconda equazione cardinale della meccanica per i corpi rigidi ruotanti intorno ad asse fisso.

VII.16. Scrivere la seconda equazione cardinale della meccanica dei corpi rigidi rispetto al polo A, sia per la posizione di equilibrio, sia per una posizione leggermente ruotata della sbarra. Risolvere l'equazione differenziale che ne deriva, ricordando le caratteristiche del moto armonico.

VII.17. Applicare la prima equazione cardinale della meccanica dei sistemi per determinare la componente x della velocità di C (e di qui anche la traiettoria di C). Utilizzare anche il teorema dell'energia cinetica.

VII.18. Osservando che si tratta di moto rotatorio uniformemente ritardato, ricavare l'espressione di t_f in funzione di x. Cercare poi il valore di x che rende minimo t_f.

VII.19. Riferirsi all'esempio E.VII.10 ed utilizzare il teorema di Huygens-Steiner.

VII.20. Applicare il teorema dell'energia cinetica e riferirsi all'esercizio sulla posizione del c.d.m. di una lamina omogenea semicircolare (Es. VI.12).

VII.21. Si può usare il teorema dell'energia cinetica, scrivendo la relazione tra velocità di traslazione e variazione di quota e, successivamente, derivandola rispetto al tempo.

VII.22. Calcolare separatamente i vettori momento angolare, rispetto a C, delle due masse situate agli estremi A e B. Sommare vettorialmente i due momenti angolari e quindi calcolare il modulo del momento angolare risultante.

VII.23. In un sistema solidale con la cornice la reazione vincolare uguaglia la forza centrifuga totale.

VII.24. Applicare le equazioni cardinali della meccanica dei sistemi oppure il teorema dell'energia cinetica (derivando rispetto al tempo la relazione che ne consegue).

VII.25. È nulla la componente nella direzione dell'asse del momento delle forze esterne: si conserva il momento assiale della quantità di moto. Trascurare il momento della q.d.m. dell'uomo nella rotazione su se stesso, quando è arrivato al centro della piattaforma.

VII.26. Applicare le equazioni della meccanica ai corpi singoli m ed M. Tenere conto che la forza della molla dà luogo ad azioni di richiamo (spostamento di un certo segno corrisponde a forza di segno opposto).

VII.27. Trattandosi di un problema in cui è dato lo spostamento del punto di applicazione della forza, è conveniente usare il teorema dell'energia cinetica.

VII.28. Nella fase di collisione tra sfera e gradino si conserva il momento angolare rispetto al punto fisso O. Il punto O resta bloccato mentre la sfera sale sul gradino. Nella fase di salita il lavoro della forza peso riduce l'energia cinetica di rotazione della sfera intorno al punto O.

Capitolo ottavo

Problemi d'urto

Consideriamo una biglia che si muove su un tavolo da biliardo. Via via che essa procede, la sua velocità va diminuendo, seppure lentamente, per conseguenza delle forze di attrito. Se però avviene uno scontro con un'altra biglia che si trovava ferma o in movimento sul tavolo (si dice allora che le due biglie *urtano* fra di loro, o che *subiscono un urto*), la velocità di ciascuna biglia subisce una brusca variazione, in generale sia come direzione che come modulo; e questa variazione avviene in un tempo Δt molto breve, tanto breve che sono del tutto ininfluenti le variazioni di velocità che nello stesso intervallo di tempo Δt sono provocate dalla azione delle forze esterne.

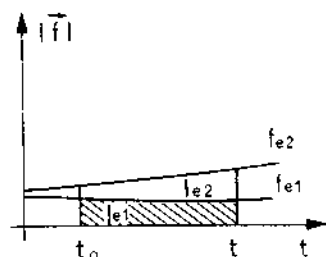
Urto

In effetti, affinché una interazione fra due punti materiali (o fra due oggetti) sia definita come un urto, non è necessario tanto che i due punti entrino a contatto diretto (negli urti fra particelle nucleari o subnucleari le distanze relative possono anche rimanere sempre molto più grandi delle dimensioni caratteristiche delle particelle); quanto che sia verificata la condizione che il tempo di interazione Δt sia così breve da rendere ininfluente, rispetto all'evoluzione del fenomeno, il contestuale effetto di eventuali forze esterne. Precisiamo meglio questa condizione ricorrendo alle opportune equazioni dinamiche.

Urto fra sfere puntiformi

Consideriamo dunque due oggetti puntiformi (ad esempio due piccole sfere) di massa m_1 ed m_2, che si muovono sotto l'azione di forze esterne, siano $\bar{f}_{e1}$ ed $\bar{f}_{e2}$.

Per ciascuna di esse possiamo scrivere l'equazione del moto (II principio della dinamica):

$$\begin{cases} \bar{f}_{e1} = m_1 \bar{a}_1 = \dfrac{d\bar{q}_1}{dt} \\ \bar{f}_{e2} = m_2 \bar{a}_2 = \dfrac{d\bar{q}_2}{dt} \end{cases}$$

Integrando queste due equazioni fra due istanti qualunque t_0 e t, si ha (vedi eq. [IV.17]):

$$\begin{cases} \bar{I}_{e1} = \vec{q}_1(t) - \vec{q}_1(t_0) = \vec{q}_1 - \vec{q}_{o1} = \Delta\vec{q}_1 \\ \bar{I}_{e2} = \vec{q}_2(t) - \vec{q}_2(t_0) = \vec{q}_2 - \vec{q}_{o2} = \Delta\vec{q}_2 \end{cases} \qquad \text{[VIII.1]}$$

dove $\bar{I}_{e1}$ e $\bar{I}_{e2}$ rappresentano l'impulso di $\vec{f}_{e1}$ ed $\vec{f}_{e2}$ fra gli istanti t_0 e t. Poiché le forze esterne che agiscono sulle sfere hanno in generale un andamento regolare in funzione del tempo, I_{e1} e I_{e2} sono infinitesimi simultanei a Δt, e il loro ordine è uguale (o superiore) al primo.

Supponiamo ora che le due sfere vengano a contatto. Alle forze esterne $\vec{f}_{e1}$ ed $\vec{f}_{e2}$ si sovrappongono durante il contatto le forze $\vec{f}_{i1}$ ed $\vec{f}_{i2}$ che le sfere si scambiano fra di loro. Rispetto al sistema formato dalle due sfere, $\vec{f}_{i1}$ ed $\vec{f}_{i2}$ sono forze interne; in virtù del III principio della dinamica si ha $\vec{f}_{i1} = -\vec{f}_{i2}$. Integrando rispetto al tempo fra un istante t_0 precedente all'urto e un istante t successivo ad esso, si ha $\bar{I}_{i2} = -\bar{I}_{i1}$. Le [VIII.1] divengono dunque:

$$\begin{cases} \bar{I}_{e1} + \bar{I}_i = \Delta\vec{q}_1 \\ \bar{I}_{e2} - \bar{I}_i = \Delta\vec{q}_2 \end{cases} \qquad \text{[VIII.2]}$$

avendo indicato $\bar{I}_{i1}$ con $\bar{I}_i$ e $\bar{I}_{i2} = -\bar{I}_{i1}$ con $-\bar{I}_i$.

Se le due sfere sono molto deformabili, il contatto può durare per un tempo $\Delta t = t - t_0$ abbastanza lungo; e può essere allora che le forze interne $\vec{f}_i$ restino durante il contatto confrontabili, in intensità, con le forze esterne. In questo caso, anche i moduli dei relativi impulsi I_i e I_e sono fra di loro confrontabili. Se invece le sfere sono rigide, il tempo Δt di contatto diviene più breve. L'impulso $\bar{I}_i$ delle forze interne è comunque tale da provocare delle variazioni di quantità di moto $\Delta\vec{q}$ che sono confrontabili in modulo con le quantità di moto possedute dalle sfere; nel brevissimo intervallo di tempo Δt per cui dura il contatto le forze mutue divengono intensissime, spesso di molti ordini di grandezza più intense delle forze esterne. Gli impulsi $\bar{I}_{e1}$ e $\bar{I}_{e2}$ delle forze esterne, calcolati sul breve intervallo Δt, hanno per conseguenza moduli I_{e1} e I_{e2} trascurabili rispetto a I_i.

Definizione di urto

In effetti si dice per definizione che *due oggetti puntiformi subiscono un urto quando essi interagiscono scambiandosi un impulso $\bar{I}_i$ confrontabile in intensità col modulo delle loro quantità di moto, in un tempo Δt tanto breve che risulti, rispetto a I_i, trascurabile l'impulso delle forze esterne*

$$I_{e1},\ I_{e2} << I_i$$

In altri termini, l'urto è una interazione molto intensa, così concentrata nel tempo che il contestuale effetto delle eventuali forze esterne è trascurabile: *durante un urto il sistema dei due oggetti può essere considerato praticamente isolato.*

In queste ipotesi, le [VIII.2] divengono:

$$\text{[VIII.3]} \quad \begin{cases} \bar{I}_i = \Delta\vec{q}_1 = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{o1} & \text{[VIII.3.a]} \\ -\bar{I}_i = \Delta\vec{q}_2 = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{o2} & \text{[VIII.3.b]} \end{cases}$$

dove

$$\bar{I}_i = \int_{t_0}^{t} \vec{f}_i(t)\, dt \qquad \text{[VIII.4]}$$

In un problema d'urto lo stato di moto iniziale delle due particelle ($\vec{q}_{o1} = m_1\vec{v}_{o1}$ e $\vec{q}_{o2} = m_2\vec{v}_{o2}$) è noto e si tratta di determinarne lo stato di moto finale, specificato (nel caso che stiamo parlando di particelle puntiformi) dai due vettori $\vec{q}_1 = m_1\vec{v}_1$ e $\vec{q}_2 = m_2\vec{v}_2$, che equivalgono a sei incognite scalari. In linea di principio, ciò può essere fatto utilizzando le due equazioni vettoriali [VIII.3]; nei prossimi paragrafi discuteremo entro quali limiti e impiegando quali tecniche il problema può essere affrontato.

Notiamo che sommando membro a membro le [VIII.3] si ha:

$$\Delta\vec{q}_1 + \Delta\vec{q}_2 = 0 \qquad [VIII.5.a]$$

ovvero

$$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{q}_{o1} + \vec{q}_{o2} \qquad [VIII.5.b]$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_{o1} + m_2\vec{v}_{o2} \qquad [VIII.5.c]$$

Conservazione della quantità di moto totale

In un urto tra corpi non vincolati si conserva la quantità di moto totale del sistema (costituito dall'insieme dei due oggetti che interagiscono).

Nel caso di particelle puntiformi, le [VIII.5] esauriscono le informazioni cinematiche relative all'urto; e le [VIII.3] esauriscono le informazioni dinamiche. Nel caso di urti fra corpi rigidi non puntiformi ciò non è più vero. Il sistema ha allora 6 + 6 = 12 gradi di libertà. Oltre alle equazioni [VIII.3] e [VIII.5] relative alle quantità di moto dei due sistemi che interagiscono, vanno scritte anche le analoghe equazioni relative ai momenti, e la trattazione può complicarsi notevolmente.

Nel momento dell'urto, gli oggetti sono a distanza relativa confrontabile con le loro dimensioni, ed è dunque discutibile che essi possano essere mai trattati come puntiformi. Tuttavia la descrizione che si riesce a dare del loro moto si limita sovente al loro moto di insieme (moto dei rispettivi centri di massa); quando ciò accade il loro momento angolare non è praticamente misurabile, e le relative equazioni non sono utilizzabili.

Tuttavia in alcuni casi (trattati nei par. VIII.2 e VIII.3) le informazioni in nostro possesso sono comunque sufficienti a garantirci che i momenti angolari delle particelle non vengono perturbati nell'urto; la descrizione mediante il puro moto traslazionale è in questi casi esauriente (urti elastici).

In altri casi (urti anelastici) si sa che entrano in gioco i moti intorno ai baricentri delle particelle; ma le informazioni dinamiche e cinematiche in nostro possesso non sono tali da consentirci di usare le equazioni del momento. Solo in alcuni esempi dell'ultimo paragrafo noi ipotizzeremo di trovarci nelle condizioni di dover usare (e di potere usare) le equazioni di conservazione del momento angolare.

Esempio

E.VIII.1. *Una palla di gomma di raggio r = 5 cm e massa m = 100 g rimbalza sul pavimento cadendo da una altezza h = 2 m. Valutare l'ordine di grandezza delle forze che entrano in gioco nell'urto*

Usando la [VIII.3] si ha:

$$|\Delta\vec{q}| = |\vec{I}_i| = \bar{f}\Delta t; \quad \text{da cui} \quad \bar{f} = \frac{|\Delta\vec{q}|}{\Delta t}$$

dove $\bar{f}$ è il valor medio della forza (in modulo), Δt è il tempo per cui dura l'urto e $|\Delta\vec{q}|$ è il modulo della variazione di quantità di moto della palla che rimbalza.

Trascurando la resistenza dell'aria, la palla giunge sul pavimento con una velocità $\vec{v}_o$ il cui modulo è $v_o = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 2\ \text{m}} \simeq 6$ m/s, e rimbalza con velocità $\vec{v}$ che è circa uguale ed opposta a $\vec{v}_o$. Pertanto nell'urto si ha

$$|\Delta \vec{q}| = |m(\vec{v} - \vec{v}_o)| = 2\,m v_o \simeq 1{,}2\ \text{Kg m/s}$$

La deformazione subita dalla palla nel rimbalzo è confrontabile col raggio, diciamo che sia $d = 2$ cm $= 2 \cdot 10^{-2}$ m. Nel momento t_o in cui la palla tocca il terreno, la velocità del centro c è $\vec{v}_{co} = \vec{v}_o$; nell'istante t_1 di massima deformazione è $\vec{v}_{c1} = 0$. Per cui mentre la palla è a contatto col terreno il centro c si muove in fase di compressione di un tratto d con velocità media $v_c = \dfrac{v_{co} + v_{c1}}{2} \simeq 3$ m/s; e dunque si ha

Valutazione della durata di un urto

$$t_1 - t_o \simeq \frac{d}{v_c} = \frac{2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{3\ \text{m/s}} \simeq 6 \cdot 10^{-3}\ \text{s}\,.$$

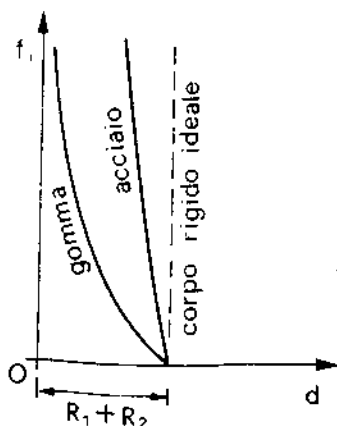
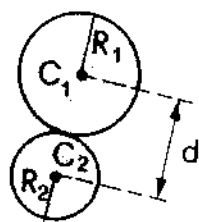
Il tempo totale dell'urto è dunque $\Delta t = 2\,(t_1 - t_o) \simeq 10^{-2}$ s.

Abbiamo dunque in conclusione

Valutazione delle forze in gioco

$$\bar{f} = \frac{|\Delta \vec{q}|}{\Delta t} \simeq \frac{1{,}2\ \text{kg m/s}}{10^{-2}\ \text{s}} \simeq 120\ \text{kg m/s}^2 \simeq 120\ \text{N}$$

La forza è dunque dell'ordine di 100 N, pari circa al peso di una massa di 10 kg. Se la palla anziché di gomma fosse stata di acciaio, a parità di massa (sfera cava) la deformazione sarebbe stata dell'ordine di 10^{-1} cm $\simeq$ 1 mm; il tempo di contatto Δt sarebbe stato dell'ordine di $5 \cdot 10^{-4}$ s, e dunque la forza $\bar{f}$ dell'ordine di 2000 N.

VIII.1. Considerazioni metodologiche generali relative all'urto fra particelle

A dispetto della loro semplicità formale, le [VIII.3] sono tutt'altro che semplici da usare. Il principale motivo è che di solito non siamo in grado di calcolare l'impulso [VIII.4] delle forze che le due particelle si scambiano.

Consideriamo ad esempio due sfere di raggio rispettivo R_1 ed R_2. Fino a che i loro centri si mantengono a distanza $d > R_1 + R_2$, la forza $\vec{f}_i$ è nulla. Durante l'urto, le due sfere si deformano, e i loro centri giungono a distanza $d < R_1 + R_2$. La forza (elastica) che le due sfere si scambiano per conseguenza di questa deformazione è diretta secondo la congiungente i due centri $C_1\,C_2$, e la sua intensità f_i può essere misurata, anche staticamente, in funzione di d. A parità di deformazione l'intensità della forza dipende dal materiale che costituisce le sfere, e in particolare dal suo modulo di Young. Nella figura è mostrato l'andamento tipico qualitativo di f_i in funzione di d. Tuttavia, a prescindere dal fatto che durante l'urto possono entrare in gioco anche forze non misurabili staticamente (ad esempio una forza di attrito nel punto di contatto, e/o una forza dissipativa che si aggiunge a quella elastica come nell'eq. [V.48]), va notato che comunque per il calcolo di $\vec{I}_i$ tramite la [VIII.4] ci serve l'*andamento di $\vec{f}_i$ con il tempo* e non con la posizione; e noi non possediamo, relativamente al breve intervallo di tempo in cui l'urto avviene, il dettaglio delle informazioni sull'andamento temporale dei parametri da cui le forze mutue dipendono.

D'altro canto, va osservato che la cinematica dell'urto (cioè lo stato di moto delle particelle emergenti) è determinata, a partire dalla quantità di moto iniziale delle due particelle, dall'impulso delle forze e non dal valore istantaneo delle forze stesse. Il fatto ad esempio che le sfere siano più o

meno rigide influenza il tempo per cui dura l'urto ma non l'impulso $\vec{I}$, (cioè non l'integrale temporale delle forze che le sfere si scambiano durante l'urto). In effetti, nel caso in cui le forze di attrito statico e quelle dissipative siano trascurabili, vedremo che la cinematica dell'urto fra due sfere dipende solo da parametri geometrici relativi all'urto e non da parametri dinamici.

Urto fra oggetti macroscopici

Tutto ciò considerato, l'approccio ai problemi d'urto può essere di due tipi. Nel caso di urti fra oggetti macroscopici (ad esempio due palle da biliardo) la geometria dell'urto (cioè la forma degli oggetti che si urtano e la loro posizione relativa al momento dell'urto) può essere considerata nota e controllabile: si può lanciare la biglia-proiettile in modo che l'urto con la biglia bersaglio sia «pieno» (cioè centrale); ovvero in modo che la velocità del centro del proiettile disti dal centro del bersaglio di una quantità b (detta *parametro d'urto*) scelta a priori. In questo caso anche informazioni parziali a proposito della natura delle forze scambiate possono consentire di risolvere la cinematica dell'urto; e dunque di *prevedere* la direzione e la velocità con cui le particelle emergono dall'urto.

Parametro d'urto

Urto fra particelle microscopiche

Nel caso invece di particelle microscopiche (ad esempio atomi e molecole, o nuclei atomici, o particelle subnucleari) la forma e la configurazione geometrica relativa del proiettile e del bersaglio non sono note a priori, né controllabili con la precisione necessaria. In questo caso è usuale che alcuni dei parametri cinematici relativi all'urto vengano misurati sperimentalmente (ad esempio si misurano le direzioni delle particelle emergenti, ma non le loro velocità; oppure si misura la quantità di moto $\vec{q}$ di una sola delle particelle emergenti; ecc.). Le equazioni dell'urto vengono usate in questo caso per completare il quadro cinematico calcolando le grandezze cinematiche che non sono state misurate direttamente, nonché per trarre informazioni relative alle forze scambiate e alla geometria delle particelle in gioco («fattori di forma»). Va notato che di norma, nel caso di urti fra particelle nucleari o subnucleari, le velocità in gioco sono confrontabili con la velocità della luce, ed è necessario utilizzare la *cinematica relativistica* che richiede il ricorso a equazioni diverse rispetto a quelle classsiche cui limitiamo la nostra attenzione in questo capitolo.

Fattori di forma

Cinematica relativistica

In entrambi questi approcci è opportuno approfondire il significato geometrico e cinematico delle equazioni [VIII.3] e [VIII.5]; nel farlo, ipotizzeremo salvo avviso contrario di avere a che fare con oggetti sferici.

Cominciamo col discutere quale sia il sistema di riferimento più conveniente per descrivere l'urto.

Proiettile e bersaglio

Il caso più usuale che si presenta nella pratica è quello di un oggetto dotato di una certa velocità («proiettile») che va a urtare contro un oggetto fermo («bersaglio»). Il sistema inerziale $Oxyz$ in cui il bersaglio è fermo viene detto *sistema del laboratorio*. Conviene scegliere uno degli assi del sistema di riferimento (ad esempio l'asse x) coincidente con la direzione che prima dell'urto ha la velocità $\vec{v}_o$ del proiettile. Con questa scelta, nel sistema del laboratorio le condizioni iniziali $\vec{q}_{o1}$ e $\vec{q}_{o2}$ possono essere scritte come

Sistema del laboratorio

$$\begin{cases} \vec{q}_{o1} \equiv (q_{o1}, 0, 0) \equiv (m_1 v_o, 0, 0) \\ \vec{q}_{o2} \equiv (0, 0, 0) \end{cases} \qquad \text{[VIII.6]}$$

Urti piani

In molti casi (ad esempio nel gioco del biliardo), l'urto fra particelle macroscopiche è vincolato ad avvenire in un piano. Anche quando questo vincolo sia assente, e l'urto abbia luogo nello spazio, se indichiamo con $\sum$ il

piano individuato da $\vec{q}_{o1}$ e $\vec{q}_1$ (cioè dalle direzioni che il proiettile ha prima e dopo l'urto), questo piano contiene anche $\vec{q}_2$ (cioè la direzione di rinculo del bersaglio). Essendo infatti nulla la proiezione ortogonale a $\sum$ di $\Delta\vec{q}_1 = \vec{q}_1 - \vec{q}_{o1}$, in virtù della [VIII.5.a] deve essere nulla anche la componente ortogonale a $\sum$ di $\Delta\vec{q}_2$. Dunque l'urto fra due particelle si svolge tutto in un piano (*coplanarità degli urti*). Nel caso di particelle sferiche tale piano è anche, evidentemente, quello che contiene la velocità $\vec{v}_o$ e il parametro d'urto $\vec{b}$. Scegliendo tale piano $\sum$ come piano xy, si ha per quanto detto:

Coplanarità degli urti

$$\begin{cases} \vec{q}_1 \equiv (q_{1x}, q_{1y}, 0) \\ \vec{q}_2 \equiv (q_{2x}, q_{2y}, 0) \end{cases}$$

La conoscenza della direzione di $\vec{b}$, e l'uso della [VIII.5.a], ci ha consentito così nel caso di oggetti a simmetria sferica di ridurre le incognite cinematiche del problema d'urto da 6 a 4.

Sistema del centro di massa

Oltre al sistema di riferimento $Oxyz$ del laboratorio, introduciamo ora anche il sistema di riferimento $Cx'y'z'$ del centro di massa C (con origine in C e assi $x'y'z'$ paralleli a xyz). Poiché nell'urto la quantità di moto totale del sistema si conserva, il centro di massa C si muove nel laboratorio con velocità $\vec{V}_c$ costante; indicando infatti con $M = m_1 + m_2$ la massa totale del sistema, si ha

La velocità del centro di massa è costante

$$M\vec{V}_{oc} = \vec{Q}_o = \vec{q}_{o1} + \vec{q}_{o2} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{Q} = M\vec{V}_c$$

Anche il sistema del centro di massa è pertanto un sistema inerziale, ed è dunque utilizzabile per scrivere le equazioni dinamiche dell'urto. Rispetto al sistema del laboratorio, la velocità $\vec{V}_c$ del sistema del centro di massa è parallela all'asse x ed è data da (vedi eq. [VI.26]):

$$\vec{V}_c = \vec{V}_{oc} = \frac{\vec{Q}}{M} = \frac{\vec{Q}_o}{M} = \frac{\vec{q}_{o1} + \vec{q}_{o2}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{q}_{o1}}{m_1 + m_2} = \vec{v}_o \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \text{[VIII.7]}$$

Usando le trasformazioni di Galileo, si calcolano le velocità delle particelle nel sistema del centro di massa:

$$\vec{v}'_{o1} = \vec{v}_o - \vec{V}_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_o\,; \quad \vec{v}'_{o2} = 0 - \vec{V}_c = -\vec{V}_c = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_o \quad \text{[VIII.8]}$$

Nel sistema del c.d.m. le q.d.m. sono uguali ed opposte

Sempre nel sistema del centro di massa, le quantità di moto delle due particelle prima dell'urto (fra di loro uguali ed opposte visto che $\vec{Q}'_o = \vec{q}'_{o1} + \vec{q}'_{o2} = 0$) sono:

$$\vec{q}'_{o1} = -\vec{q}'_{o2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_o \quad \text{[VIII.9]}$$

Dopo l'urto, le quantità di moto $\vec{q}'_1$ e $\vec{q}'_2$ pur essendo in generale diverse da $\vec{q}_{o1}$ e $\vec{q}_{o2}$, sono comunque fra di loro uguali ed opposte (essendo $\vec{Q}' = \vec{q}'_1 + \vec{q}'_2 = 0$):

$$\vec{q}'_1 = -\vec{q}'_2 \quad \text{[VIII.10]}$$

Per motivi di simmetria, la trattazione dei problemi d'urto assume la sua massima semplicità nel sistema del centro di massa. Tuttavia la definizione delle condizioni iniziali (lancio del proiettile) e la misura della cinematica finale vengono effettuate nel sistema del laboratorio. Per conseguenza, la procedura più efficace per la trattazione dei problemi d'urto è la seguente:

a) Definizione delle condizioni iniziali nel sistema del laboratorio.
b) Trasformazione al sistema del centro di massa.
c) Calcolo della cinematica finale e delle conseguenze dinamiche nel sistema del centro di massa.
d) Trasformazione dei risultati dal sistema del centro di massa al sistema del laboratorio.

Esempio

E.VIII.2. *Una biglia di massa $M = 0,2$ kg si muove con velocità $v_0 = 3,5$ m/s, e va a urtare una seconda biglia ferma di massa $M = 0,15$ kg. Con che velocità V_c si muove il centro di massa? Quanto valgono velocità e quantità di moto nel sistema del centro di massa?*

Indicando le componenti dei vettori nella direzione di $\bar{v}$, si ha:

$$V_c = v_0 \frac{M}{m + M} = 3,5 \text{ m/s} \cdot \frac{0,2}{0,2 + 0,15} = 2 \text{ m/s}$$

Si ha inoltre:

$$v'_{01} = \frac{m}{m + M} v_0 = 1,5 \text{ m/s} ; \quad v'_{02} = -\frac{M}{m + M} v_0 = -2 \text{ m/s}$$

$$q'_{01} = \frac{mM}{m + M} v_0 = 0,3 \text{ kg m/s} ; \quad q'_{02} = -q'_{01} = -0,3 \text{ kg m/s}$$

VIII.2. Urto elastico fra particelle sferiche

Urto elastico fra sfere

Consideriamo due biglie che compiono un urto. Nel sistema del laboratorio la biglia proiettile (di raggio R_1 e massa m_1) si muove inizialmente con velocità $\bar{v}_0$; la biglia bersaglio (di raggio R_2 e massa m_2) è inizialmente ferma.

Scegliamo il sistema di riferimento così come specificato nel paragrafo VIII.1: tutto il fenomeno si svolge allora nel piano xy. Supponiamo di sapere (come unica informazione dinamica) che sono assenti le forze di attrito e ogni altro effetto dissipativo (*urto elastico*). Se conosciamo il parametro d'urto b, le informazioni dinamiche e geometriche in nostro possesso sono sufficienti a farci calcolare completamente la cinematica dell'urto. Come abbiamo anticipato, ciò può essere fatto più semplicemente nel sistema del centro di massa; sistema di riferimento nel quale le condizioni iniziali del moto ci sono note, essendo specificate dalle [VIII.8] e [VIII.9].

Consideriamo, nel sistema del centro di massa, la congiungente C_1C_2 dei due centri al momento dell'urto. Tale congiungente forma col para-

metro d'urto b un angolo α tale che $\cos\alpha = \dfrac{b}{R_1 + R_2}$; α ci è dunque noto una volta noto b.

In base alle ipotesi dinamiche fatte, sappiamo in primo luogo che l'impulso delle forze $\vec{I}_{i1}$ e $\vec{I}_{i2} = -\vec{I}_{i1}$ subito dalle due biglie è diretto come C_1C_2, così come indicato in figura. Infatti non essendoci attrito è nulla la componente delle forze nel piano tangente al punto di contatto. Inoltre, non essendoci forze dissipative, l'*energia cinetica totale del sistema dopo l'urto è pari all'energia cinetica totale prima dell'urto.* Ciò vale per un urto elastico in qualunque sistema di riferimento; ma nel sistema del centro di massa ne deriva una conseguenza cinematica immediata.

Negli urti elastici si conserva l'energia cinetica totale

Notando infatti che $\dfrac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{m^2\mathrm{v}^2}{m} = \dfrac{q^2}{2m}$, l'energia cinetica prima dell'urto può essere scritta nel sistema del centro di massa:

$$K'_o = \frac{q'^2_{o1}}{2m_1} + \frac{q'^2_{o2}}{2m_2} = q'^2_{o2}\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)$$

(avendo utilizzato il fatto che $\vec{q}'_{o1} = -\vec{q}'_{o2}$).

Analogamente, l'energia cinetica dopo l'urto vale

$$K' = \frac{q'^2_1}{2m_1} + \frac{q'^2_2}{2m_2} = q'^2_1\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)$$

(avendo usato la [VIII.10]).

Uguagliando K'_o a K' e tenendo conto delle [VIII.9] e [VIII.10] abbiamo

$$q'_{o1} = q'_{o2} = q'_1 = q'_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\mathrm{v}_o \qquad \text{[VIII.11]}$$

In un urto elastico, nel sistema del centro di massa si conserva il modulo della quantità di moto di ciascuna delle due particelle.

Resta quindi da determinare solo l'angolo β_1 che $\vec{q}'_1$ forma con $\vec{q}'_{o1}$ (uguale all'angolo β_2 che $\vec{q}'_2$ forma con $\vec{q}'_{o2}$).

Tenuto conto della uguaglianza dei moduli, e considerato inoltre che la differenza $\Delta\vec{q}'$ deve essere diretta come $\vec{I}'_{i1}$ (vedi figura) si ha:

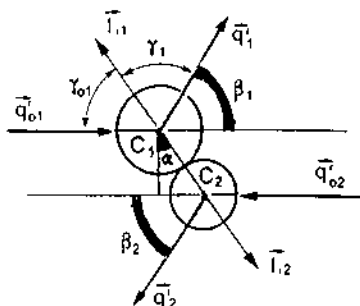
$$\gamma_{o1} = \gamma_1 \text{ e dunque } \beta_1 = \pi - 2\gamma_{o1} \qquad \text{[VIII.12]}$$

Si ha inoltre dalla figura

$$\alpha + \gamma_{o1} + \pi/2 = \pi \text{ cioe } \gamma_{o1} = \pi/2 - \alpha$$

Sostituendo nella [VIII.12] si ha in definitiva

$$\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha \\ \text{con } \cos\alpha = \dfrac{b}{R_1 + R_2} \end{cases} \qquad \text{[VIII.13]}$$

La [VIII.11] e la [VIII.13] descrivono completamente la cinematica dell'urto elastico fra particelle sferiche (in funzione del parametro d'urto b)

nel sistema del centro di massa. Notiamo che le [VIII.11] forniscono, per le velocità delle particelle:

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{q_1'}{m_1} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} v_o \\ v_2' = \dfrac{q_2'}{m_2} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v_o \end{cases} \qquad \text{[VIII.14]}$$

Usando le trasformazioni di Galileo, possiamo ora calcolare le velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ delle particelle nel sistema del laboratorio. Per far ciò teniamo conto del fatto che le componenti y delle velocità restano invariate passando dal sistema del centro di massa a quello del laboratorio, mentre alle componenti x va sommato V_c; si ha in definitiva:

$$\begin{cases} v_{1x} = \dfrac{v_o}{m_1 + m_2}(m_1 + m_2 \cos 2\alpha) \\ v_{1y} = \dfrac{v_o m_2}{m_1 + m_2} \cdot \sin 2\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} v_{2x} = \dfrac{v_o m_1}{m_1 + m_2}(1 - \cos 2\alpha) \\ v_{2y} = -\dfrac{v_o m_1}{m_1 + m_2} \sin 2\alpha \end{cases} \qquad \text{[VIII.15]}$$

Nello scrivere le [VIII.15] abbiamo tenuto conto del fatto che l'angolo β_1 è riferito alla direzione $\vec{V}_c$, mentre l'angolo β_2 (che ha valore uguale a β_1) è riferito alla direzione $-\vec{V}_c$.

Esplicitiamo le [VIII.15] in un paio di casi notevoli

Esempi

E.VIII.3. *Urto elastico fra due sfere di uguale massa.*

Urto elastico fra sfere di ugual massa

Le [VIII.15] divengono in questo caso:

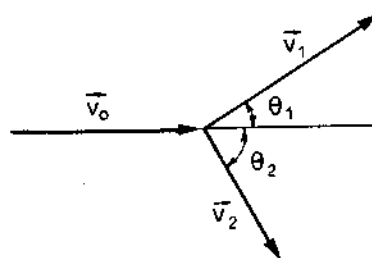
$$v_{1x} = \frac{v_o}{2}(1 + \cos 2\alpha) \qquad v_{2x} = \frac{v_o}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$v_{1y} = \frac{v_o}{2}\sin 2\alpha \qquad v_{2y} = -\frac{v_o}{2}\sin 2\alpha$$

chiamando θ_1 e θ_2 gli angoli che $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ formano con $\vec{v}_o$, si ha:

$$\text{tg}\,\theta_1 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \qquad \text{tg}\,\theta_2 = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = -\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$$

È facile verificare che vale l'identità $\text{tg}\,\theta_1 \equiv -\dfrac{1}{\text{tg}\,\theta_2}$, cioè che:

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \quad (\text{purché } \theta_1 \text{ e } \theta_2 \neq 0)$$

$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$

Infatti moltiplicando la precedente relazione per $1 + \cos 2\alpha$ e per $\sin 2\alpha$, essa diviene $\sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha$; relazione che è identicamente soddisfatta. *In un urto elastico fra sfere di ugual massa, nel sistema del laboratorio le direzioni delle velocità dopo l'urto formano sempre fra di loro un angolo retto.*

E.VIII.4. *Urto frontale (o centrale) fra due sfere.*

L'urto frontale è caratterizzato da $b = 0$; da cui segue $\cos\alpha = 0$, cioè $\alpha = \pi/2$. Per conseguenza è $2\alpha = \pi$, e dunque $\sin 2\alpha = 0$ e $\cos 2\alpha = -1$. Sostituendo nelle [VIII.15] queste divengono

$$v_{1x} = \frac{v_o}{m_1 + m_2}(m_1 - m_2) \qquad v_{2x} = \frac{2 m_1 v_o}{m_1 + m_2}$$

$$v_{1y} = 0 \qquad v_{2y} = 0$$

Il fenomeno si svolge tutto lungo l'asse x. Nel caso particolare che $m_1 = m_2$, si ha

$$v_{1x} = 0 \qquad v_{2x} = v_o$$

Nell'urto frontale, sfere di ugual massa si scambiano le velocità.

Le relazioni che abbiamo ricavato in questo paragrafo per l'urto di una sfera in moto contro una sfera ferma possono essere facilmente generalizzate al caso che anche la seconda sfera sia in movimento.

Siano $\vec{v}_{o1}$ e $\vec{v}_{o2}$ e velocità che le due sfere hanno prima dell'urto nel sistema del laboratorio. La [VIII.7] diviene:

$$\vec{V}_c = \vec{V}_{oc} = \frac{\vec{v}_{o1} m_{o1} + \vec{v}_{o2} m_{o2}}{m_1 + m_2} \qquad \text{[VIII.16]}$$

Per conseguenza, le [VIII.8] divengono:

$$\vec{v}'_{o1} = \vec{v}_{o1} - \vec{V}_c = \frac{m_2(\vec{v}_{o1} - \vec{v}_{o2})}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}'_{o2} = \vec{v}_{o2} - \vec{V}_c = \frac{m_1(\vec{v}_{o2} - \vec{v}_{o1})}{m_1 + m_2} \qquad \text{[VIII.17]}$$

Limitandoci qui al caso che le due particelle si muovano nella stessa direzione (ma non necessariamente nello stesso verso) le [VIII.15] risultano generalizzate come segue:

$$\begin{cases} v_{1x} = \dfrac{m_2(v_{o1} - v_{o2})\cos 2\alpha + v_{o1} m_1 + v_{o2} m_2}{m_1 + m_2} \\[2ex] v_{1y} = \dfrac{m_2(v_{o1} - v_{o2})}{m_1 + m_2}\sin 2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{2x} = \dfrac{m_1(v_{o2} - v_{o1})\cos 2\alpha + v_{o1} m_1 + v_{o2} m_2}{m_1 + m_2} \\[2ex] v_{2y} = \dfrac{m_1(v_{o2} - v_{o1})}{m_1 + m_2}\sin 2\alpha \end{cases} \qquad \text{[VIII.18]}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{(R_1 + R_2)}$$

VIII.3. Urto elastico di una sfera contro una parete rigida di massa infinita

Urto elastico contro una parete

L'urto elastico di una sfera di massa m contro una parete di massa infinita può essere trattato in termini molto semplici. In questo caso, in conseguenza della massa infinita del bersaglio, il sistema del laboratorio coincide col sistema del centro di massa. In virtù della conservazione della quantità di moto totale, la parete subisce una variazione di quantità di moto uguale e opposta alla variazione di quantità di moto $\Delta\vec{q}$ subita dalla particella. Poiché la parete è inizialmente ferma, il modulo della sua quantità di moto $\vec{q}_p$ è pari al modulo di $\Delta\vec{q}$: $q_p = \Delta q$. Tuttavia l'energia cinetica della parete ($q_p^2/2\,M = \Delta q^2/2\,M$, dove M è la massa della parete) diviene nulla nel limite $M \Rightarrow \infty$. L'energia cinetica del sistema coincide con l'energia cinetica della sfera. Perciò: *nell'urto elastico si conserva l'energia cinetica della sfera (e dunque il modulo della sua velocità):*

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_o$$

D'altro canto in virtù della assenza di forze di attrito, l'impulso subito dalla particella è ortogonale alla parete.

Proiettando dunque la [VIII.3.a] sugli assi normale $\hat{n}$ e tangente $\hat{t}$ alla parete (vedi figura), si ha

$$\begin{cases} I_n = \Delta q_n = m\mathrm{v}_n - m\mathrm{v}_{on} = -\,m\mathrm{v}\cos\theta - m\mathrm{v}_o\cos\theta_o = -\,m\mathrm{v}_o(\cos\theta + \cos\theta_o) \\ O = \Delta q_t = m\mathrm{v}_t - m\mathrm{v}_{ot} = m\mathrm{v}\sin\theta - m\mathrm{v}_o\sin\theta_o = m\mathrm{v}_o(\sin\theta - \sin\theta_o) \end{cases} \qquad \text{[VIII.19]}$$

La seconda delle [VIII.19] ci dice che $\sin\theta = \sin\theta_o$, cioè $\theta = \theta_o$; la prima delle due equazioni diviene per conseguenza $I_n = -\,2\,m\mathrm{v}_o\cos\theta_o$. La cinematica e la dinamica dell'urto elastico di una sfera contro una parete possono dunque essere riassunte nelle seguenti leggi:

Specularità dell'urto elastico

$$\begin{cases} \theta = \theta_o & \\ \mathrm{v} = \mathrm{v}_o & (\textit{specularità dell'urto}) \\ \vec{I}_s = -\,2\,m\mathrm{v}_o\cos\theta_o\,\hat{n} & \text{impulso subito dalla sfera} \\ \vec{I}_p = 2\,m\mathrm{v}_o\cos\theta_o\,\hat{n} & \text{impulso subito dalla parete} \end{cases} \qquad \text{[VIII.20]}$$

Esempio

E.VIII.5. *Un getto d'acqua di sezione $S = 1\ cm^2$ incide a 45°, con velocità 5 m/s, contro una parete. Schematizzando l'urto come se fosse elastico, calcolare la forza che il getto esercita sulla parete.*

L'impulso $\vec{I}_p$ subito dalla parete in un certo intervallo di tempo Δt è, secondo la [VIII.20],

$$\vec{I}_p = 2\,\Delta m\mathrm{v}_o\cos\theta_o\,\hat{n}$$

dove Δm è la massa d'acqua che incide sulla parete nell'intervallo di tempo Δt. L'impulso, e quindi anche la forza, è dunque ortogonale alla parete (nell'ipotesi di urto elastico). Poiché la situazione è di regime, la forza $\vec{f}$ è costante nel tempo; il suo modulo f è dunque legato all'impulso $\vec{I}_p$ dalla semplice relazione $|\vec{I}_p| = f \cdot \Delta t$; da cui:

$$f = \frac{|\vec{I}_p|}{\Delta t} = 2\,\frac{\Delta m}{\Delta t}\,\mathrm{v}_o\cos\theta_o$$

D'altra parte $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ (quantità d'acqua che arriva nell'unità di tempo) è data da $\frac{\Delta m}{\Delta t} = S v_0 \rho$, dove $\rho \left(= 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$ è la densità dell'acqua; infatti $S v_0$ rappresenta il volume (base per altezza) d'acqua che arriva nell'unità di tempo. Si ha dunque in definitiva

$$f = 2\, S \rho v_0^2 \cos\theta_0 = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 25 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3{,}5\ \text{N}$$

VIII.4. Urti anelastici

Urti anelastici

La trattazione che abbiamo presentato nei due precedenti paragrafi (urti elastici) vale nelle ipotesi esplicitamente fatte: cioè nel caso di urti fra oggetti macroscopici *sferici*, nell'ipotesi che siano assenti forze dissipative e forze di attrito radente. Se una di queste ipotesi viene meno, il procedimento discusso non è più valido.

Vediamo prima l'effetto di una eventuale forza dissipativa. In un urto elastico l'energia cinetica inizialmente posseduta dalle particelle si trasforma almeno parzialmente durante il contatto in energia potenziale; e viene poi integralmente resa in fase di allontanamento.

In presenza di forze dissipative ciò non è più vero: una parte dell'energia meccanica inizialmente posseduta dal sistema (e precisamente quella parte corrispondente al lavoro delle forze non conservative) va perduta in quanto tale e si trasforma, come vedremo in termodinamica, in energia termica. Dopo l'urto, *l'energia cinetica totale del sistema è minore dell'energia cinetica prima dell'urto.*

L'energia cinetica traslazionale del sistema varia nell'urto

Se nel punto di contatto O è presente attrito radente, anche qualora non vi sia strisciamento si ha comunque un effetto per cui non si conserva l'energia cinetica traslazionale del sistema. Notiamo infatti che in assenza di attrito ($\vec{f}_t = 0$) le forze che i due oggetti si scambiano sono solo le forze normali $\vec{N}$; queste hanno momento nullo rispetto ai centri C_1 e C_2, e dunque non perturbano il momento angolare delle due sfere. La velocità angolare delle due sfere (e dunque la loro energia cinetica $\frac{1}{2} I\omega^2$ del moto intorno al centro di massa) resta costante nell'urto. Nel caso che le due sfere si scambino anche una forza di attrito $\vec{f}_{t_1} = -\vec{f}_{t_2}$, queste ultime presentano momento diverso da zero rispetto ai rispettivi centri di massa, e quindi modificano in generale la rotazione delle due sfere trasformando energia cinetica traslazionale in energia cinetica rotazionale o viceversa. Quando ciò accade, di solito non si conserva nemmeno l'energia cinetica totale (traslazionale più rotazionale) per conseguenza di meccanismi analoghi a quelli discussi nell'esempio E.VII.9.

Qualora poi gli oggetti che urtano non abbiano simmetria sferica, fenomeni di trasferimento di energia cinetica dal modo traslazionale al modo rotazionale (o viceversa) si presentano in generale anche in assenza di attrito. Si pensi ad esempio a una palla da rugby che rimbalza sul terreno: anche qualora la forza vincolare esplicata dal terreno sia solo la reazione $\vec{N}$ ortogonale al terreno stesso (assenza di attrito) il momento di $\vec{N}$ rispetto al centro di massa C è diverso da zero, e modifica pertanto lo stato di moto rotazionale del sistema: cosa che non succede nel caso di una palla sferica.

Nella pratica, negli urti fra particelle macroscopiche le tre ipotesi summenzionate (simmetria sferica degli oggetti che si urtano; assenza di attrito radente; assenza di altre forze dissipative) non sono rigorosamente valide; e dunque l'energia cinetica traslazionale totale del sistema non si conserva. Si parla in questo caso di *urti anelastici*.

Se ci poniamo ancora una volta nel sistema del centro di massa (in cui $\vec{Q}'_o = \vec{q}'_{o1} + \vec{q}'_{o2} = 0$) le particelle sono costrette, anche nel caso di urto anelastico, a emergere in direzioni fra di loro uguali ed opposte con uguale quantità di moto ($\vec{Q}' = \vec{q}'_1 + \vec{q}'_2 = 0$). Tuttavia poiché in questo caso non si conserva più l'energia cinetica traslazionale, non si ha più la conservazione del modulo delle varie quantità di moto (eq. [VIII.11]). Inoltre l'angolo γ_1 non è più uguale a γ_{o1}; e analogamente γ_2 (che è uguale a γ_1) è diverso da γ_{o2}.

Le informazioni puramente geometriche non sono più sufficienti a risolvere la cinematica dell'urto, ed è necessario introdurre nel problema ulteriori informazioni fenomenologiche. Nel caso di urto anelastico fra particelle macroscopiche, è usuale il caso che il modulo della quantità di moto delle particelle emergenti dall'urto sia una frazione praticamente fissa, ε, del modulo della quantità di moto che le particelle avevano prima dell'urto. Ciò equivale a dire che l'energia cinetica finale K' è una frazione fissa ε^2 dell'energia cinetica K'_o prima dell'urto nel sistema del centro di massa. Il coefficiente ε viene detto *coefficiente di restituzione dell'urto anelastico*. Di norma, ε è compreso fra 0 e 1. Tuttavia può anche essere $\varepsilon > 1$ (urti anelastici di secondo tipo): ciò accade quando l'energia cinetica traslazionale finale viene incrementata per un contributo derivante da energia che le particelle prima dell'urto possedevano in forma di energia rotazionale (o in altra forma di energia interna).

Quando è noto (empiricamente) il coefficiente di restituzione ε, le equazioni a nostra disposizione per risolvere l'urto anelastico (nel sistema del centro di massa) sono:

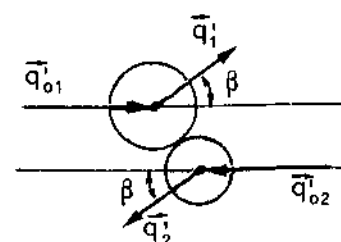
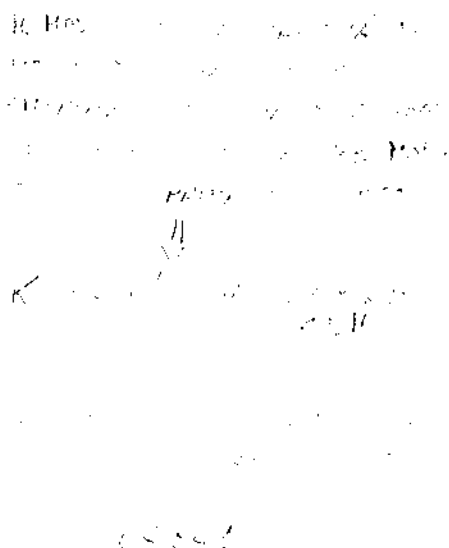
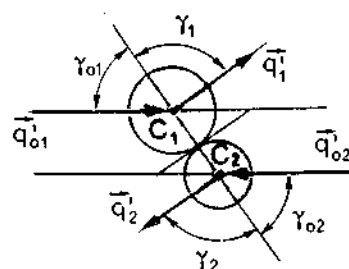
$$\vec{Q}' = \vec{Q}'_o = 0 \quad \text{ovvero} \quad \vec{q}'_1 = -\vec{q}'_2$$

(conservazione della quantità di moto)

$$K' = \varepsilon^2 K'_o \quad \text{ovvero} \quad q'_1 = \varepsilon q'_{o1} \qquad \text{[VIII.21]}$$

(coefficiente di restituzione)

Si tratta di quattro equazioni scalari a fronte delle sei incognite $\vec{q}'_1$ e $\vec{q}'_2$. Le [VIII.21] non sono dunque sufficienti a risolvere il moto; per conoscere completamente la cinematica sarebbe necessario conoscere in più il piano contenente le particelle emergenti, e l'angolo β che $\vec{q}'_1$ forma con $\vec{q}'_{o1}$ (uguale all'angolo che $\vec{q}'_2$ forma con $\vec{q}'_{o2}$). Queste informazioni erano ricavabili, nel caso dell'urto elastico, dalla conoscenza del parametro d'urto b; nel caso dell'urto anelastico, esse devono invece essere ricavate da misure dirette (che possono essere effettuate nel sistema del laboratorio) relative alla cinematica delle particelle dopo l'urto.

Il piano in cui l'urto avviene (che è lo stesso nel sistema del laboratorio e nel sistema del centro di massa) è individuato misurando, nel sistema del laboratorio, il piano contenente $\vec{q}_{o1}$ e $\vec{q}_1$; questo piano contiene necessariamente anche $\vec{q}_2$.

In questo piano, prendendo come parametro l'angolo β, è immediato verificare che al posto delle [VIII.18] abbiamo nel sistema del laboratorio, per l'urto anelastico:

$$\begin{cases} v_{1x} = \dfrac{\varepsilon m_2 (v_{o1} - v_{o2}) \cos\beta + v_{o1} m_1 + v_{o2} m_2}{m_1 + m_2} \\[2ex] v_{1y} = \dfrac{\varepsilon m_2 (v_{o1} - v_{o2})}{m_1 + m_2} \sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{2x} = \dfrac{\varepsilon m_1 (v_{o2} - v_{o1}) \cos\beta + v_{o1} m_1 + v_{o2} m_2}{m_1 + m_2} \\[2ex] v_{2y} = \dfrac{\varepsilon m_1 (v_{o2} - v_{o1})}{m_1 + m_2} \sin\beta \end{cases} \qquad \text{[VIII.22]}$$

Risulta immediatamente dalle [VIII.22] che il rapporto

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x}} \left(\text{così come il rapporto } \frac{v_{2y}}{v_{2x}}\right)$$

dipende, come unico parametro incognito, dall'angolo β (una volta noto ε). Per cui una misura dell'angolo θ_1 $\left(\text{ovvero della sua tangente } \operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{v_{1y}}{v_{1x}}\right)$, o alternativamente dell'angolo θ_2, consente di determinare completamente la cinematica dell'urto anelastico.

Un caso particolare notevole si ha quando $\beta = \pi$ (*urto anelastico frontale*). In questo caso le [VIII.22] si riducono a:

$$\begin{cases} v_{1x} = \dfrac{\varepsilon m_2 (v_{o2} - v_{o1}) + v_{o1} m_1 + v_{o2} m_2}{m_1 + m_2} \\[2ex] v_{1y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{2x} = \dfrac{\varepsilon m_1 (v_{o1} - v_{o2}) + v_{o1} m_1 + v_{o2} m_2}{m_1 + m_2} \\[2ex] v_{2y} = 0 \end{cases} \qquad \text{[VIII.23]}$$

Un altro caso notevole si ha quando $\varepsilon = 0$ (*urto completamente anelastico*). In questo caso le [VIII.22] si riducono a:

$$v_{1x} = \frac{v_{o1} m_1 + v_{o2} m_2}{m_1 + m_2} = V_{oc} = V_c$$

$$v_{1y} = 0$$

$$v_{2x} = \frac{v_{o1} m_1 + v_{o2} m_2}{m_1 + m_2} = V_{oc} = V_c \qquad \text{[VIII.24]}$$

$$v_{2y} = 0$$

In un urto completamente anelastico, le particelle emergono dall'urto con velocità fra di loro uguali e pari alla velocità $\vec{V}_{oc} = \vec{V}_c$ del centro di massa. Ciò è d'altra parte evidente, dato che la seconda delle [VIII.21] ci dice che quando $\varepsilon = 0$ l'energia cinetica nel sistema del centro di massa è nulla: ciò è come dire che in un urto completamente anelastico le particelle dopo l'urto sono ferme nel sistema del centro di massa.

Va notato che non è in generale possibile che un urto (per quanto anelastico) lasci le particelle ferme nel laboratorio (a meno che questo non coincida col sistema del centro di massa). Infatti l'energia cinetica totale K nel sistema del laboratorio può essere scritta, in virtù del teorema di König:

$$K_o = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_{oc}^2 + K'_o \qquad \text{prima dell'urto}$$

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_c^2 + K' \qquad \text{dopo l'urto}$$

Poiché $\vec{V}_{oc} = \vec{V}_c$, l'energia cinetica del centro di massa resta necessariamente costante $\left(\frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_{oc}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_c^2\right)$; la non conservazione (anelasticità) può riguardare dunque solo l'energia cinetica K' del moto intorno al centro di massa ($K' = \varepsilon^2 K'_o$). *L'urto completamente anelastico* ($\varepsilon = 0$, cioè $K' = 0$) *è caratterizzato nel laboratorio dal fatto che le particelle dopo l'urto procedono insieme* ($\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{V}_c$); non dal fatto, in generale non realizzabile, che esse siano ferme.

In un urto completamente anelastico, dopo l'urto le particelle procedono insieme

Nel caso di urti anelastici, può anche capitare che le particelle nello stato finale non siano più due sole (rottura in più frammenti, nel caso di particelle macroscopiche; o creazione di più particelle nel caso di particelle elementari). La cinematica diviene in questi casi più complessa; concettualmente, il problema si riduce comunque sempre alla misura di $3n - 4$ parametri cinematici, dove n è il numero di particelle nello stato finale e 4 il numero di equazioni (conservazione della quantità di moto e coefficiente di restituzione dell'energia).

Esempi

E.VIII.6. *Una palla di gomma cade da una altezza di 2 m e compie sul pavimento un urto parzialmente anelastico (coefficiente di restituzione $\varepsilon = 0,9$). Quale altezza raggiunge dopo il primo rimbalzo? Si trascuri la resistenza dell'aria.*

Il sistema del laboratorio coincide in questo caso col sistema del centro di massa; per cui si ha:

$$K = \varepsilon^2 K_o \qquad \text{[VIII.25]}$$

dove K è l'energia cinetica dopo l'urto e K_o quella immediatamente prima. D'altra parte, sia nella fase di caduta prima dell'urto che nella fase di risalita dopo l'urto si ha conservazione dell'energia (l'unica forza agente essendo la forza peso); per cui si ha:

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 = K \qquad h \text{ altezza massima raggiunta dopo l'urto}$$

$$mgh_o = \frac{1}{2} m v_o^2 = K_o \qquad h_o \text{ altezza da cui cade prima dell'urto.}$$

Per cui la [VIII.25] diviene:

$$mgh = \varepsilon^2 mgh_0; \quad \text{ovvero} \quad h = \varepsilon^2 h_0 = 0{,}81 \cdot 2 \text{ m} = 1{,}62 \text{ m}.$$

E.VIII.7. *Un proiettile di massa $m = 10$ g è dotato di velocità iniziale $v_{01} = 60$ m/s. Esso colpisce un sacchetto di sabbia di massa $M = 2$ kg inizialmente fermo ($v_{02} = 0$), e si conficca in esso. Con che velocità rincula il sacchetto? Quanta energia si è dissipata nell'urto?*

Poiché dopo l'urto il proiettile si muove insieme al sacchetto, si tratta di un urto completamente anelastico. La velocità finale v coincide con la velocità del centro di massa e può essere calcolata mediante la relazione:

$$Q = \mathrm{v}\,(m + M) = m\mathrm{v}_{01} + M\mathrm{v}_{02} = m\mathrm{v}_{01} = Q_0$$

Da cui

$$\mathrm{v} = \frac{m\mathrm{v}_{01}}{m + M} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3} + 2}\, 60 \frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq 0{,}3 \text{ m/s}$$

L'energia cinetica iniziale è $K_0 = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_{01}^2$; quella finale è

$$K = \frac{1}{2}(m + M)\,\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}(m + M)\left(\frac{m\mathrm{v}_{01}}{m + M}\right)^2 = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_{01}^2 \frac{m}{m + M}.$$

Per cui l'energia cinetica dissipata è

$$K - K_0 = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_{01}^2 \left(1 - \frac{m}{m + M}\right) = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_{01}^2 \frac{M}{M + m} = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_{01}^2 \cdot \frac{2{,}00}{2{,}01}$$

In virtù del grande rapporto fra le masse $\left(\frac{M}{m} = 200\right)$, il rapporto $\frac{M}{m + M} = \frac{2{,}00}{2{,}01}$ è prossimo a 1 $\left(\frac{M}{M + m} \simeq 0{,}995\right)$ per cui l'energia cinetica iniziale

$$\left(\frac{1}{2} m\mathrm{v}_{01}^2 = \frac{1}{2}\, 10 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 60^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 18 \text{ J}\right)$$

va praticamente tutta dissipata nell'urto (a meno del 5‰).

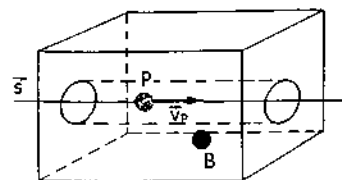
VIII.5. Sezione d'urto

Sezione d'urto

Come abbiamo visto nei precedenti paragrafi, nel caso di urti fra particelle macroscopiche la situazione che si presenta usualmente è che si conoscono a priori informazioni relative alla geometria (forma degli oggetti che urtano; parametro d'urto) e alla dinamica (coefficiente di restituzione) dell'urto; e ci si pone il problema di ricavare, in base a questi dati e usando le equazioni dinamiche, informazioni relative alla configurazione cinematica delle particelle dopo l'urto.

Nel caso di urti fra particelle microscopiche, di solito ci si trova alle prese col problema inverso: a partire da misure della configurazione cinematica dopo l'urto, si cerca di ricavare informazioni relative alla geometria degli oggetti che urtano e alle caratteristiche delle forze che si scambiano.

Come conseguenza della impossibilità di determinare le condizioni iniziali dell'urto con precisione confrontabile con le grandezze geometriche e cinematiche che determinano il fenomeno (impossibilità che non è solo di natura pratica, ma è spesso addirittura concettuale, essendo inevitabile conseguenza dei principi della meccanica quantistica) i risultati delle misure e le caratteristiche del fenomeno d'urto sono fra di loro legati da leggi di carattere statistico: leggi cioè che ci informano sulla *probabilità* che certe configurazioni cinematiche si presentino sperimentalmente, ma che non sono in grado di farci prevedere con certezza quale sarà il risultato di ogni particolare evento d'urto.

Consideriamo un recipiente, ad esempio di forma parallelepipeda; e supponiamo di sapere che all'interno del volume si trovi (in una posizione a noi non nota determinata dal caso) una particella B (*bersaglio*). Facciamo attraversare il recipiente da una particella P (*proiettile*) dotata di velocità $\vec{v}_P$ parallela al lato di lunghezza l. Ci chiediamo quale sia la probabilità p che il proiettile urti il bersaglio: ricordiamo che la probabilità è definita come rapporto fra il numero di casi favorevoli all'evento e il numero di casi possibili. Se le due particelle sono schematizzabili come sfere di raggio rispettivo R_1 ed R_2 l'urto avviene quando il centro della sfera B dista per meno di $R_1 + R_2$ dal percorso $\vec{s}$ del centro della sfera P; cioè quando il centro di B si trova all'interno del cilindro con raggio di base $r = R_1 + R_2$ (e dunque con superficie di base $\sigma = \pi (R_1 + R_2)^2$) e altezza l. La probabilità p che l'urto avvenga è data dal rapporto fra il volume $\tau = \sigma \cdot l = \pi (R_1 + R_2)^2 \cdot l$ del cilindro e il volume totale V del recipiente in cui il bersaglio è contenuto:

Probabilità che un urto abbia luogo

$$p = \frac{\sigma \cdot l}{V} \qquad \sigma = \pi (R_1 + R_2)^2$$

Se le particelle bersaglio sono in totale N anziché una sola (pensiamo ad esempio al caso di un gas contenuto nel recipiente) la probabilità p che il proiettile subisca un urto diviene N volte più grande:

$$p = \frac{\sigma \, l \, N}{V} = \frac{\sigma \, N}{S}.$$

dove $S = \dfrac{V}{l}$ è la sezione del bersaglio ortogonalmente alla direzione del proiettile. σ è detta *sezione d'urto totale*. Dunque *la sezione d'urto totale* σ *può essere definita come quella grandezza* (con le dimensioni di un'area) *che moltiplicata per il numero di particelle-bersaglio per unità di area* S (ortogonalmente al moto del proiettile) *fornisce la probabilità che il proiettile subisca un urto.*

Sezione d'urto totale

A seconda della forma in cui ci sono disponibili i dati relativi al bersaglio, la precedente espressione può essere scritta in forma diversa:

$$p = \frac{\sigma \, l \, N}{V} = \sigma \, l \frac{m}{m_0} \frac{1}{V} = \frac{\sigma \, l \, \rho}{m_0} = \frac{\sigma \, l \, \rho \, \vartheta}{M} \qquad \text{[VIII.26]}$$

dove sono state fatte le seguenti posizioni:

$N = \dfrac{m}{m_0}$: m = massa totale del bersaglio; m_0 = massa di ognuna delle particelle-bersaglio

$\rho = \dfrac{m}{V}$: densità del gas che costituisce le particelle-bersaglio

$m_0 = \dfrac{M}{\vartheta}$: M = peso molecolare; ϑ = numero di Avogadro.

Sperimentalmente, la probabilità p può essere misurata inviando un gran numero N_p di proiettili. e contando il numero di volte n in cui si verifica un urto:

$$p = \frac{n}{N_p} \qquad \text{[VIII.27]}$$

Frequenza e probabilità

Empiricamente, la frequenza $\dfrac{n}{N_p}$ si avvicina infatti, quando si fa un grande numero di prove, alla probabilità p (*legge empirica del caso*).

Inserendo la [VIII.27] nella [VIII.26], si ricava così sperimentalmente la sezione d'urto σ:

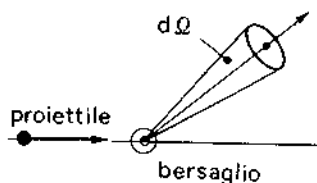
$$\sigma = \frac{n}{N_p} \frac{M}{l \rho \cdot \vartheta} \qquad \text{[VIII.28]}$$

che ci fornisce informazioni sulle dimensioni delle sferette che urtano ($\sigma = \pi (R_1 + R_2)^2$). Nel caso in cui le particelle in gioco siano particelle atomiche o subatomiche, le cui interazioni avvengono a distanza e non per contatto, la sezione d'urto fornisce informazioni relative alle «dimensioni efficaci» delle particelle ai fini dell'urto.

Analogamente alla sezione d'urto totale σ si introduce la *sezione d'urto differenziale* $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ come quella grandezza (con le dimensioni di un'area) che moltiplicata per il numero $\dfrac{N}{S}$ di particelle-bersaglio per unità di area e per l'angolo solido $d\Omega$, fornisce la probabilità dp che il proiettile subisca un urto dal quale emerga entro l'angolo solido $d\Omega$:

$$dp = \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{N}{S} \cdot d\Omega \qquad \text{[VIII.29]}$$

La sezione d'urto differenziale è funzione, in generale, della direzione che individua l'angolo solido $d\Omega$; direzione specificata da due angoli (θ, Φ).

La misura della sezione d'urto differenziale consente, attraverso tecniche di analisi che non è qui il caso di approfondire, di ricavare informazioni relative alla forma del bersaglio e del proiettile.

VIII.6. **Urti di sistemi materiali**

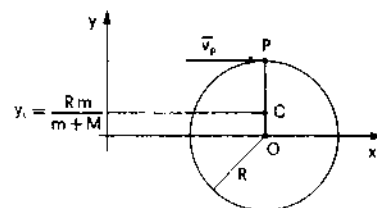
Come abbiamo accennato all'inizio del capitolo, gli urti fra sistemi materiali possono essere trattati in termini concettualmente analoghi al caso dei punti materiali, pur con la complicazione pratica rappresentata da un più elevato numero di gradi di libertà e dalla contestuale disponibilità di

un maggior numero di equazioni. Ciò almeno fino a che i sistemi materiali coinvolti nell'urto siano liberi (cioè non vincolati).

Capita tuttavia anche che uno dei *sistemi* materiali (ad esempio il bersaglio) sia *vincolato*, cioè sia costretto mediante opportuni sostegni a muoversi rispettando prefissate condizioni geometriche (ad esempio urto di un proiettile contro un pendolo composto: quest'ultimo è vincolato, e può compiere solo rotazioni intorno al suo asse di rotazione fisso). In questo caso occorre fare attenzione, nel momento in cui si scrivono le equazioni dinamiche, al fatto che le *reazioni vincolari* hanno in generale anch'esse (così come le forze scambiate fra i due oggetti che urtano) *caratteristiche impulsive*: sono cioè reazioni che benché siano presenti solo durante il breve tempo Δt dell'urto, sono tuttavia così intense durante tale intervallo di tempo che il loro impulso non può essere trascurato.

Anziché impostare i problemi d'urto fra sistemi in termini generali (cosa che ci porterebbe lontano dagli scopi che si prefigge questo libro) ci limitiamo qui a discutere tre esempi: uno relativo a sistemi non vincolati, e due relativi al caso che il bersaglio sia soggetto a vincoli.

Esempi

E.VIII.8. *Un disco omogeneo, di massa M e raggio R, è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito; la giacitura del disco è anch'essa orizzontale. Il disco viene colpito da un proiettile di massa m, il quale procede prima dell'urto con velocità $\vec{v}_p$ la cui direzione è tangente al bordo del disco (urto periferico). Nell'urto, il proiettile si conficca al bordo del disco. Determinare la cinematica del moto dopo l'urto, e calcolare l'energia cinetica ΔK che si dissipa nell'urto.*

In questo caso il sistema è isolato (assenza di reazioni vincolari impulsive) e dunque si conservano la sua quantità di moto totale $\vec{Q}$ e il suo momento angolare $\vec{P}$. Dopo l'urto (proiettile solidale al disco) il sistema ha tre gradi di libertà (posizione del centro di massa C nel piano; angolo del sistema intorno a C). Il problema può dunque essere completamente risolto usando la conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto; quest'ultima equazione può essere scritta in forma scalare considerato che l'unica componente diversa da zero di $\vec{P}$ è quella ortogonale al piano

$$\begin{cases} Q_x = Q_{ox} \\ Q_y = Q_{oy} \\ P = P_0 \end{cases}$$

Tenuto conto del fatto che prima dell'urto il disco è fermo, queste equazioni possono essere esplicitate come segue:

$$\begin{cases} (M+m)\,v_{cx} = m v_{ox} = m v_p \\ (M+m)\,v_{cy} = 0 \\ |\vec{r} \times m\vec{v}_p| = I\omega \end{cases}$$

avendo scelto come polo per il calcolo dei momenti il centro di massa C del sistema. La seconda di queste equazioni ci dice che $v_{cy} = 0$, cioè il centro di massa si muove parallelamente all'asse x; la sua ordinata $y_c = \dfrac{R \cdot m + O \cdot M}{m + M} = R\dfrac{m}{m + M}$ è costante e ci è nota. La prima di queste equazioni ci consente di calcolare la velocità del centro di massa $v_c = v_{cx} = m\dfrac{v_p}{m + M}$.

Ci resta da calcolare la velocità angolare ω con cui il sistema ruota dopo l'urto intorno a C; cosa che può essere fatta usando la terza delle equazioni scritte sopra:

$$\omega = \frac{|\bar{r} \times m\bar{v}_p|}{I}$$

Per esplicitare questo calcolo, notiamo che:

a) Il momento angolare iniziale può essere scritto come

$$|\bar{r} \times m\bar{v}_p| = (R - y_c)\, m v_p = \left(R - \frac{Rm}{m+M}\right) \cdot m v_p = \frac{RM}{m+M}\, m v_p = \frac{RmM}{m+M}\, v_p$$

b) Il momento di inerzia I rispetto al centro di massa C è la somma del momento di inerzia del disco I_d e del momento di inerzia I_p del proiettile; questi sono dati rispettivamente da:

$$I_d = \frac{1}{2} MR^2 + My_c^2 = \frac{1}{2} MR^2 + M\left(\frac{Rm}{M+m}\right)^2 = MR^2\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{m}{m+M}\right)^2\right)$$

(teorema di Steiner)

$$I_p = m(R - y_c)^2 = mR^2\left(\frac{M}{m+M}\right)^2$$

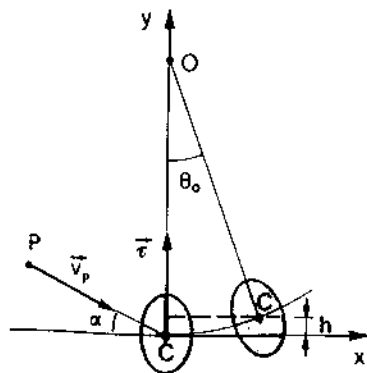
Si ha dunque in definitiva:

$$I = I_d + I_p = \frac{MR^2}{2(m+M)}(M + 3m)$$

da cui

$$\omega = \frac{|\bar{r} \times m\bar{v}_p|}{I} = \frac{2mv_p}{R(M+3m)}$$

Una volta noti ω e v_c, si calcola immediatamente l'energia cinetica dissipata:

$$\Delta K = \frac{1}{2} mv_p^2 - \frac{1}{2}(M+m)v_c^2 - \frac{1}{2} I\omega^2 = v_p^2 \frac{mM}{2(M+3m)}$$

E.VIII.9. *Un sacco di sabbia B di massa M è appeso al soffitto mediante un cavo flessibile inestensibile; sia l la distanza fra il punto O di sospensione e il centro di massa C del sacco. Contro il sacco inizialmente fermo, viene sparato un proiettile P di massa m, la cui velocità $\bar{v}_p$ forma un angolo α con l'orizzontale. A seguito dell'urto il sacco rincula e comincia ad oscillare. Trovare la relazione fra $\bar{v}_p$ e l'angolo di elongazione massima θ_0.*

In questo esempio, il bersaglio B è vincolato tramite il cavo inestensibile, e quindi non è detto che si conservi la quantità di moto totale $\bar{Q}$ del sistema. Tuttavia va notato che la reazione $\bar{\tau}$ esercitata dal vincolo è necessariamente verticale (cavo flessibile) e tale è dunque anche il suo impulso $\bar{I}_\tau$ ($\bar{I}_{\tau x} = 0$). Proiettando sugli assi la prima equazione cardinale (integrata nel tempo fra un istante t_0 immediatamente precedente l'urto e un istante t_1 immediatamente successivo) si ha pertanto:

$$\begin{cases} Q_x - Q_{ox} = 0 \\ Q_y - Q_{oy} = I_{\tau y} \end{cases} \qquad \text{[VIII.30]}$$

Osserviamo ora che prima dell'urto l'unico contributo alla quantità di moto del sistema è dovuto al proiettile (il sacco è fermo): dunque

$$Q_{0x} = m v_p \cos\alpha; \quad Q_{0y} = -m v_p \sin\alpha .$$

Mentre, essendo il cavo inestensibile, si ha $Q_y = 0$ subito dopo l'urto (il sistema prende a muoversi orizzontalmente, sia v la sua velocità). Le equazioni [VIII.30] divengono pertanto:

$$\begin{cases} (m + M)\,v = m v_p \cos\alpha \\ m v_p \sin\alpha = I_{\tau y} \end{cases}$$

La seconda di queste equazioni consente di calcolare l'impulso $I_{\tau y}$ della reazione vincolare; la prima consente di calcolare v in funzione di v_p e $\cos\alpha$:

$$v = \frac{m v_p \cos\alpha}{(m + M)} \qquad \text{[VIII.31]}$$

Dopo l'urto, il sistema si muove sottoposto alla sola forza peso, e dunque si può applicare il teorema di conservazione dell'energia fra la posizione iniziale (energia cinetica pari a $\frac{1}{2}(m + M)\,v^2$; energia potenziale $(m + M)\,g \cdot y = 0$) e la posizione di elongazione massima (energia cinetica nulla; energia potenziale $(m + M)\,g h = (m + M)\,g l\,(1 - \cos\theta_0)$).

$$\frac{1}{2}(m + M)\,v^2 = \frac{1}{2}(m + M)\left(\frac{m v_p \cos\alpha}{m + M}\right)^2 = (m + M)\,g l\,(1 - \cos\theta_0)$$

da cui

$$(1 - \cos\theta_0) = \left(\frac{m v_p \cos\alpha}{m + M}\right)^2 \frac{1}{2 g l}$$

che è la relazione cercata.

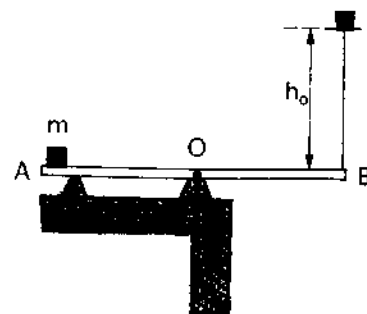
E.VIII.10. *Una sbarretta omogenea, di lunghezza l e massa M, è incernierata a un asse orizzontale O passante per il suo centro, ed è mantenuta orizzontale su un appoggio A. Sopra l'estremo sostenuto da A è appoggiata una massa m. Sull'altro estremo, da una altezza h_0 viene fatta cadere una massa M che si conficca nell'estremo B. A quale altezza massima h rimbalza la massa m?*

Suddividiamo il fenomeno in tre fasi: a) caduta della massa M; b) urto di M con la sbarretta; c) moto di m sotto l'azione della forza peso.

a) Trascurando la resistenza dell'aria, la velocità v_0 con cui la massa M urta in B è calcolabile col teorema di conservazione dell'energia: $v_0 = \sqrt{2 g h_0}$.

b) nell'urto non si conserva la quantità di moto, perché in O si esplica una reazione impulsiva; si conserva però il momento della quantità di moto rispetto a O:

$$M v_0\, l/2 = I\omega + M v\, l/2 + m v\, l/2 \qquad \text{[VIII.32]}$$

I è il momento di inerzia della sbarretta $\left(I = \frac{M l^2}{12}\right)$; ω è la sua velocità angolare dopo l'urto. $Mv\, l/2$ è il momento angolare della massa M subito dopo l'urto; poiché essa si conficca in B, è $v = \omega \cdot l/2$. $m v\, l/2$ è il momento angolare della massa m subito dopo l'urto; poiché essa parte insieme all'estremo A, la sua velocità iniziale è anch'essa $v = \omega\, l/2$.

Esprimendo il secondo membro della [VIII.32] in funzione della sola v $\left(\omega = \frac{v \cdot 2}{l}\right)$, essa diviene:

$$M v_o \, l/2 = \frac{M l^2}{12} \frac{v \cdot 2}{l} + M v \frac{l}{2} + m v \frac{l}{2} = v \frac{l}{2} \left(m + \frac{4}{3} M\right)$$

da cui

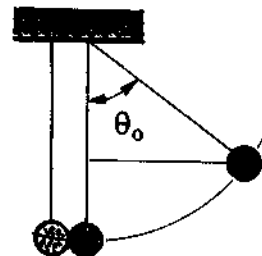
$$v = \frac{M v_o}{m + \frac{4}{3} M} = \frac{M \sqrt{2 g h_o}}{\left(m + \frac{4}{3} M\right)}$$

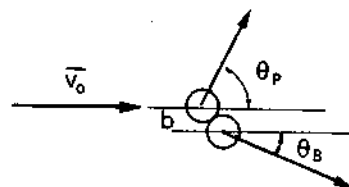
c) Usando il teorema di conservazione dell'energia si ha:

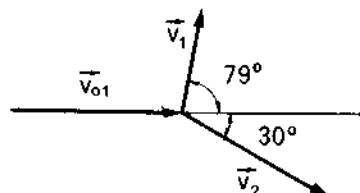
$$h = \frac{v^2}{2 g} = \frac{v_o^2}{2 g} \left(\frac{M}{m + \frac{4}{3} M}\right)^2 = h_o \left(\frac{M}{m + \frac{4}{3} M}\right)^2$$

Esercizi del capitolo VIII

VIII.1. Due sfere di avorio P_1 e P_2 di masse rispettive $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$ sono appese ciascuna ad un filo di lunghezza l, in modo da costituire due pendoli semplici contigui. Lasciando la massa m_2 ferma nella posizione iniziale ($\theta_{o2} = 0$; $v_{o2} = 0$), la massa m_1 viene portata a formare un angolo $\theta_{o1} = \theta_o = 45°$ con la verticale, e lasciata andare da ferma. Quali angoli θ_1 e θ_2 di elongazione massima raggiungono i due pendoli dopo l'urto, supposto elastico?

(Risposte: $\theta_1 \simeq 15{,}5°$; $\theta_2 \simeq 30°$)

VIII.2. Una biglia di acciaio B (bersaglio), appoggiata su un piano orizzontale, subisce un urto elastico da parte di una biglia di acciaio P (proiettile) che prima dell'urto si muove con velocità $\vec{v}_{o1} = \vec{v}_o$ di modulo $v_o = 2$ m/s. Il raggio delle due sfere è 3 cm. Se il bersaglio rincula nel laboratorio ad un angolo $\theta_B = 20°$ rispetto a $\vec{v}_o$, a quale angolo θ_P viene deviato il proiettile? Quanto vale il parametro d'urto b?

(Risposte: $\theta_P = 70°$; $b = 5{,}65$ cm)

VIII.3. Una biglia P_1 di massa $m_1 = 100$ g e velocità $\vec{v}_{o1} = \vec{v}_o$ pari a 2 m/s urta elasticamente contro una biglia P_2 inizialmente ferma di massa $m_2 = m_1 = 100$ g. Dopo l'urto, la velocità $\vec{v}_1$ di P_1 forma un angolo $\theta_1 = 45°$ con $\vec{v}_{o1}$. A quale angolo θ_2 rincula P_2? Quanto valgono i moduli v_1 e v_2 della velocità delle due biglie dopo l'urto?

(Risposte: $\theta_2 = -45°$; $v_1 = v_2 = 1{,}41$ m/s)

VIII.4. Due masse sferiche $m_1 = 100$ g e $m_2 = 150$ g di raggi rispettivi $R_1 = 1{,}4$ cm e $R_2 = 1{,}6$ cm urtano elasticamente. Prima dell'urto la massa m_2 è ferma e la massa m_1 ha velocità $\vec{v}_{o1} = \vec{v}_o = 2$ m/s con parametro d'urto $b = 1{,}5$ cm. Quanto valgono le velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ (in modulo e direzione) delle particelle dopo l'urto?

(Risposte: $v_1 = 1{,}06$ m/s; $\theta_1 = 79°$; $v_{22} = 1{,}39$ m/s; $\theta_2 = -30°$)

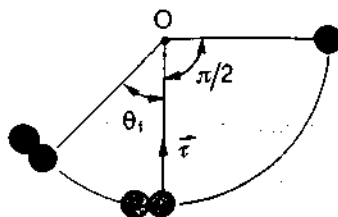
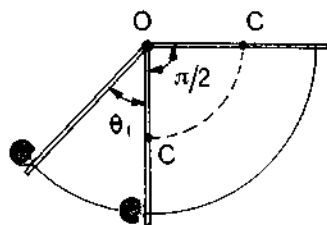
VIII.5. Due sfere P_1 e P_2 di massa rispettiva $m_1 = 100$ g $m_2 = 150$ g compiono un urto frontale. Prima dell'urto la sfera P_1 ha velocità $v_{o1} = v_o = 4$ m/s e la sfera P_2 è ferma. Dopo l'urto P_1 ha velocità $v_1 = 0$. Quanto vale il coefficiente di restituzione ε dell'urto? Quando vale la velocità v_2 di P_2 dopo l'urto? Quanto è l'energia cinetica ΔK che si è dissipata nell'urto?

(Risposte: $\varepsilon = 0{,}67$; $v_2 = 2{,}67$ m/s; $\Delta K = 0{,}26$ J)

VIII.6. I due pendoli di cui all'esercizio 1 (ma costituiti ora di materiale diverso) vengono fatti urtare a partire dalle stesse condizioni iniziali ivi specificate ($\theta_1 = 45°$; $v_{o1} = 0$; $\theta_{o2} = v_{o2} = 0$). L'urto è anelastico (frontale). La massa m_1 rincula dopo l'urto con elongazione massima $\theta_1 = 8°$. Quale è il coefficiente di restituzione dell'urto? Quale elongazione massima compie la massa m_2?

(Risposte: $\varepsilon = 0{,}76$; $\theta_2 \simeq 26{,}5°$)

VIII.7. Una sfera P_1 praticamente puntiforme di massa m è appesa a un filo inestensibile di lunghezza l; il filo teso viene portato a formare un angolo di 90° con la verticale, e lasciato andare da fermo. Quando passa per la posizione verticale, la sfera P_1 compie un urto completamente anelastico con una seconda sfera P_2 puntiforme di massa m inizialmente ferma. Quale elongazione massima θ_f compie dopo l'urto il pendolo semplice costituito dalle due sfere?

(Risposta: $\theta_f \simeq 41{,}5°$)

VIII.8. Una sbarretta omogenea di lunghezza l e massa m è incernierata intorno a un asse orizzontale O. Essa viene portata in posizione orizzontale e lasciata andare da ferma. Quando essa passa per la posizione verticale, il suo estremo compie un urto completamente anelastico contro una massa puntiforme m. Quale elongazione massima θ_f compie il pendolo dopo l'urto? Si trascurino gli attriti. (Risposta: $\theta_f \simeq 23{,}6°$)

VIII.9. Quale è la quantità di energia cinetica ΔK che si dissipa nell'urto anelastico di cui all'esempio E.VIII.10? Per i calcoli numerici si assuma $m = 50$ g; $M = 210$ g; $h_0 = 1$ m. (Risposta: $\Delta K = 0{,}75$ J)

Suggerimenti per la soluzione dei problemi del capitolo VIII

VIII.1. Vedere l'esempio E.VIII.4 per quanto riguarda l'urto. Prima dell'urto e dopo l'urto ogni sferetta si muove rispettando la legge di conservazione dell'energia meccanica.

VIII.2. Si usino le [VIII.15]. Vedi anche l'esempio E.VIII.3.

VIII.3. Per il calcolo di θ_2 vedi l'esempio E.VIII.3. Per il calcolo di v_1 e v_2, una volta noti θ_1 e θ_2 si può far ricorso alla conservazione della quantità di moto totale espressa direttamente nel sistema del laboratorio.

VIII.4. Si usino le [VIII.15].

VIII.5. Si usino le [VIII.23].

VIII.6. Si usino le [VIII.23]. Prima dell'urto e dopo l'urto ogni sferetta si muove rispettando la legge di conservazione dell'energia meccanica.

VIII.7. Prima e dopo l'urto, il pendolo si muove rispettando il teorema di conservazione dell'energia meccanica. Nell'urto (anelastico) non si conserva l'energia cinetica, ma si conserva la quantità di moto totale.

VIII.8. Prima dell'urto e dopo l'urto vale il teorema di conservazione dell'energia. Nell'urto si conserva il momento angolare totale.

VIII.9. Le condizioni cinematiche prima e dopo l'urto sono state calcolate nell'esempio E.VIII.10. ΔK può essere calcolata semplicemente per differenza.

Capitolo nono

Meccanica dei fluidi

IX.1. Fluidi

In questo capitolo studieremo la meccanica di sistemi materiali per i quali non può essere applicata la schematizzazione del corpo rigido. Si tratta di sistemi materiali, come liquidi o gas, costituiti da moltissimi elementi di piccole dimensioni, come atomi o molecole, in continuo movimento microscopico gli uni rispetto agli altri. La forma dei sistemi fluidi è generalmente fissata da vincoli esterni (recipienti). Nel caso di sostanze allo stato gassoso, il recipiente, oltre che la forma, determina anche il volume.

Fluidi: liquidi e gas

Nell'ambito dello studio della meccanica dei fluidi, i liquidi si presentano come sistemi sostanzialmente incomprimibili, e quindi a densità costante; i gas, invece, sono sistemi a volume variabile, presentando in modo evidente la proprietà di comprimibilità.

Un fluido si caratterizza, dunque, come un aggregato di particelle non legate in modo rigido, ma neppure completamente indipendenti. Le forze intermolecolari non sono trascurabili e sono responsabili delle proprietà dei fluidi oltre che della loro capacità di trasmettere azioni meccaniche tra punti diversi del fluido stesso.

Appare evidente come la meccanica dei fluidi sia un settore molto vasto della fisica e dell'ingegneria, che affronta problemi che vanno dal moto dei liquidi (condotte, fiumi, oceani, sistema circolatorio sanguigno), alle azioni su corpi in movimento in liquidi e gas (navi, aerei, proiettili, razzi, turbine), ai moti dell'atmosfera, ai principi di galleggiamento, alle strutture di dighe, ecc.

In questo testo verranno toccati solo i principi generali della meccanica (statica e dinamica) dei fluidi, mentre testi specializzati copriranno gli svariati settori di cui abbiamo fatto menzione.

Fluidi come sistemi continui

Considereremo i fluidi come sistemi materiali di cui si individueranno *porzioni finite*, eventualmente molto piccole, e di queste si considererà lo stato di *moto d'insieme*, prescindendo, ovviamente, dai movimenti individuali dei numerosissimi componenti microscopici (atomi e molecole).

In questo approccio, un fluido sarà considerato *come un «continuo»*, nel senso che, nello sceglierne delle porzioni, si assumerà lecita la schematizzazione matematica delle funzioni continue, in base alla quale un volumetto dV potrà essere infinitesimo e pur sempre la massa dm in esso contenuta non presenterà discontinuità.

Ciò significa, in pratica, che i volumetti considerati potranno essere anche molto piccoli, ma comunque tali da contenere un grandissimo numero medio di molecole così che, per esempio, la densità $\rho = dm/dV$ avrà sempre valori non nulli in un punto qualsiasi interno al fluido considerato.

In sostanza, è lecito prescindere dalla natura intimamente discontinua della materia (atomi e molecole) perché ogni tipo di possibile e ragionevole misura considera elementi di volume comunque gremiti di molecole. Per esempio, una sferetta di raggio 0,1 mm, riempita d'acqua, contiene ancora qualcosa dell'ordine di 10^{17} molecole.

IX.2. Azioni meccaniche sui fluidi

Forze nei fluidi

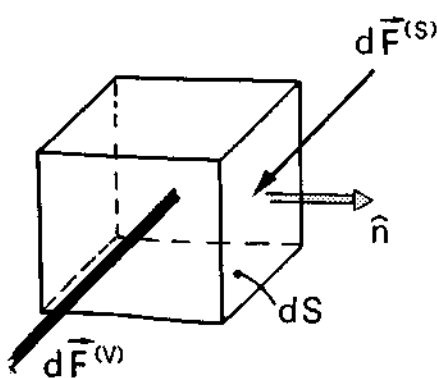
Per studiare la statica e la dinamica di un fluido come sistema continuo, occorre analizzare il comportamento degli elementi di volume sotto l'azione delle *forze* che su di essi si esercitano.

È conveniente suddividere le forze, attive su un elemento di volume dV, in *due categorie* principali a seconda che responsabili di queste forze siano:

Forze di superficie

a) elementi a contatto con la superficie che delimita il volume dV, nel senso che il volume considerato può pensarsi racchiuso in una specie di pellicola di contorno, che lo mantiene distinto da ciò che lo circonda; gli elementi a contatto con dV, come altri elementi di fluido, pareti, corpi a contatto ecc, trasmettono le così dette *forze di superficie* ($d\vec{F}^{(s)}$);

Forze di volume

b) elementi capaci di esercitare forze proporzionali al volume dV dell'elemento considerato (per esempio forze gravitazionali o centrifughe, che, essendo proporzionali alla massa dm contenuta nel volumetto dV, risultano proporzionali al volume stesso per effetto della relazione $dM = \rho\, dV$, con ρ uniforme dentro dV); si hanno allora le così dette *forze di volume* ($d\vec{F}^{(v)}$).

Considerato un elemento dV a forma di parallelepipedo ed una sua faccia di area dS, il cui versore della normale sia $\vec{n}$, le forze di superficie, che dall'esterno si esercitano su dS, saranno rappresentate dal vettore $d\vec{F}^{(s)}$.

È utile decomporre il vettore $d\vec{F}^{(s)}$ in una componente $dF_n^{(s)}$ normale a dS ed in una componente $dF_t^{(s)}$ tangente a dS.

Le forze di volume agenti sull'elemento dV saranno indicate con $d\vec{F}^{(v)}$ ed espresse dalla relazione:

$$d\vec{F}^{(v)} = \vec{G}\, dm$$

che evidenzia la diretta proporzionalità alla massa dm ed in cui $\vec{G}$ rappresenta un vettore che ha le dimensioni di un'accelerazione. Per esempio, nel caso in cui la forza di volume sia solo il peso, si ha $\vec{G} = \vec{g}$, con $\vec{g}$ accelerazione di gravità.

Riguardo le componenti normale e tangenziale della forza di superficie, è utile introdurre il loro rapporto con l'area dell'elemento dS su cui si esplicano:

Sforzi

$$p = \frac{dF_n^{(s)}}{dS} \quad (\textit{sforzo normale})$$

$$\tau = \frac{dF_t^{(s)}}{dS} \quad (\textit{sforzo di taglio})$$

Le dimensioni fisiche degli sforzi, che sono quantità scalari, sono quelle di una forza per unità di superficie:

$$[p] = [\tau] = \left[\frac{N}{\mathrm{m}^2}\right] = [Pa] ,$$

avendo indicato con Pa (Pascal) la forza di 1 N distribuita sulla superficie di 1 m² (unità di misura degli sforzi nel S.I.).

Pressione

Lo sforzo normale su una superficie di un fluido si dice anche *pressione*.

Fluidi in quiete

Se una porzione di fluido è in quiete e non sono presenti moti di insieme (convettivi) all'interno del fluido – che è come dire, da un punto di vista microscopico, che attraverso ogni superficie interna al liquido considerato passano in media uguali numeri di molecole in un senso e nell'altro – allora debbono essere assenti forze tangenziali sulla superficie di contorno. Se fossero presenti sforzi di taglio, gli strati fluidi superficiali scorrerebbero gli uni sugli altri generando dei moti di insieme, incompatibili con la ipotizzata situazione di equilibrio. Ciò implica che, in un *fluido in equilibrio*, le forze di superficie si riducono alla *sola pressione*.

Fluidi in moto

Se un fluido è in *movimento*, oltre agli sforzi normali debbono essere considerati *anche* gli *sforzi di taglio*. Infatti, pur potendo muoversi gli uni rispetto agli altri, gli elementi di fluido risentono di forze di coesione (forze intermolecolari attrattive) che, di solito, non sono trascurabili. Quando una porzione di fluido è posta in movimento rispetto a porzioni confinanti (o a pareti di confinamento), si evidenzia una sorta di *attrito interno* nella forma di uno sforzo di taglio. Tale attrito interno dipende dal fluido considerato e dal suo stato. Il parametro che lo quantifica è la *viscosità*.

Viscosità e attriti interni

Per definire la viscosità di un fluido, consideriamo un recipiente che contenga del liquido in quiete. Sulla superficie libera del liquido poniamo una tavola galleggiante di area S alla quale applichiamo una forza F costante e diretta tangenzialmente alla superficie del liquido. Immaginiamo che la tavola sia abbastanza grande perché siano trascurabili gli effetti vorticosi ai suoi bordi. Gli strati superficiali di liquido bagnano la tavola e procedono con essa. In modo analogo, lo strato più basso di liquido, che bagna il fondo del recipiente, resta fermo. Gli strati intermedi si muovono con velocità che dipendono dalla profondità e che variano tra il valore zero del fondo ed il valore che compete alla tavola trascinata. L'effetto di attrito che il liquido viscoso esercita sulla tavola si manifesta con evidenza nella legge di moto che si osserva sperimentalmente per la tavola: la sua velocità di regime $\bar{v}_0$ è costante. Ciò significa che si realizza un equilibrio dinamico tra la forza $\bar{F}$ ed una forza di attrito $\bar{A}$. In termini di moto del liquido, lo strato liquido che bagna la tavola procede

con velocità v_o. Lo strato immediatamente sottostante viaggia con velocità inferiore frenando lo strato superiore e trascinando, a sua volta, lo strato ad esso inferiore. E così via, fino ad arrivare allo strato fermo che bagna il fondo del recipiente. I fatti sperimentali possono essere sintetizzati nella seguente relazione tra le velocità di due strati a quote y ed $(y + dy)$, rispettivamente:

$$v(y + dy) - v(y) = \frac{1}{\eta} \frac{F}{S} dy$$

dove la costante η è detta *coefficiente di viscosità* (o coefficiente di Poiseuille) ed ha unità di misura e dimensioni:

Coefficiente di viscosità

$$[\eta] = \left[\frac{N}{m^2} m \frac{s}{m}\right] = \left[\frac{Ns}{m^2}\right] = \left[kg \cdot \frac{m}{s^2} \frac{s}{m^2}\right] = [kg\ m^{-1}\ s^{-1}] = [M L^{-1} T^{-1}]$$

Nel sistema C.G.S., l'unità di misura è il *poise* (g cm^{-1} s^{-1}). La relazione precedente, tenendo conto che il rapporto F/S è lo sforzo di taglio τ, può essere scritta anche nella forma:

$$dv = \frac{1}{\eta} \tau\, dy \qquad [IX.1]$$

COEFFICIENTI DI VISCOSITÀ	
Sostanza	$\eta\left[\frac{Ns}{m^2}\right]$
Olio di ricino	~ 1 a 20°C
Glicerina	~ 1,5 a 20°C
Acqua	$1,8 \cdot 10^{-3}$ a 0°C $0,3 \cdot 10^{-3}$ a 95°C
Olio SAE 20	0,3 a 40°C

Tipici valori del coefficiente di viscosità, nel sistema internazionale, sono riportati nella tabella a fianco.

La viscosità di un liquido causa una continua dissipazione di energia, quando uno strato scorre su uno adiacente. Nell'esempio considerato, a regime, la forza F sposta il punto di applicazione, e quindi compie lavoro, senza che la tavola aumenti la sua energia cinetica. Ciò significa che l'energia dissipata si ritrova, alla fine, in agitazione termica delle molecole del liquido.

Come si vede dalla tabella dei coefficienti di viscosità, esiste un'ampia variabilità di valori tra sostanza e sostanza, oltre che, in minor misura, tra temperature diverse per la stessa sostanza.

In molti casi è possibile trascurare, nello studio del moto di un fluido, gli effetti della viscosità.

Liquido perfetto: incompressibile e privo di viscosità

Si dice *liquido perfetto* un fluido che abbia le seguenti caratteristiche:

- ogni sua porzione abbia volume, e quindi densità, indipendenti dalla pressione a cui è sottoposto (fluido *incompressibile*);
- il *coefficiente* di *viscosità* η sia *nullo*.

Esempio

E.IX.1. *Nella situazione descritta precedentemente, in cui la tavola procede con velocità v_0 in un liquido viscoso di profondità h, qual'è l'espressione della forza di attrito A che il liquido esercita sulla tavola?*

Dalla relazione [IX.1]

$$dv = \frac{1}{\eta} \frac{F}{S} dy,$$

Per integrazione tra la quota $y = 0$, in cui $v = 0$ (strato che bagna il fondo) e la quota h, in cui $v = v_0$ (strato che bagna la tavola), si ha:

$$v_0 - O = \frac{1}{\eta}\frac{F}{S}h .$$

Siccome, a regime, $F = A$, si ha

$$A = \eta S \frac{v_0}{h}$$

Nel caso di liquido perfetto $\eta = 0$ e non si ha attrito sulla tavola.

Osserviamo che l'attrito risulta proporzionale ad S ed a v_0. L'inversa proporzionalità a h discende dal fatto che, in ultima analisi, il fondo, bloccando lo strato di liquido che lo bagna, condiziona lo scorrimento relativo degli strati superiori.

IX.3. Statica dei fluidi

Consideriamo un fluido incompressibile in situazione di quiete. Poiché il fluido non è in movimento, gli attriti interni, e quindi la viscosità, non giocano alcun ruolo. Le azioni meccaniche su qualsiasi superficie interna al fluido sono riconducibili a *sforzi normali* (pressioni).

Prendiamo in esame un elemento di fluido delimitato da una superficie chiusa a forma di parallelepipedo con gli spigoli paralleli agli assi di un sistema di riferimento nel quale il fluido è in quiete.

Per visualizzare il procedimento potremmo pensare, come abbiamo già visto, che questo volume infinitesimo dV sia delimitato da una sottilissima pellicola impermeabile che intrappola la porzione di fluido considerata e ne conserva l'individualità all'interno del fluido circostante.

Su questo volumetto si esercitano forze di superficie (pressioni) e forze di volume di risultante $d\vec{F}^{(v)} = \vec{G}\,dm = \vec{G}\rho\,dV = \vec{G}\rho\,dx\,dy\,dz$.

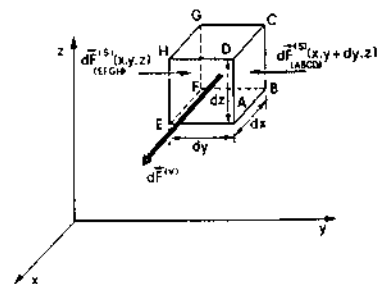
Le *forze di superficie*, che dall'esterno si esercitano sul volumetto dV sono dirette *verso l'interno* del volumetto, dal momento che il fluido esterno, per sua natura, non può esercitare delle trazioni. Di fatto la forza di superficie esercitata da un fluido su una parete corrisponde ad una serie di numerosissimi urti che le molecole realizzano sulla parete stessa. Per ogni urto c'è una certa quantità di moto trasferita alla parete; e questa, sommata sugli urti che avvengono nell'unità di tempo, corrisponde ad una forza esercitata sulla parete.

L'equilibrio del volumetto considerato si realizza se è verificata la condizione dinamica:

$$d\vec{F}^{(s)} + d\vec{F}^{(v)} = 0 ,$$

dove $d\vec{F}^{(s)}$ è il risultante delle forze di superficie attive sulle 6 facce del parallelepipedo elementare considerato.

Sviluppiamo, per esempio, le conseguenze della relazione vettoriale della statica nella sua proiezione sull'asse y. In questa direzione intervengono solo i contributi delle forze di superficie relative alle facce $ABCD$ ed $EFGH$, dal momento che i contributi delle altre facce sono ortogonali all'asse y. Dunque:

$$dF^{(s)}_{EFGH} - dF^{(s)}_{ABCD} + dF^{(v)}_y = 0$$

Tenendo conto che, per definizione, si può scrivere $dF^{(s)} = p\, dS$, ed indicando con (x, y, z) le coordinate del centro della faccia *EFGH* e con $(x, y + dy, z)$ le corrispondenti coordinate della faccia *ABCD*, si ha, essendo $dS = dx\, dz$,

$$p\,(x, y, z)\; dx\, dz - p\,(x, y + dy, z)\; dx\, dz + \rho\; G_y\, dx\, dy\, dz = 0$$

Ricordando che, per definizione di derivata parziale,

$$\frac{p\,(x, y + dy, z) - p\,(x, y, z)}{dy} = \frac{\partial p}{\partial y}$$

si può scrivere

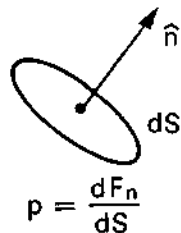
$$\left(-\frac{\partial p}{\partial y}\, dy\right) dx\, dz + \rho\; G_y\, dx\, dy\, dz = 0$$

e quindi

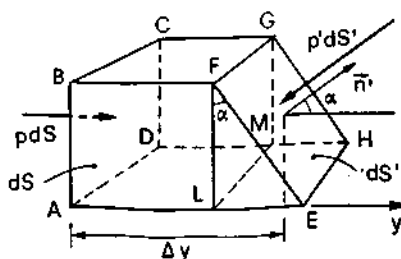
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\; G_y$$

In modo del tutto analogo si scrivono le proiezioni sugli altri assi e si arriva alle seguenti *equazioni fondamentali della statica dei fluidi*:

Equazioni della statica dei fluidi

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho\; G_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho\; G_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho\; G_z \end{aligned}\right. \qquad \text{[IX.2]}$$

Da queste equazioni si evince immediatamente che, per fluidi in equilibrio, le variazioni di pressione in corrispondenza di spostamenti in una certa direzione sono proporzionali alla componente della forza di volume per unità di volume in quella direzione.

Per esempio, se le forze di volume si riducono alla sola forza peso, che è verticale, non si hanno componenti su piani orizzontali. L'equazione fondamentale dell'idrostatica garantisce subito che la pressione non può variare su piani orizzontali.

La pressione non dipende dalla orientazione

La misura della pressione in un punto di un liquido presuppone l'individuazione di un elemento di superficie dS intorno al punto considerato e la misura della componente della forza normale alla superficie dS. Si vede immediatamente che, fissato il punto, il valore della pressione non dipende dalla orientazione di dS intorno a quel punto.

Supponiamo di considerare un elemento, avente la forma mostrata in figura, di fluido in equilibrio: la faccia *ABCD* è perpendicolare alla direzione y ed ha area dS, la faccia *EFGH* ha la normale $\vec{n}'$ che forma un angolo α con l'asse y ed ha area dS', mentre il volume dell'elemento è $dV = dS \cdot \Delta y$. La proiezione delle forze lungo la direzione y deve dare somma nulla:

$$p\, dS - p'\, dS' \cos\alpha + \rho\; G_y\, dS \cdot \Delta y = 0$$

Se riduciamo il valore dell'altezza Δy, la relazione precedente resta vera, anche quando $\Delta y \to 0$. Al tendere di Δy a zero il contributo della forza di volume $\rho\, G_y\, dS\, \Delta y$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto ai termini $p\, dS$ e $p'\, dS' \cos\alpha$ e quindi può essere trascurato. Dunque, per $\Delta y \to 0$, deve valere la relazione:

$$p\, dS - p'\, dS' \cos\alpha = 0$$

Si vede immediatamente che

$$dS' \cos\alpha = (FG) \cdot (FE) \cdot \cos\alpha = (FG) \cdot (FL) = (BC) \cdot (AB) = dS$$

e quindi la relazione precedente diviene:

$$p = p' \qquad \text{(quando } \Delta y = 0\text{)}$$

In ogni posizione, la pressione ha valore indipendente dall'orientamento della superficie su cui essa si esercita. Per questo motivo, anche in precedenza la pressione è stata indicata semplicemente con p senza specificare l'orientamento della superficie su cui essa si esercita.

IX.4. Idrostatica nel campo della gravità

Le relazioni [IX.2] costituiscono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che permette di determinare la funzione scalare $p(x, y, z)$ una volta note le forze di volume e le condizioni al contorno del sistema fluido considerato.

Equilibrio di un fluido pesante

Consideriamo il caso in cui le forze di volume consistano nella sola *forza peso*. In questo caso la forza di volume su un elemento di massa $dm = \rho\, dV$ ha l'espressione:

$$d\vec{F}^{(v)} = \vec{G}\,\rho\, dV = \vec{g}\,\rho\, dV$$

per cui si ha, nel sistema di riferimento indicato in figura:

$$\vec{G} \equiv (0, 0, -g)$$

dove g è il modulo dell'accelerazione di gravità nella località considerata ed il segno negativo è dovuto all'orientazione scelta per l'asse z.

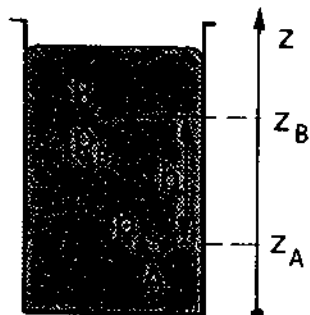
Le [IX.2] diventano dunque, in questo caso:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

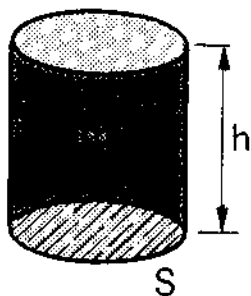
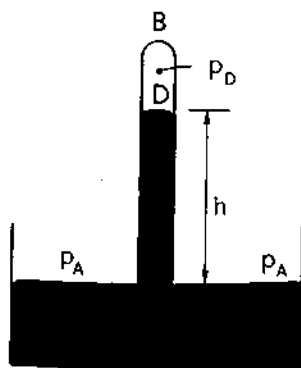
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \text{[IX.3]}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Come già visto, le prime due equazioni impongono alla funzione $p(x, y, z)$ di assumere valori uniformi sui piani orizzontali (z = cost). Si dice che *i piani orizzontali in un fluido in equilibrio per azione della gravità sono superfici isobariche.*

Superfici isobariche orizzontali

$p_A = p_B + \rho g h$

Legge di Stevino

pressione idrostatica: $p = \rho g h$

Pressione atmosferica

Questa circostanza implica che la pressione dipenda soltanto dalla quota z: $p = p(z)$. La terza equazione delle [IX.3] diventa allora:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = -\rho g\,; \quad \text{da cui: } dp = -\rho g\, dz$$

L'equazione precedente, che esprime la differenza di pressione dp tra due punti la cui differenza di quota sia dz, può essere integrata per avere la differenza finita di pressione $(p_B - p_A)$ tra due punti B e A interni al liquido che abbiano una differenza di quota finita $(z_B - z_A)$:

$$\int_A^B dp = -\int_{z_A}^{z_B} \rho g\, dz = -\rho g \int_{z_A}^{z_B} dz\,.$$

L'ultimo passaggio, in cui la quantità ρg esce dal segno di integrale, è lecito purché la differenza di quota tra A e B sia abbastanza piccola da non generare apprezzabili variazioni di g, e purché la densità ρ sia uniforme all'interno del liquido. Procedendo si ha:

$$p_B - p_A = -\rho g (z_B - z_A) \qquad \text{da cui}$$

$$p_A = p_B + \rho g h \qquad \text{(legge di Stevino)} \qquad \text{[IX.4]}$$

La quantità $(\rho g h)$ corrisponde alla *pressione idrostatica* esercitata sulla base da una colonna omogenea di fluido in equilibrio di altezza h, per effetto della forza di gravità. Infatti, se consideriamo una colonna cilindrica di area di base S ed altezza h, la forza peso del liquido è distribuita sulla base e vale $mg = \rho S h g$. La corrispondente pressione sulla base vale $mg/S = \rho g h$.

Dunque, una colonna di fluido in equilibrio esercita, per effetto della gravità, una pressione detta idrostatica su ogni punto sottostante.

Se il fluido considerato è l'*aria* e si considera un punto in prossimità della superficie della Terra, la colonna d'aria, che va da questo punto agli estremi dell'atmosfera, esercita una pressione idrostatica che si dice *pressione atmosferica.*

Si tratta di una colonna gassosa che diventa sempre più rarefatta a mano a mano che si sale di quota e la cui densità, già intorno a 40 km di altezza, si riduce a pochi per mille della densità a livello del mare.

La pressione atmosferica p_a può essere misurata con il semplice dispositivo di Torricelli (prima metà del 1600) mostrato in figura e detto *barometro di Torricelli.*

Questo barometro consiste in una vaschetta contenente mercurio, ed in un tubo di vetro abbastanza lungo, chiuso all'estremità B ed aperto nell'estremo A. Il tubo è, all'inizio, riempito completamente di mercurio. Una volta pieno, l'apertura A del tubo viene chiusa, il tubo viene capovolto (estremo B in alto) ed immerso parzialmente, dalla parte A, nel mercurio della vaschetta. A questo punto la chiusura in A viene rimossa, mentre si cura che l'estremità aperta A peschi sempre nel mercurio della vaschetta.

Ciò che si osserva è un parziale svuotamento del tubo, che si arresta quando vale h la differenza di quota tra il livello del mercurio nel tubo ed il pelo libero del mercurio nella vaschetta. A questa situazione statica si può applicare la legge di Stevino, tenendo conto che la superficie orizzontale, che comprende il pelo libero del mercurio della vaschetta ed il punto C

interno al tubo, è una superficie isobara a pressione $p_a = p_C$. La pressione nel punto C è pari alla pressione idrostatica della colonna di mercurio di altezza h essendo praticamente nulla la pressione P_D in D (nella sommità del tubo vi è solo vapor saturo di mercurio); la misura di $p_C = \rho g h$ fornisce dunque anche la misura della pressione atmosferica p_a:

$$p_a = p_C = \rho g h .$$

A livello del mare in condizioni meteorologiche «normali» è $h = h_0 = 76$ cm, per cui:

Pressione atmosferica in condizioni normali

$$p_a = p_0 = \rho g h = \left(13{,}596 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (0{,}76 \text{ m}) =$$
$$= 1{,}012 \cdot 10^5 \, N/\text{m}^2$$

La pressione $p_0 = 1{,}012 \cdot 10^5 \, N/\text{m}^2$ viene usata come unità di misura «pratica» della pressione, con il nome di *atmosfera* (atm):

Atmosfera

$$1 \text{ atm} = 1{,}012 \cdot 10^5 \, N/\text{m}^2 .$$

Definizione: 1 bar = 10^5 N/m^2

È molto usata in pratica, con il nome di *torr*, anche un'altra unità di misura: il millimetro di mercurio (mmHg), cioè la pressione idrostatica di una colonna di mercurio alta 1 mm. In queste unità si ha:

Torr

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ torr}$$

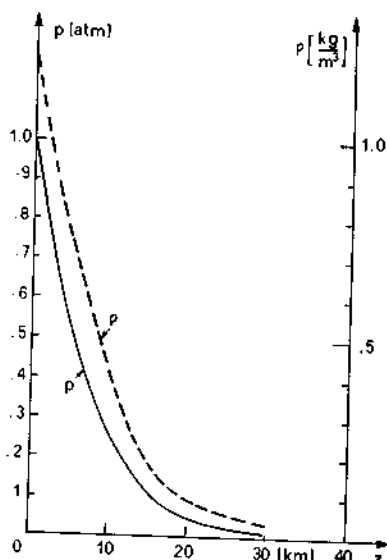
La pressione atmosferica è usualmente misurata con i *barometri aneroidi*. Questo tipo di barometro è costituito da una scatola chiusa, all'interno della quale è stato fatto il vuoto, ed in cui una faccia è realizzata in sottile lamiera ondulata. La pressione esterna, a seconda del suo valore, deforma più o meno la faccia sottile della scatola. Tali deformazioni, amplificate con opportune leve, permettono una misura della pressione esterna una volta tarato lo strumento, per esempio per confronto con un barometro di Torricelli. I misuratori di pressione vengono indicati anche con il nome di *manometri*.

Barometri aneroidi

Manometri

Abbiamo detto che la pressione atmosferica al livello del mare è dovuta al peso di una colonna di aria che si estende per molti km di altezza (atmosfera). La pressione e la densità medie dell'aria hanno l'andamento sperimentale riportato in figura. Anche la temperatura varia con la quota (per esempio, a 10 km di altezza è dell'ordine di -50°C).

È possibile dare forma analitica semplice all'andamento della pressione con l'altezza – *equazione barometrica* – all'interno di tratti di quota in cui la *temperatura* possa essere considerata *costante*. Come si vedrà in termodinamica, una data massa di gas abbastanza rarefatto (schematizzazione di gas perfetto) che sia mantenuto a temperatura costante, ha la pressione ed il volume legati da una relazione di inversa proporzionalità, cioè è costante il prodotto di pressione e volume:

$$pV = \text{costante} \quad \text{(legge di Boyle)}.$$

Introducendo la densità $\rho = m/V$, la legge di Boyle si scrive nella forma:

$$\frac{p}{\rho} = \text{costante} .$$

Con questa premessa sul comportamento di un gas a temperatura costante, consideriamo un punto dell'atmosfera a quota z rispetto al livello del mare ($z = 0$). Il valore di z sia abbastanza piccolo da poter considerare trascurabile la variazione di temperatura nel tratto di altezza z, oltre che la variazione dell'accelerazione di gravità g. Per tutti i valori di quota compresi tra 0 e z si avrà:

$$\frac{p(z)}{\rho(z)} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad \text{da cui} \quad \rho(z) = \rho_0 \frac{p(z)}{p_0} ,$$

dove p_0 e ρ_0 sono, rispettivamente, la pressione e la densità a livello del mare.

La legge di Stevino, relativamente ad una colonna d'aria compresa tra le quote z e $(z + dz)$ si scrive:

$$dp = -\rho(z)\, g\, dz = -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, p(z)\, dz$$

Osserviamo che la legge di Stevino, valida per fluidi omogenei, può essere adoperata nell'intervallo infinitesimo dz entro il quale la densità $\rho(z)$ può essere ritenuta uniforme. La relazione precedente costituisce una equazione differenziale che può essere integrata per separazione delle variabili:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0}\, dz \rightarrow \int \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} \int dz ,$$

da cui:

$$\ln p = -\frac{\rho_0 g}{p_0}\, z + \text{cost} \rightarrow p(z) = A\, e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} z} ,$$

in cui la costante di integrazione A si determina in base alla condizione al contorno per cui a $z = 0$ si ha $p = p_0$; ciò implica $A = p_0$ per cui, in definitiva, si ha:

Equazione barometrica

$$p(z) = p_0\, e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} z} = p_0 e^{-(z/\lambda)} \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{p_0}{\rho_0 g} \qquad \text{[IX.6]}$$

Sotto le ipotesi fatte, la pressione cala dunque con la quota con legge esponenziale. La costante λ indica che, per una variazione di quota pari a $z = \lambda$ la pressione si riduce al valore p_0/e ($e \simeq 2{,}71$). Nei livelli bassi di atmosfera si trovano per λ valori dell'ordine di $7 \div 8$ km.

Altimetri

L'equazione barometrica, che esprime un legame analitico tra pressione e quota in soddisfacente accordo con i dati sperimentali medi, permette, mediante misure di pressione, di realizzare rapide misure di quota rispetto ad un livello di riferimento. Strumenti che, con opportuna sistemazione di indici e scale, permettono di determinare la quota mediante la misura della pressione relativa, si chiamano *altimetri*.

Esempio

E.IX.2. *In un recipiente cilindrico chiuso ed impermeabile, di raggio di base $R = 0{,}5$ m, viene fatto il vuoto. Qual'è la forza che si esercita dall'esterno sulla base del cilindro, quando questo:*

a) è posto in aria, a livello del mare;

b) è mantenuto a profondità $h = 10{,}33$ m in acqua?

a) A livello del mare la pressione atmosferica è

$$p_0 = 1 \text{ atm} = 1{,}01 \cdot 10^5 \, N/\text{m}^2$$

e quindi sulla superficie di area $S = \pi R^2 = 0{,}785$ m^2 la forza vale:

$$F_0 = p_0 S = 79.440 \, N .$$

Si tratta di una forza considerevole, equivalente al peso di una massa $F_0/g \cong 8.100$ kg = 8,1 *t*.

b) Alla profondità $h = 10{,}33$ m in acqua la pressione diventa, per la legge di Stevino:

$$p = p_0 + \rho g h = \left(1{,}01 \cdot 10^5 \frac{N}{\text{m}^2}\right) + \left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (10{,}33 \text{ m}) =$$

$$= \left(1{,}01 \cdot 10^5 \frac{N}{\text{m}^2}\right) + \left(1{,}01 \cdot 10^5 \frac{N}{\text{m}^2}\right),$$

cioè la *pressione idrostatica di 10,33 m di acqua equivale alla pressione atmosferica.*

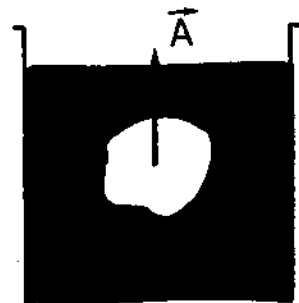
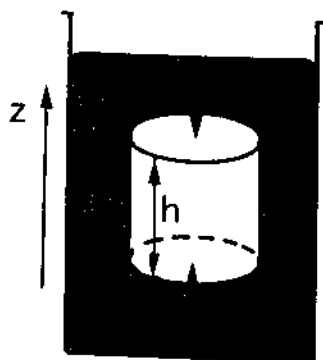
La forza sulla base del cilindro vuoto raddoppia rispetto a quando si trova in aria a livello del mare.

Principio di Archimede

Con il termine storico di *principio di Archimede* si indica l'osservazione in base alla quale un *corpo immerso* totalmente o parzialmente *in un fluido riceve, nel campo della gravità, una spinta A (spinta di Archimede) verticale orientata verso l'alto, il cui modulo è pari alla forza peso attiva sulla massa fluida spostata ed il cui punto di applicazione coincide con il baricentro della massa fluida spostata* (centro di spinta).

Centro di spinta

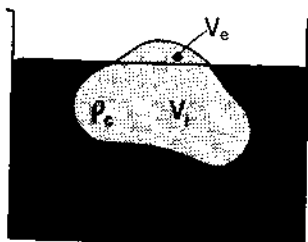
Il principio di Archimede si dimostra immediatamente osservando che, in sostanza, un corpo immerso in un fluido in quiete, si sostituisce, all'interno del fluido, ad una porzione di esso, avente lo stesso contorno del corpo considerato. Tale porzione di fluido, se fosse lasciata al suo posto e non fosse spostata dal corpo, starebbe in equilibrio per l'effetto congiunto delle forze di volume agenti su di essa (in questo caso forza di gravità, ma il ragionamento è generalizzabile ad altre forze di volume) e delle forze di superficie agenti sul suo contorno.

Dunque il risultante delle forze di volume – forza peso attiva sulla massa fluida spostata – deve essere uguale ed opposto al risultante delle forze di superficie attive sul contorno. Ma tali forze di superficie non variano se, con la stessa superficie di contorno, lo spazio occupato dal fluido viene riempito con il corpo immerso nel fluido. Dunque il risultante delle forze di superficie agenti sul corpo immerso – spinta di Archimede –, è uguale ed opposto al peso del fluido spostato.

Esempi

E.IX.3. *Ricavare il principio di Archimede nel caso semplice di un corpo di forma cilindrica di area di base S ed altezza h, immerso in un liquido omogeneo di densità ρ_l, con le generatrici orientate verticalmente.*

Calcoliamo le forze di superficie sul cilindro. Sulla base superiore, in cui la pressione è p_A, la forza è diretta verso il basso e vale $(-p_A S)$. Sulla base inferiore, in cui la pressione, per Stevino, è $p_B = p_A + \rho_l g h$, la forza è diretta verso l'alto e vale $[+(p_A + \rho_l g h) S]$. Il risultante di queste due forze sulle basi è diretto verso l'alto e vale

$$A = \rho_l g h S = (\rho_l S h) g = m_l g$$

Cioè proprio quando vale la forza peso agente su un volume di liquido pari al volume del corpo.

Le forze di superficie agenti sulla superficie laterale del cilindro hanno risultante nullo, per ragioni di simmetria.

E.IX.4. *Un corpo omogeneo di densità $\rho_c = 0,9$ g/cm^3 è immerso in acqua, la cui densità è $\rho_L = 1$ g/cm^3. Quale frazione del volume totale del corpo, all'equilibrio, emerge dall'acqua?*

L'equilibrio si raggiunge quando la spinta di Archimede A uguaglia la forza peso complessiva del corpo P_{corpo}.

Per quanto riguarda la spinta di Archimede, consideriamo trascurabile l'effetto dell'aria sulla parte emersa.

Indicando con V_e il volume della parte emergente e con V_i il volume della parte immersa nell'acqua, si ha:

$$A = \rho_L V_i g$$

$$P_{corpo} = \rho_c (V_i + V_e) g \, .$$

Per l'equilibrio:

$$\rho_c (V_i + V_e) g = \rho_L V_i g \quad \text{da cui}$$

$$\frac{V_i + V_e}{V_i} = 1 + \frac{V_e}{V_i} = \frac{\rho_L}{\rho_c} \quad \text{da cui} \quad \frac{V_e}{V_i} = \frac{\rho_L - \rho_c}{\rho_c}$$

Il problema richiede la frazione emergente $\dfrac{V_e}{V_i + V_e}$, che conviene esprimere in funzione del rapporto V_e/V_i già ricavato:

$$\frac{V_e}{V_i + V_e} = \frac{(V_e/V_i)}{1 + (V_e/V_i)} = \frac{\dfrac{\rho_L - \rho_c}{\rho_c}}{1 + \dfrac{\rho_L - \rho_c}{\rho_c}} = \frac{\rho_L - \rho_c}{\rho_L} = 0,11 = 11\% .$$

La punta dell'iceberg

I dati dell'esempio sono molto vicini al caso in cui il corpo sia un blocco di ghiaccio (iceberg) ed il liquido l'acqua in cui è immerso. La punta emergente dell'iceberg è dunque poco più del 10% del volume totale.

E.IX.5. *Un corpo a forma di mezzo cilindro è immerso in liquido omogeneo di densità ρ_L, come mostrato in figura. Se il raggio del semicilindro è R e la sua altezza h, calcolare il momento assiale delle forze di superficie agenti sul corpo, rispetto ad un asse coincidente con la generatrice del semicilindro passante per il punto B.*

Il risultante delle forze di superficie agenti sul corpo è pari alla spinta di Archimede, che è applicata al centro di spinta e vale, in modulo:

$$A = \rho_L \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot h g$$

Il centro di spinta C è situato sulla perpendicolare in O al raggio OB, a distanza $OC = \frac{4R}{3\pi}$ (vedi esercizio VI.12).

Il momento rispetto all'asse passante per B vale

$$M = BC \cdot |\bar{A}| \cdot \operatorname{sen}\alpha, \quad \text{con } BC \operatorname{sen}\alpha = OC$$

Dunque

$$M = \frac{4R}{3\pi} \cdot \rho_L \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 h g = \frac{2}{3} \rho_L R^3 g h$$

E.IX.6. *Una molgolfiera piena di gas di densità $\rho_g = 0{,}2$ kg/m³ è in equilibrio in aria, che ha densità $\rho_a = 1{,}3$ kg/m³, sostenendo un carico globale di massa $M = 300$ kg (M include l'involucro del pallone, ma non comprende la massa del gas). Qual'è la massa m_g del gas contenuto nel pallone, nell'ipotesi che il carico occupi un volume trascurabile rispetto al volume V del gas?*

L'equilibrio si realizza perché la spinta di Archimede uguaglia la forza peso complessiva:

$$\text{Peso totale} = A, \text{ dove:}$$

$$\text{Peso totale} = M g + m_g g\,,$$

con $m_g = \rho_g V$ ed $A \cong \rho_a V g$ (trascurando la spinta di Archimede sul carico). Dunque:

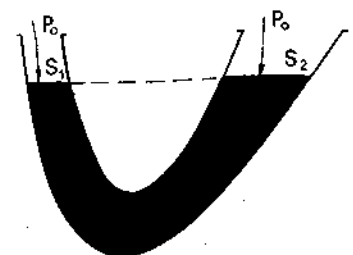
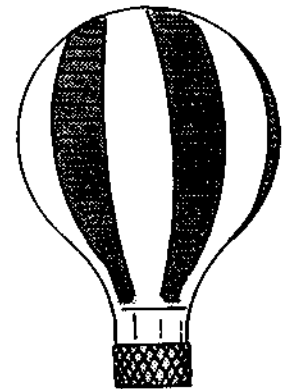
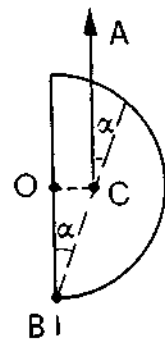
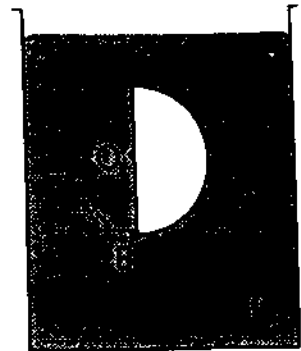
$$M g + \rho_g V g = \rho_a V g \quad \text{da cui:}$$

$$V(\rho_a - \rho_g) = M \rightarrow V = \frac{M}{\rho_a - \rho_g} = \frac{300}{1{,}3 - 0{,}2} = \frac{300}{1{,}1} \cong 273 \text{ m}^3$$

La massa del gas è dunque:

$$m_g = \rho_g V = 0{,}2 \cdot 273 \cong 54{,}5 \text{ kg}\,.$$

Consideriamo un'altra conseguenza delle equazioni dell'idrostatica nel campo della gravità. Con il termine di *vasi comunicanti* si intende un sistema di recipienti collegati tra loro e che presentano verso l'esterno due o più aperture, non piccole, così che siano trascurabili effetti di capillarità.

Quando un liquido omogeneo è immesso in un sistema di vasi comunicanti, si generano delle aree non contigue di contatto tra liquido ed ambiente esterno. Nella figura tali aree sono indicate con S_1 ed S_2. Se i vasi

Vasi comunicanti

sono aperti verso lo stesso ambiente esterno (per esempio l'aria dell'atmosfera a pressione p_0), allora *le superfici libere* S_1 ed S_2, indipendentemente dalla loro forma e distanza, debbono trovarsi *alla stessa quota*, perché piani orizzontali sono superfici isobariche nel campo della gravità.

IX.5. Statica dei fluidi in campi di forze di volume conservative

Le equazioni fondamentali della statica dei fluidi [IX.2] sono state ricavate per una generica forza di volume. Gli esempi finora esaminati si riferiscono alla forza di gravità cui, per ovvi motivi, abbiamo dedicato particolare attenzione.

Forze di volume conservative

È interessante sviluppare le [IX.2] nel caso in cui la *forza di volume* sia una generica forza *conservativa*. In questo caso esiste una funzione *energia potenziale per unità di massa* $U = U(x, y, z)$ tale che, data la forza di volume

$$d\vec{F}^{(v)} = \vec{G}\, dm$$

si può scrivere:

$$G_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$
$$G_y = -\frac{\partial U}{dy} \qquad \text{[IX.7]}$$
$$G_z = -\frac{\partial U}{dz}$$

La funzione U, così introdotta, ha le dimensioni di un'energia diviso una massa:

$$[U] = [\text{Joule/kg}]\,.$$

Per esempio, nel caso della forza di gravità, si ha $G_x \equiv G_y \equiv 0$, $G_z = -g$, da cui:

$$U(x, y, z) = U(z) = g\,z + \text{costante}$$

Le equazioni fondamentali dell'idrostatica in campi di forze di volume conservative si scrivono nel modo seguente:

Idrostatica in campi conservativi

$$\left|\begin{aligned} \frac{\partial p}{dx} &= \rho\, G_x = -\rho\frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{dy} &= \rho\, G_y = -\rho\frac{\partial U}{dy} \\ \frac{\partial p}{dz} &= \rho\, G_z = -\rho\frac{\partial U}{dz} \end{aligned}\right. \qquad \text{[IX.8]}$$

Le equazioni [IX.8] permettono di esprimere la differenza di pressione esistente tra il punto $P \equiv (x, y, z)$ ed il punto $Q \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$ in termini della corrispondente variazione di energia potenziale:

$$p(x + dx, y + dy, z + dz) - p(x, y, z) = dp =$$
$$= \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = - \rho \frac{\partial U}{\partial x} dx - \rho \frac{\partial U}{\partial y} dy - \rho \frac{\partial U}{\partial z} dz =$$

$= - \rho\, dU$. Dunque:

$$dp = - \rho\, dU \qquad [IX.9]$$

All'interno di un fluido omogeneo, la differenza di pressione tra due punti a distanza finita può essere ottenuta integrando la [IX.9]:

$$\Delta p = \int dp = - \int \rho\, dU = - \rho \int dU = - \rho\, \Delta U \qquad [IX.10]$$

(il penultimo passaggio è lecito se il fluido è omogeneo). Se ne conclude che, per forze di volume conservative:

in un fluido omogeneo le superfici isobariche ($\Delta p = 0$) *coincidono con le superfici equipotenziali* ($\Delta U = 0$).

Le superfici isobariche coincidono con le superfici equipotenziali

Questa proprietà generalizza il caso particolare, già visto, della forza di gravità, per cui i piani orizzontali (equipotenziali) erano isobari.

Teorema di Pascal

Una conseguenza della [IX.10] é il *teorema di Pascal*: in un *fluido omogeneo in quiete, un incremento di pressione, prodotto in un punto qualsiasi del fluido, si trasmette inalterato in ogni altro punto del fluido.*

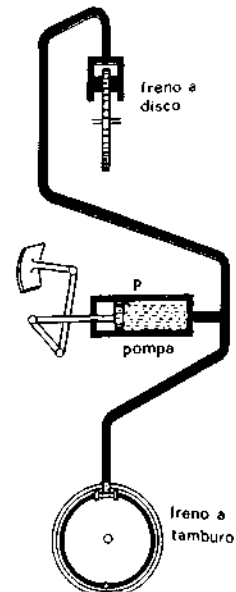
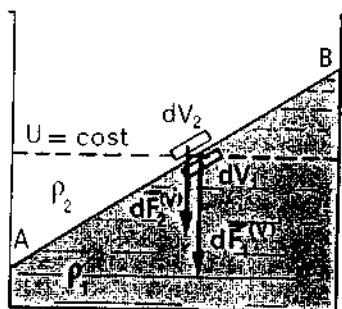
Infatti, dalla [IX.10] si vede che, in un campo conservativo, la differenza di pressione Δp tra due punti di un fluido omogeneo in quiete dipende soltanto dalla differenza ΔU di energia potenziale delle forze di volume tra i due punti. Ma ΔU dipende solo dalle coordinate spaziali e dunque in particolare non dipende dalle forze di superficie; e quindi ogni pressione aggiuntiva non può variare la differenza Δp. In altre parole, il fluido realizza una trasmissione idraulica totale degli sforzi esercitati sulla sua superficie.

Pressa idraulica

Su questo principio lavora la *pressa idraulica*: una forza $\bar{f}$ esercitata su un pistone a tenuta di area a (piccola) può fare equilibrio ad una forza $\bar{F}$ distribuita su un pistone di area A (grande). Infatti la pressione in a, di valore $p = f/a$, si trasmette inalterata in A, dove $p = F/A$. Dunque una forza f può equilibrare una forza F con $F = \frac{A}{a} f$; se $A/a > 1$, è $F/f = A/a > 1$.

Sul teorema di Pascal si basa anche il funzionamento dei sistemi frenanti degli automezzi (freno idraulico). La forza esercitata sul pedale del freno viene trasmessa al pistone della pompa P. L'aumento di pressione nel liquido del circuito frenante nella zona P viene trasmesso fino alla zona delle ganasce, la cui compressione contro il disco produce, per attrito, l'azione frenante.

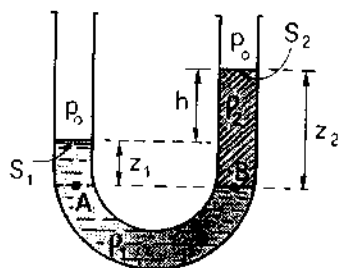
In certi casi accade che venga a mancare la condizione di omogeneità del fluido. Questa situazione si realizza in particolare quando sono posti in presenza uno dell'altro due liquidi non miscibili di densità diversa (per esempio olio ed acqua nello stesso recipiente).

Si vede immediatamente che la superficie di separazione di due liquidi non miscibili in quiete deve essere una superficie equipotenziale del campo delle forze di volume (se queste sono conservative). Nel caso di liquidi sottoposti alla sola *forza di gravità*, la *superficie di separazione è una porzione di piano orizzontale.*

Liquidi non miscibili in equilibrio

Limitandoci per semplicità alla forza peso, supponiamo che all'equilibrio la superficie di separazione di due liquidi non miscibili, di densità ρ_1 e ρ_2 rispettivamente, non sia orizzontale e sia rappresentata dal tratto AB della figura. Le superfici equipotenziali sono porzioni di piani orizzontali. Consideriamo due uguali volumetti infinitesimi dV_1 e dV_2 prossimi tra loro e giacenti da parti opposte rispetto alla superficie di separazione AB. Le forze di volume (gravità) agenti sui due volumetti sono:

$$d\vec{F}_1^{(V)} = \vec{G}\, dm_1 = \vec{g}\, \rho_1\, dV_1$$

$$d\vec{F}_2^{(V)} = \vec{G}\, dm_2 = \vec{g}\, \rho_2\, dV_2$$

esse sono parallele e concordi ma diverse in modulo perché, pur essendo stati scelti uguali i volumi dV_1 e dV_2 ed essendo uniforme il vettore $\vec{G}$ (in questo caso $\vec{G}$ è l'accelerazione di gravità), le densità ρ_1 e ρ_2 sono fra loro diverse. Le proiezioni di queste forze sulla superficie AB sono diverse e pertanto in un fluido incapace di reagire a sforzi tangenziali con adeguate forze di attrito interno (viscose), avrebbe luogo uno scorrimento di un elemento sull'altro. Ma questa situazione non è di equilibrio. Per avere equilibrio è necessario che la superficie di separazione tra i due liquidi coincida con una superficie equipotenziale del campo di forze di volume. In questo caso gli sforzi normali, che la superficie di separazione (contorno dei liquidi) può esercitare, sono in grado di equilibrare le differenti forze di volume.

Liquidi non miscibili in vasi comunicanti

Come applicazione delle considerazioni generali esposte, esaminiamo il caso di un sistema di vasi comunicanti aperti verso l'atmosfera, per esempio un tubo ad U, nel quale siano versati due liquidi non miscibili di densità ρ_1 e ρ_2 rispettivamente. Supponendo che sia attiva la sola forza peso e che si possano trascurare gli effetti dovuti al contatto dei liquidi con le pareti nelle zone di separazione con l'aria (effetti di capillarità), ricaviamo l'espressione del dislivello h che si manifesta, all'equilibrio, tra le superfici S_1 ed S_2, dove si realizza il contatto tra i liquidi e l'aria dell'atmosfera esterna. La pressione esterna si può assumere che valga p_o su entrambe le aree S_1 ed S_2.

All'interno del liquido di densità ρ_1 (omogeneo), punti di ugual quota debbono avere la stessa pressione, per cui, sul piano orizzontale che contiene i punti A e B deve essere $p_A = p_B$. Questa uguaglianza può essere scritta in termini delle pressioni idrostatiche esercitate dalle colonne di liquido sovrastanti i punti A e B. Infatti, essendo per la legge di Stevino:

$$p_A = p_o + \rho_1 g z_1\,; \quad p_B = p_o + \rho_2 g z_2$$

e dovendo essere $p_A = p_B$, si ha:

$$\rho_1 g z_1 = \rho_2 g z_2$$

Se, per esempio, è nota la quantità di liquido di densità ρ_2 essendo data la sua altezza complessiva z_2, si ha:

$$z_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} z_2 \quad \text{e quindi} \quad h = z_2 - z_1 = z_2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = z_2 \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}\right).$$

Esempio

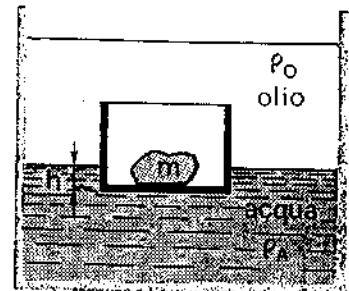
E.IX.7. *Una scatola chiusa ed impermeabile a forma di cubo, di lato $a = 20$ cm, contiene un corpo di massa m molto maggiore della massa dell'involucro cubico. La scatola è immersa in un recipiente contenente due liquidi non miscibili come acqua (di densità $\rho_A = 10^3$ kg/m³) e olio ($\rho_o = 0,9\,\rho_A$). All'equilibrio, la parte di scatola immersa nell'acqua ha altezza $h = 5$ cm. Calcolare il valore della massa m.*

Forza di Archimede in liquidi non miscibili

La spinta di Archimede $\vec{A}$ deve fare equilibrio alla forza peso $\vec{p} = m\vec{g}$. Il modulo A di $\vec{A}$ è pari al peso della massa fluida spostata; cioè:

$$A = \rho_o\,[a^2\,(a-h)]\,g + \rho_A\,(a^2\,h)\,g$$

Dovendo essere $mg = A$, si ha:

$$m = a^2\,[\rho_o\,(a-h) + \rho_A\,h] = 7{,}4 \text{ kg}.$$

IX.6. Statica dei fluidi in sistemi di riferimento non inerziali

Tutte le considerazioni già svolte sulla statica dei fluidi si basano sull'applicazione delle leggi fondamentali della meccanica dei sistemi continui in sistemi di riferimento in cui il fluido sia in quiete. Per quanto riguarda le forze, in tutti gli esempi, abbiamo assunto che si trattasse di forze reali (per esempio, la gravità) e, quindi, che il sistema di riferimento scelto fosse inerziale.

La statica dei fluidi può essere trattata anche in sistemi di riferimento non inerziali, purché alle forze reali si aggiungano le forze apparenti o fittizie. È da notare che le forze apparenti sono sempre proporzionali all'elemento di massa considerato e quindi sono da considerarsi come forze di volume.

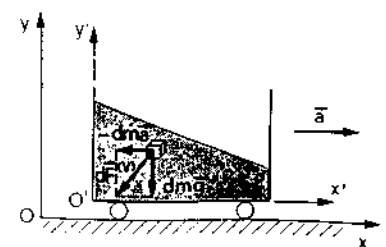
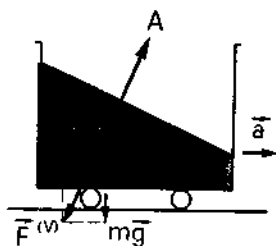
Considereremo i casi in cui, rispetto ad un riferimento inerziale, il fluido sia:

a) in moto traslatorio accelerato;

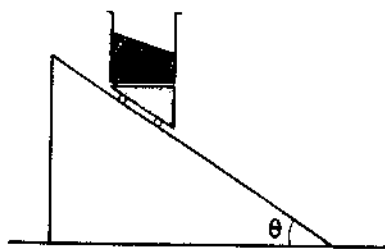
b) in moto rotatorio intorno ad un asse fisso.

a) *Fluido in moto traslatorio accelerato.*

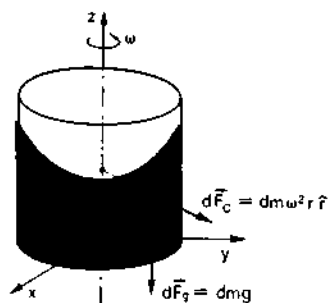
Supponiamo di avere un fluido omogeneo di densità ρ contenuto in un recipiente che si muove di moto traslatorio uniformemente accelerato con accelerazione $\vec{a}$, rispetto ad un sistema di riferimento in quiete Oxy. Se il fluido è in quiete rispetto al recipiente, conviene considerare la statica del fluido nel sistema di riferimento non inerziale $O'x'y'$ solidale con il recipiente. Le leggi della dinamica si possono applicare al sistema $O'x'y'$, purché alle forze reali si sommino vettorialmente le forze apparenti. Considerato un elemento di fluido di massa dm, su di esso sono attive la forza reale $dm\vec{g}$ (peso), la forza fittizia $dm(-\vec{a})$ (forza d'inerzia), anch'essa proporzionale alla massa, ed il risultante delle forze di superficie sul suo contorno.

La forza di volume risultante è $d\vec{F}^{(v)} = (\vec{g} - \vec{a})\,dm$. Tale forza è diretta secondo la diagonale del parallelogramma avente per lati $\vec{g}$ e $(-\vec{a})$. Ciò implica, per esempio, che un corpo immerso in fluido accelerato riceva, per effetto delle forze di superficie da parte del fluido, una spinta di Archimede che non è verticale come nei sistemi inerziali in cui è attiva la sola forza di gravità.

Il campo delle forze di volume $d\bar{F}^{(v)} = (\bar{g} - \bar{a})\, dm$ risulta essere un *campo* vettoriale *uniforme* all'interno del fluido e quindi *conservativo*. Le superfici *equipotenziali* di questo campo sono porzioni di piani *normali alla forza* $\bar{F}^{(v)}$.

Per quanto detto al paragrafo IX.5 a proposito dell'idrostatica in campi di forze di volume conservativi, la superficie libera del liquido – superficie di separazione tra il fluido considerato ed il fluido aria a pressione p_0 –, dovendo essere sede di sforzi di taglio nulli, deve coincidere con una superficie equipotenziale del campo delle forze di volume. Pertanto la superficie libera sarà normale ad $\bar{F}^{(v)}$.

Esempio

E.IX.8. *Su un piano inclinato fisso, formante un angolo θ rispetto all'orizzontale, scivola senza attrito un carrello a forma di cuneo che presenta un ripiano orizzontale. Su tale ripiano è piazzato un recipiente contenente un liquido omogeneo. Quanto vale, all'equilibrio, l'angolo α che la superficie libera del liquido forma con l'orizzontale?*

La superficie libera deve essere normale alla risultante delle forze di volume presenti nel sistema di riferimento non inerziale solidale con il cuneo. L'accelerazione del cuneo è parallela al piano inclinato e vale $g \operatorname{sen} \theta$; la forza d'inerzia sull'elemento dm ha modulo $(dm\, g \operatorname{sen} \theta)$ ed è diretta come il piano inclinato nel verso della parte alta. La forza di volume reale è la forza peso e vale $dm\, \bar{g}$. La forza di volume risultante è tale che il piano normale alle sue linee di forza è parallelo al piano inclinato: dunque $\alpha = \theta$.

b) *Fluido in moto rotatorio*

Un moto rotatorio può generarsi in una massa fluida quando, per esempio, il recipiente che la contiene ruota intorno ad un asse fisso. Si può realizzare la situazione in cui il fluido è in equilibrio rispetto al recipiente, ruotando solidalmente con questo. Si tratta di un sistema in equilibrio in un sistema di riferimento non inerziale.

Per fissare le idee, consideriamo un recipiente cilindrico che ruota con velocità angolare ω costante intorno al suo asse, assunto come asse z, e che contiene una certa quantità di liquido omogeneo di densità ρ.

Il liquido è trascinato nel moto rotatorio ed ogni suo elemento di massa dm, nel sistema di riferimento solidale al recipiente, è sottoposto ad una forza di volume che è il risultante della forza peso $dm\,\bar{g}$ e della forza centrifuga $dm\,\omega^2 r\,\hat{r}$, dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ è la distanza dall'asse di rotazione ed $\hat{r}$ è il suo versore orientato verso l'esterno.

Nel sistema ruotante $Oxyz$ la forza centrifuga ha componenti $d\bar{F}_c \equiv (dm\,\omega^2 x,\ dm\,\omega^2 y,\ 0)$ e quindi le equazioni fondamentali dell'idrostatica si scrivono ponendo $\bar{G} \equiv (\omega^2 x,\ \omega^2 y,\ -g)$ nelle [IX.2], ottenendo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho\,\omega^2 x \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho\,\omega^2 y \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g \end{cases}$$

Si vede immediatamente che il *campo* vettoriale $\vec{G}$ è *conservativo* con energia potenziale per unità di massa data dall'espressione:

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + g\,z + \text{costante}$$

Questa proprietà permette immediatamente di ricavare la differenza di pressione tra due parti qualsiasi del liquido omogeneo, per semplice integrazione della relazione [IX.9]: $dp = -\rho\, dU$.

Esempio

E.IX.9. *In un recipiente cilindrico in rotazione alla velocità angolare $\omega = 10$ rad/s è contenuto mercurio ($\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m^3) che ruota solidalmente al recipiente. Calcolare la differenza di pressione fra il punto A (0, 0, 30) ed il punto B (10, 20, 10), avendo espresso le coordinate in cm.*

$$\Delta p = p_A - p_B = -\rho\,(U_A - U_B) = \rho\,(U_B - U_A)$$

con

$$U_B = -\frac{1}{2}\omega^2(x_B^2 + y_B^2) + g\,z_B + \text{costante}$$

$$U_A = -\frac{1}{2}\omega^2(x_A^2 + y_A^2) + g\,z_A + \text{costante}$$

Dunque:

$$U_B - U_A = \frac{1}{2}\omega^2[(x_A^2 - x_B^2) + (y_A^2 - y_B^2)] + g\,(z_B - z_A) =$$

$$= \frac{1}{2}10^2[-(0{,}1)^2 - (0{,}2)^2] + 9{,}8 \cdot (0{,}1 - 0{,}3) =$$

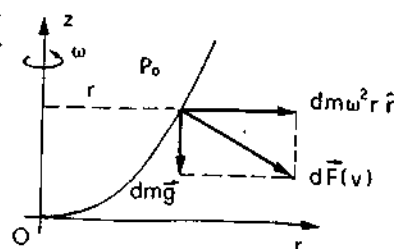
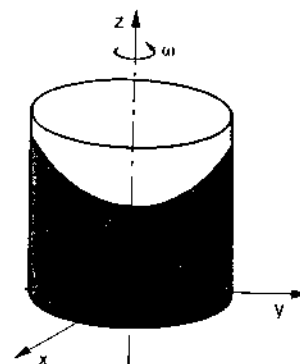
$$= -2{,}5 - 1{,}96 = -4{,}46 \text{ J/kg}$$

$$p_A - p_B = \rho\,(U_B - U_A) = \left(13{,}6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(-4{,}46\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right) =$$

$$= -60{,}7 \cdot 10^3 \frac{N}{\text{m}^2}$$

Com'era prevedibile, $p_B > p_A$.

All'equilibrio la superficie libera – di separazione tra liquido ed aria – assume una forma che può essere facilmente calcolata sulla base della constatazione che le particelle di liquido, che sono sulla superficie libera, essendo a contatto con un ambiente esterno a pressione praticamente uniforme p_o, debbono avere valore uniforme dell'energia potenziale U. Ciò implica che la superficie libera sia un'equipotenziale, cioè

$$U = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + g\,z = \text{costante}\,.$$

Ponendo uguale a zero la costante (cosa che equivale a scegliere l'origine del sistema di riferimento in O, cosicché sia $z = 0$ quando $r = 0$; vedi figura) si ha l'equazione:

$$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2),$$

La superficie libera è un paraboloide di rivoluzione

che è proprio l'equazione di un paraboloide di rivoluzione intorno all'asse di rotazione.

È chiaro che, all'equilibrio, la forza di volume risultante è normale in ogni punto alla superficie di separazione tra liquido ruotante ed aria.

IX.7. Idrodinamica dei fluidi perfetti

L'idrodinamica si riferisce ai fenomeni di movimento di fluidi e tratta del modo di descrivere il movimento stesso, e di come questo movimento sia correlato alle azioni dinamiche esercitate sul fluido.

È esperienza comune l'osservazione della complessità del moto dei fluidi: basta pensare al moto dell'acqua in un torrente o alla fuoriuscita di liquido da una bottiglia o rubinetto per rendersi conto che si tratta di fenomeni complicati, per la cui schematizzazione occorrerà particolare cautela.

Lo studio della dinamica dei fluidi sarà affrontato partendo da situazioni particolarmente semplici, per esempio ipotizzando l'assenza di attriti interni, e sviluppando successivamente le conseguenze della introduzione di effetti che avvicinano il comportamento del fluido considerato a quello del fluido reale.

Una prima complicazione che viene rimossa riguarda gli effetti termici legati a movimenti di compressione e rarefazione dei fluidi. Questi fenomeni sono molto rilevanti nei gas, come si vedrà nel corso di termodinamica; ma possono di norma essere trascurati nei liquidi, sempre assai poco compressibili. In questo capitolo ci riferiremo a *liquidi incompressibili*, per i quali potremo porre la densità ρ costante nel tempo ed uniforme nello spazio, indipendentemente dal valore locale della pressione e della temperatura.

Liquidi incompressibili: ρ costante ed uniforme

La seconda ipotesi semplificativva riguarda le forze di attrito interno. Cominceremo, in questo paragrafo, col considerarle trascurabili. Ciò comporta che considereremo *nullo* il *coefficiente di viscosità* η, e quindi non prenderemo in considerazione gli sforzi di taglio. Un liquido incompressibile per cui sia nullo il coefficiente di viscosità si dice *perfetto*. È da osservare che, nel moto di un liquido perfetto, saranno assenti gli effetti dissipativi dovuti all'attrito interno. La dinamica dei fluidi perfetti darà luogo a risultati limite, che però, in molti casi, si avvicinano notevolmente alla realtà sperimentale, laddove la viscosità sia effettivamente resa abbastanza piccola.

Liquidi perfetti: $\rho = \text{cost}$ $\eta = 0$

Descrizione del moto

Per descrivere un liquido in movimento sono usualmente adoperati due approcci diversi:

a) schema lagrangiano;

b) schema euleriano.

Schema lagrangiano

Lo *schema lagrangiano* consiste nel fissare un sistema di riferimento inerziale e nel descrivere il movimento delle singole particelle di liquido in questo sistema di riferimento.

Lo schema lagrangiano prevede dunque di individuare la posizione iniziale di un elemento di fluido, tramite le sue coordinate (x_o, y_o, z_o

all'istante $t = 0$, e di seguirne il moto agli istanti successivi con la determinazione (per mezzo della soluzione di equazioni differenziali che schematizzano le leggi della dinamica) delle coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, via via assunte nel tempo dall'elemento stesso. Si tratta, in altre parole, di inseguire una particella nel suo moto rispetto al riferimento fisso. Per esempio, nel caso di un torrente, è come se si mettesse un leggero galleggiante in un punto e si seguisse l'evoluzione del suo moto rispetto alle rive. Ogni elemento di liquido darà luogo a delle equazioni orarie del tipo:

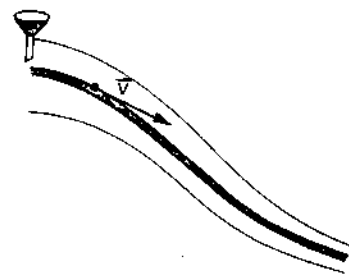
Variabili lagrangiane

$$\begin{cases} x(t) = x(x_0, y_0, z_0; t) \\ y(t) = y(x_0, y_0, z_0; t) \\ z(t) = z(x_0, y_0, z_0; t) \end{cases}$$

La descrizione lagrangiana del moto di un liquido sarà completa quando saranno ricavate tante terne di variabili $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, quante sono le particelle di liquido in cui l'intera massa liquida sarà decomponibile.

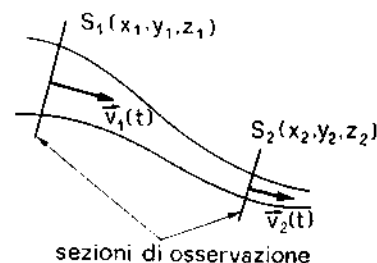
Linee di corrente

Si dicono *linee di corrente* le traiettorie descritte dalle particelle fluide. In ogni punto, la velocità risulta tangente alla traiettoria dell'elemento fluido considerato.

Nel caso di moto stazionario (che fra poco definiremo) è facile visualizzare le linee di corrente iniettando nel liquido in movimento un sottile filetto continuo di liquido colorato. Si osserva che il filetto colorato mantiene la sua individualità anche a notevole distanza dal punto di iniezione ed anche in presenza di ostacoli, che, entro certi limiti di velocità, vengono aggirati. Nel liquidi reali, al di sopra di una certa velocità limite, si osserva che il filetto colorato, nelle vicinanze dell'ostacolo, si decompone manifestando l'esistenza di vortici. Questo fenomeno è dovuto all'attrito interno. In assenza di vortici, si osserva anche che filetti fluidi diversi, cioè partenti da punti diversi di una sezione del liquido in movimento, mantengono la propria individualità, scorrendo nel tempo senza mescolarsi l'uno con l'altro. Nell'ipotesi semplificativa di liquidi perfetti, non dobbiamo aspettarci fenomeni di vorticosità.

Schema euleriano

Lo *schema euleriano* consiste nell'osservare il moto di un liquido in ogni punto fissato. Di fatto si osservano le velocità delle particelle di fluido quando passano nel punto di osservazione. È chiaro che questa velocità, detta euleriana, si riferisce a particelle di liquido sempre diverse tra di loro. È come se si osservasse il moto dell'acqua di un fiume stando su un ponte ed usando il ponte come traguardo.

Quindi, scrivendo le componenti euleriane della velocità:

$$\begin{cases} v_x = v_x(x, y, z; t) \\ v_y = v_y(x, y, z; t) \\ v_z = v_z(x, y, z; t) \end{cases}$$

con le coordinate (x, y, z) si intende definire la posizione del punto di osservazione e con il tempo t l'istante in cui si effettua la misura.

Il punto di vista euleriano si applica, ovviamente, a tutte le grandezze fisiche relative al moto del fluido (accelerazione, pressione, densità ecc.).

Osserviamo che in entrambi gli schemi considerati (lagrangiano ed euleriano) ci siamo riferiti al moto di particelle od elementi di fluido. Coerentemente a quanto già discusso nell'ambito della statica dei fluidi, per particelle intendiamo un volumetto di fluido abbastanza piccolo rispetto ad

ogni ragionevole sensibilità di misura, ma pur sempre contenente un grandissimo numero di molecole. Quando si parla di velocità di una particella di fluido, ci si riferisce alla velocità della particella come un tutto unico e si trascurano completamente i moti di agitazione termica delle singole molecole all'interno dell'elemento fluido considerato.

Salvo avviso contrario, nel seguito utilizzeremo il punto di vista euleriano per descrivere i vari casi di movimento di fluidi.

In ogni punto di un liquido in movimento in un condotto, ad ogni istante, è definita una velocità euleriana rispetto, per esempio, a traguardi solidali con il condotto. Ciò vuol dire che è definito un *campo vettoriale* $\vec{v}(x, y, z; t)$.

Moto stazionario

Si dice che il *moto* del liquido è *stazionario* se tale *campo* vettoriale *delle velocità non varia nel tempo*.

Ciò vuol dire che misure di velocità euleriana, eseguite a tempi diversi in uno stesso traguardo, danno sempre lo stesso risultato. Questo non implica, ovviamente, che una determinata particella di liquido, nel suo moto, debba avere sempre la stessa velocità; in generale, la sua velocità varierà da punto a punto della sua traiettoria. In un moto stazionario accade soltanto che tutte le diverse particelle di liquido, che successivamente si presentano ad uno stesso traguardo euleriano di osservazione, hanno sempre la stessa velocità in quel traguardo.

Dovendo questa proprietà essere valida per ogni traguardo, ne consegue l'importante caratteristica dei moti stazionari di avere le traiettorie delle particelle fisse nel tempo.

Linee di flusso

Nei moti stazionari è particolarmente utile il concetto di *linea di flusso*.

Si dice linea di flusso ad un certo istante una curva orientata, tracciata nel liquido in movimento, tale che, in ogni suo punto P, la retta ad essa tangente ha la direzione e verso della velocità della particella che passa per P all'istante considerato.

Per visualizzare un modo di costruire una linea di flusso, si può considerare, ad un certo istante t, una particella 1 di liquido che ha, a quell'istante, la velocità $\vec{v}_1$ ed un segmento di origine in 1 di lunghezza infinitesima, lungo la direzione di $\vec{v}_1$. Questo segmento termina in un punto in cui, sempre all'istante t, sta passando la particella 2 con velocità $\vec{v}_2$. Un segmento infinitesimo lungo la direzione di $\vec{v}_2$ ha l'estremo nel punto in cui, allo stesso tempo t, si trova la particella 3 con velocità $\vec{v}_3$. Così, procedendo per segmenti tangenti infinitesimi successivi, si traccia tutta la linea di flusso, ad un certo istante.

È chiaro che, *nel* caso di *moto stazionario, le linee di flusso non dipendono dal tempo*. Esse coincidono allora con le linee di corrente.

Dalla definizione di linea di flusso discende immediatamente che, per ogni punto di un liquido in movimento, ad un certo istante t, può passare una sola linea di flusso, dal momento che la particella che passa, al tempo t, dal punto considerato, ha un solo valore della velocità.

Le zone singolari in cui, eventualmente, più linee di flusso si intersecano, si dicono sorgenti o pozzi del liquido. Si tratta di zone in cui coesistono diverse particelle di liquido con velocità diverse.

Tubo di flusso

In un liquido in moto stazionario, in una zona priva di pozzi e sorgenti, consideriamo una linea chiusa l. Per ciascuno dei punti di l passa una linea di flusso. L'insieme di queste linee di flusso costituisce una superficie tubolare che racchiude un insieme di linee di flusso, che si dice *tubo di flusso*.

Filetto elementare

Un tubo di flusso a sezione molto piccola (al limite infinitesima) prende il nome di filetto fluido elementare. Come osservato a proposito

della visualizzazione del moto del fluido mediante coloranti, i tubi di flusso hanno notevole individualità e procedono in regime di sostanziale impermeabilità gli uni rispetto agli altri adiacenti; nello schema di fluido perfetto tale impermeabilità è completa considerato che è nulla la componente della velocità ortogonalmente alla superficie laterale del tubo di flusso.

Conservazione della massa: equazione di continuità

Prendiamo in esame un liquido perfetto in moto stazionario in un tubo elementare di flusso, eventualmente coincidente con un condotto. Consideriamo due sezioni di aree S_1 ed S_2 rispettivamente, normali alle linee di flusso e di dimensioni tali che, all'interno di ciascuna di esse, la velocità del liquido abbia lo stesso valore. Indichiamo con $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ le relative velocità.

La massa del liquido – o equivalentemente il suo volume per liquidi incompressibili –, compresa tra le sezioni S_1 ed S_2, non varia nel tempo. Questa proprietà di *conservazione della massa* si traduce (in assenza di sorgenti o pozzi) nella condizione che la massa, che entra nel tempo dt attraverso S_1, deve essere uguale alla massa che esce, nello stesso intervallo di tempo, dalla sezione S_2: per quanto detto precedentemente, è chiaro infatti che non possono esserci trasferimenti di massa attraverso la superficie tubolare esterna. La massa che entra attraverso S_1 è pari alla massa contenuta nel cilindro di base S_1 ed altezza $v_1\,dt$ e cioè $dm = \rho\, S_1\, v_1\, dt$; analogamente, la massa che esce da S_2 è pari alla massa contenuta nel cilindro di base S_2 ed altezza $v_2\,dt$, e cioè $dm = \rho\, S_2\, v_2\, dt$. Dunque, per la conservazione della massa deve essere:

$$\rho\, S_1\, v_1\, dt = \rho\, S_2\, v_2\, dt$$

da cui, potendosi ripetere il ragionamento per ogni coppia di sezioni del tubo di flusso, si ricava:

$$v\, S = \text{invariante} \qquad \text{(equazione di continuità della massa)}$$

La quantità $v\,S$, che rappresenta il volume che passa nell'unità di tempo attraverso una sezione del tubo, si dice *portata* (volumica) Q:

$$Q = v\, S = \text{invariante}\ [\mathrm{m^3/s}] \qquad [\text{IX}.11]$$

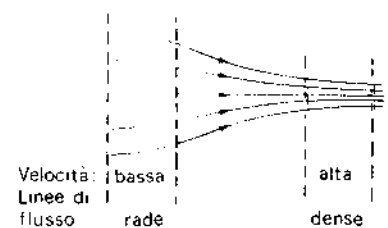
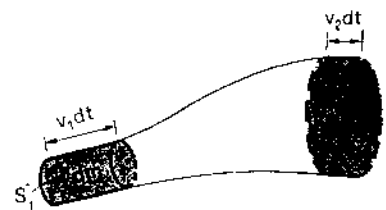
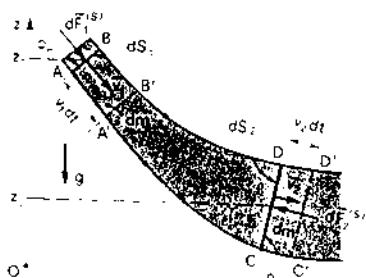
La portata è la stessa in ogni sezione di tubo di flusso, e in regime stazionario essa è costante nel tempo.

L'invarianza della portata implica che, laddove un tubo di flusso si restringe, la velocità aumenta e viceversa. La rappresentazione del moto in termini di linee di flusso, in modo equivalente, fornisce addensamento di linee dove la velocità $\vec{v}$ del fluido è alta (campo vettoriale intenso) e rarefazione di linee dove la velocità è bassa.

Teorema di Bernoulli

Il teorema dell'energia cinetica applicato ad un liquido perfetto in modo stazionario nel campo della gravità dà luogo ad una classica relazione che prende il nome di *teorema di Bernoulli*.

Consideriamo una porzione di un filetto fluido compresa tra la sezione AB, di area dS_1, posta alla quota z_1 ed in cui la velocità vale $\vec{v}_1$ e la pressione p_1, e la sezione CD, di area dS_2, posta alla quota z_2 ed in cui la velocità vale $\vec{v}_2$ e la pressione p_2. Il liquido contenuto nella zona $ABCD$ all'istante t si muove sotto l'azione della forza di volume costituita dalla gravità e delle forze di superficie applicate alle superfici di base del filetto dS_1 e dS_2, da parte del liquido esterno al volume $ABCD$. Siccome il liquido è per-

fetto, non ci sono sforzi di taglio per attrito interno sulla superficie tubolare laterale che completa il contorno dell'elemento di volume considerato, ma sforzi normali da parte del liquido esterno.

Per effetto di queste forze, il liquido che, all'istante t, occupa il volume $ABCD$, all'istante $(t + dt)$ occuperà il volume $A'B'C'D'$. Osserviamo che, per l'equazione di continuità, la massa dm contenuta nel volume $ABA'B'$ pari a $dm = \rho\, dS_1\, v_1\, dt$, è uguale alla massa dm contenuta nel volume $CDC'D'$, e pari a $dm = \rho\, dS_2\, v_2\, dt$.

Applichiamo il *teorema dell'energia cinetica* relativamente alla variazione di configurazione che si realizza nel tempo dt.

Per quanto riguarda il lavoro della forza peso, osserviamo che la massa racchiusa nel volume $A'B'CD$ non cambia quota, e quindi il lavoro della gravità è ricondotto a quello relativo allo spostamento di una massa $dm = \rho\, dS_1\, v_1\, dt = \rho\, dS_2\, v_2\, dt$ dalla quota z_1 alla quota z_2. Tale lavoro è positivo e vale

$$dL_g = dm\, g\,(z_1 - z_2)\,.$$

Il lavoro delle forze di superficie $d\bar{F}_1^{(s)}$ e $d\bar{F}_2^{(s)}$, esercitate verso l'interno del volume $ABCD$ sulle sezioni dS_1 e dS_2 da parte del liquido esterno vale:

$$\begin{aligned} dL_S &= dF_1^{(s)}\, v_1\, dt - dF_2^{(s)}\, v_2\, dt = \\ &= p_1\, dS_1\, v_1\, dt - p_2\, dS_2\, v_2\, dt \end{aligned}$$

in cui i segni tengono conto del fatto che lo spostamento dei punti di applicazione delle due forze è diretto in un caso concordemente e in un caso discordemente rispetto alla forza di pressione stessa. Il lavoro delle forze di superficie sul mantello tubolare di contorno è nullo perché su questo le forze sono ovunque perpendicolari agli spostamenti.

Esprimiamo ora la variazione di energia cinetica intervenuta nell'intervallo di tempo dt. Nella configurazione iniziale l'energia cinetica complessiva può essere scritta come somma di due termini relativi alle masse contenute, al tempo t, nei volumi $ABA'B'$ ed $A'B'CD$ rispettivamente:

$$K^{(IN)} = K_{ABA'B'}(t) + K_{A'B'CD}(t)$$

Nello stato finale, cioè all'istante $(t + dt)$, in modo analogo l'energia cinetica totale si potrà scrivere come:

$$K^{(FIN)} = K_{A'B'CD}(t + dt) + K_{CDC'D'}(t + dt)$$

D'altra parte, in virtù della stazionarietà del moto, le quantità al secondo membro di queste relazioni non dipendono (fissata la loro posizione) dall'istante in cui le si calcola. Per cui la differenza fra il valore finale e quello iniziale dell'energia cinetica del volume di fluido considerato risulta in definitiva:

$$dK = K^{(FIN)} - K^{(IN)} = K_{CDC'D'} - K_{ABA'B'} = \frac{1}{2}\, dm\, v_2^2 - \frac{1}{2}\, dm\, v_1^2$$

Tenuto conto di queste relazioni, il teorema dell'energia cinetica $(dL_g + dL_S = dK)$ assume la forma:

$$dm\, g\,(z_1 - z_2) + p_1\, dS_1\, v_1\, dt - p_2\, dS_2\, v_2\, dt = \frac{1}{2}\, dm\, v_2^2 - \frac{1}{2}\, dm\, v_1^2$$

Tenuto conto che

$$dm = \rho\, dS_1\, v_1\, dt = \rho\, dS_2\, v_2\, dt\,,$$

per cui

$$dS_1\, v_1\, dt = S_2\, v_2\, dt = \frac{dm}{\rho}\,,$$

si ha

$$dm\, g\,(z_1 - z_2) + p_1 \frac{dm}{\rho} - p_2 \frac{dm}{\rho} = \frac{1}{2}\, dm\, v_2^2 - \frac{1}{2}\, dm\, v_1^2\,,$$

da cui infine:

$$g\, z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\, v_1^2 = g\, z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}\, v_2^2$$

Data l'arbitrarietà della scelta delle sezioni considerate, il *teorema di Bernoulli* stabilisce che, per ogni sezione del filetto fluido considerato, è invariante la quantità:

$$p + \rho\, g\, z + \frac{1}{2}\, \rho\, v^2 = \text{invariante} \qquad \text{[IX.12]}$$

Equazione di Bernoulli

Osserviamo che i singoli addendi p, $\rho\, g\, z$ ed $\frac{1}{2}\, \rho\, v^2$ dipendono dal punto di osservazione considerato (ma non dal tempo perché il moto è stazionario), mentre la loro somma è invariante.

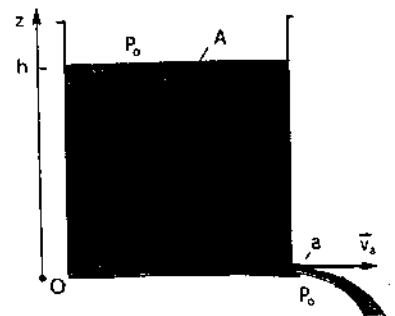
Questo risultato è estendibile ad un tubo di flusso finito e magari ad un intero condotto, purché pressione, quota e velocità possano essere considerati uniformi sull'intera sezione del tubo.

Per meglio chiarire il significato e le implicazioni del teorema di Bernoulli, esaminiamo alcuni esempi.

Esempi

E.IX.10. Consideriamo un recipiente di sezione di area A contenente un liquido perfetto di densità ρ per un'altezza h. Supponiamo che all'altezza della base del recipiente laterale, sia praticato un foro di area $a << A$, dal quale fuoriesca il liquido con velocità inizialmente orizzontale $\bar{v}_a$. Dopo breve tempo si crea un moto praticamente stazionario in cui, eliminando al massimo le spigolosità, abbiamo a che fare con un tubo di flusso. Il teorema di Bernoulli si scrive:

$$p_0 + \rho\, g\, h + \frac{1}{2}\, \rho\, v_A^2 = p_0 + \frac{1}{2}\, \rho\, v_a^2$$

dove la pressione esterna alla sezione A è p_0, così come vale ancora p_0 la pressione esterna al foro di sezione a. L'ipotesi che sia $A >> a$ implica che la velocità con cui scende la superficie libera del liquido nel recipiente sia molto minore della

velocità di efflusso v_a: $v_A/v_a = a/A << 1$. Pertanto, con ragionevole approssimazione si può scrivere:

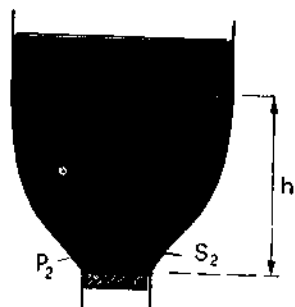
$$\rho g h \simeq \frac{1}{2} \rho v_a^2 \quad \text{da cui}$$

$$v_a = \sqrt{2 g h}$$

Teorema di Torricelli relativo alla velocità di efflusso

Osserviamo che la velocità di uscita di un liquido da un piccolo orificio non dipende dal tipo di liquido (purché schematizzabile come liquido perfetto). Tale velocità coincide con la velocità che avrebbe un grave che cadesse nel vuoto per un'altezza h.

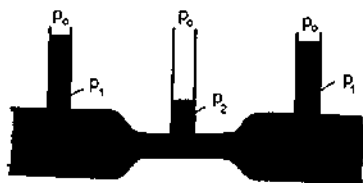
Area effettiva del foro di uscita

Osserviamo anche che, se si volesse calcolare la portata in uscita dal foro a, non sarebbe corretto moltiplicare per l'area a la velocità trovata. Si osserva che, a seconda della forma più o meno arrotondata o prolungata del foro di uscita, occorre considerare un'*area effettiva* ridotta, per la cui stima esistono dei coefficienti tabulati (coefficienti di efflusso) sempre minori dell'unità.

E.IX.11. Supponiamo di avere un condotto che presenti un tappo impermeabile ad una sua sezione S_2, e che contenga liquido di densità ρ. Applichiamo il teorema di Bernoulli alla sezione S_2 ed alla sezione S_1, che sta al di sopra di S_2 di un tratto h.

Poiché il liquido non è in movimento, si può scrivere:

$$p_1 + \rho g h = p_2$$

avendo posto uguale a zero la quota della sezione S_2. La relazione precedente coincide con la legge di Stevino, che risulta dunque un caso particolare del teorema di Bernoulli.

Tubo di Venturi

E.IX.12. Consideriamo un condotto orizzontale a sezione variabile. Sia S_1 la sezione del condotto in un tratto largo ed S_2 la sezione in una strozzatura. I tubi verticali aperti verso l'esterno servono a misurare la pressione nelle varie sezioni considerate, tramite una misura dell'altezza della colonna di liquido che vi si dispone all'interno.

Data l'orizzontalità del tubo, nell'applicazione del teorema di Bernoulli, non comparirà il termine proporzionale alla quota dovuto alla forza peso e quindi:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Sappiamo, d'altra parte, che la portata è costante, per cui:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad \text{da cui} \quad v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1},$$

e quindi

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 v_2^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 .$$

Se ne deduce che:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]$$

da cui, essendo $(S_2/S_1) < 1$, si ricava

$$p_1 - p_2 > 0 \quad \text{ed anche} \quad p_2 < p_1$$

Dunque, in una strozzatura la velocità è maggiore e la pressione minore (effetto Venturi).

La pressione è minore dove la sezione è più piccola e la velocità più grande (effetto Venturi)

E.IX.13. *Una pompa preleva acqua da un pozzo profondo $h = 50$ m e la incanala in un condotto di raggio $R = 3$ cm con portata $Q = 1200$ l/min. Calcolare la potenza necessaria al funzionamento della pompa.*

La pompa deve compiere il lavoro di sollevamento dell'acqua per un tratto h ed inoltre deve fornire all'acqua l'energia cinetica con cui procede nel condotto.

Nell'unità di tempo viene sollevata una massa d'acqua pari a ρQ ed il lavoro relativo è $\rho Q g h$ (potenza di sollevamento); con questo lavoro l'acqua arriverebbe in superficie a velocità nulla.

La massa ρQ viene dotata di energia cinetica $\frac{1}{2} \rho Q v^2$, avendo indicato con v la velocità dell'acqua nel condotto. Questa velocità è ricavabile dalla conoscenza della portata e dell'area della sezione del condotto:

$$Q = v S \quad \text{da cui} \quad v = Q/S .$$

La potenza complessiva vale:

$$W = \rho Q g h + \frac{1}{2} \rho Q \frac{Q^2}{S^2} =$$

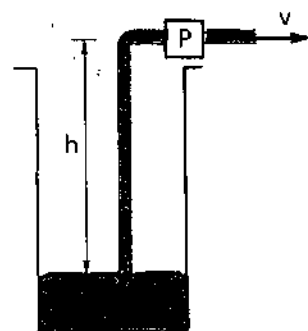
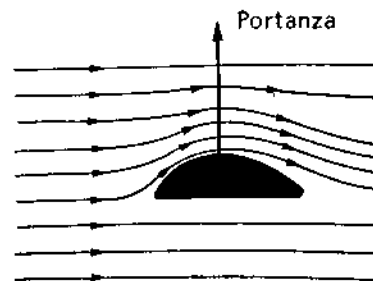
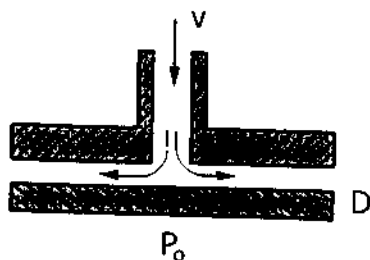
$$= \left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(\frac{1200}{60} \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)\left(9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(20 \text{ m}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(\frac{1200}{60} \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)^3 \left(\frac{1}{\pi \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 \text{ m}^2}\right)^2 =$$

$$= (3{,}92 \cdot 10^3 + 0{,}5 \cdot 10^3) = 4{,}42 \text{ kW} .$$

Spinta aerodinamica

Se un corpo si muove in un fluido con velocità relativa $\vec{v}$, tutto va come se il corpo fosse fermo ed un flusso di fluido con velocità $(-\vec{v})$ lo investisse. Su questo principio funzionano le gallerie del vento, per lo studio delle azioni meccaniche su parti di macchine destinate a muoversi in aria, normalmente con alte velocità.

Nel caso in cui un fluido perfetto investe un corpo in quiete rispetto all'osservatore, le linee di flusso debbono adattarsi alla presenza del corpo, che costituisce un ostacolo impenetrabile. Se il corpo ha un profilo dissimmetrico, come per esempio accade nel caso del profilo di un'ala di aeroplano, le linee di flusso si addensano dalla parte con maggiore curvatura, perché in sostanza è come se incontrassero una specie di strozzatura, dove la velocità aumenta. In questa zona di maggiore velocità di efflusso, la pressione diminuisce - come nell'effetto Venturi -, ed in particolare diminuisce rispetto alla pressione presente dalla parte opposta, sagomata con minore curvatura. Questa differenza di pressione sui due lati del corpo produce una forza risultante non nulla che, nel caso degli aerei, si dice portanza. È superfluo rimarcare che questa forza, dovuta al moto relativo del fluido rispetto al corpo asimmetricamente sagomato, è sostanzialmente diversa dalla spinta di Archimede.

Esempio

E.IX.14. *Consideriamo un dispositivo costituito da un disco fisso con il centro forato e collegato ad un tubo attraverso il quale si può soffiare aria.*
Un secondo disco D, di ugual raggio, può essere sostenuto in equilibrio contro il disco fisso soffiando aria dentro il tubo (e non aspirando) con opportuna velocità v. Perché?

Soffiando dentro il tubo, si crea un flusso di aria veloce nella zona fra disco fisso e disco D. In questa strozzatura la velocità di efflusso è alta e, per effetto Venturi, la pressione locale più bassa della pressione p_0 dell'aria ferma, che è sulla faccia inferiore del disco D. Questa differenza di pressione Δp si traduce in una forza verticale sul disco D di area S pari a $F = \Delta p\, S$. Con opportuno valore della velocità di efflusso si arriva ad avere una forza verticale capace di fare equilibrio alla forza peso del disco D (purché il peso del disco D sia inferiore al prodotto $p_0 S$).

IX.8. Liquidi reali in movimento

La dinamica dei liquidi reali presenta, in generale, notevoli difficoltà. Infatti, pur potendosi, nella gran parte dei casi, mantenere l'ipotesi di incompressibilità, la presenza degli attriti interni (viscosità) rende il comportamento dei liquidi assai complesso e di non agevole schematizzazione.

Regime laminare
Velocità critica

Regime turbolento

Si osserva, innanzi tutto, che il comportamento dinamico di un liquido reale dipende in maniera molto vistosa dalla velocità. A *basse velocità* si trova che la presenza di viscosità implica che i vari filetti fluidi, in cui si può pensare decomposto un tubo di flusso, scorrano gli uni rispetto agli altri con velocità diverse e con sforzi di taglio reciproci, ma mantengano la propria individualità, come nel caso del moto di liquidi perfetti. In questo caso si dice che il moto si sviluppa in regime di *flusso laminare*. All'aumentare della velocità, si osserva che, giunti ad una *velocità critica*, il flusso laminare cessa e si formano dei vortici o si produce un mescolamento di liquido inizialmente appartenente a filetti fluidi diversi. Si dice che è subentrato il *regime turbolento*. Nell'esperimento di visualizzazione, mediante coloranti, dei filetti fluidi, si vede che, superato un certo valore di velocità di efflusso, per esempio ad una strozzatura o ad un ostacolo, il filetto di decompone di colpo ed il colorante invade tutto il condotto, oppure si formano dei vortici, in cui il filetto fluido tende a richiudersi ad anello.

Nel seguito tratteremo alcuni casi di regime laminare ed indicheremo dei criteri empirici per stabilire a priori i limiti di velocità in cui il regime è stabilmente laminare.

Moto laminare di un fluido viscoso in un condotto cilindrico orizzontale

Se un liquido viscoso è in moto stazionario in un lungo condotto cilindrico a sezione costante di raggio R, con velocità abbastanza basse da non produrre situazioni di turbolenza, il flusso è laminare ed i filetti fluidi di particelle in moto con ugual velocità sono costituiti, per la simmetria cilindrica del sistema, da tubi di piccolo spessore, coassiali con il condotto. La velocità del generico di questi tubi elementari, di raggio interno r e esterno $(r + dr)$, varia dal valore zero per il tubo che bagna il condotto (raggio R) ad un massimo valore per il tubo che si sovrappone all'asse del condotto. La distribuzione di velocità per i vari tubi è schematizzata in figura (nel caso di condotto «capillare» a piccolo raggio R). Se, con opportuni accorgimenti, si mantiene un liquido reale in moto stazionario (portata costante)

in un condotto orizzontale si osserva che la pressione nel fluido diminuisce a mano a mano che si procede nel verso di avanzamento del liquido.

Si osserva quella che si chiama *perdita di carico* lungo un tratto di condotto.

Perdita di carico

La caduta di pressione che si osserva tra due sezioni di un tubo orizzontale è diretta conseguenza della viscosità. Infatti, poiché la forza peso non interviene in un moto orizzontale, e poiché la portata e quindi la velocità è costante nel tempo, è evidente che la forza di superficie non nulla risultante dalle diverse pressioni presenti alle sezioni S_1 ed S_2, non producendo un'accelerazione nel liquido, è equilibrata dinamicamente, istante per istante, dalla forza di attrito schematizzata dalla viscosità.

All'interno del condotto capillare di raggio R consideriamo una porzione di liquido di volume cilindrico, coassiale al condotto, di lunghezza l e raggio $r < R$.

Questa porzione finita di liquido, con moto stazionario, è sottoposta al risultante delle forze di superficie sulle basi S_1 ed S_2:

$$F^{(s)} = p_1 S_1 - p_2 S_2 = (p_1 - p_2)\,\pi\, r^2 = \Delta p\,\pi\, r^2$$

e ad un'uguale ed opposta forza di attrito A.

Per il calcolo della forza frenante A ricordiamo la [IX.1], in base alla quale lo sforzo di taglio $\tau = dF_t^{(s)}/dS$ si può esprimere come $\tau = \eta \dfrac{dv}{dr}$, dove dv indica la differenza di velocità di due strati contigui a distanza dr. La forza A, agente sul mantello laterale del cilindro di altezza l e raggio r, risulta allora:

$$A = \tau \cdot 2\,\pi\, r\, l = \eta \frac{dv}{dr}\, 2\,\pi\, r\, l$$

La situazione di moto stazionario del cilindro di liquidò considerato implica che il risultante delle forze applicate sia nullo:

$$\Delta p\,\pi\, r^2 + \eta \frac{dv}{dr}\, 2\,\pi\, r\, l = 0$$

da cui

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\,\eta\, l}\, r \qquad \text{[IX.13]}$$

L'aver trovato che la derivata dv/dr è negativa è coerente con il fatto che la velocità è massima al centro ($r = 0$) e si annulla sulla parete del condotto ($r = R$).

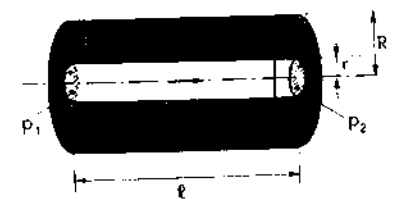
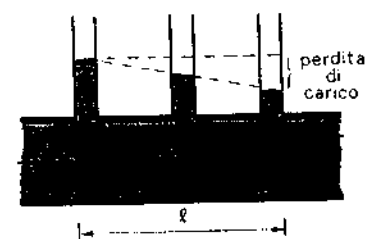
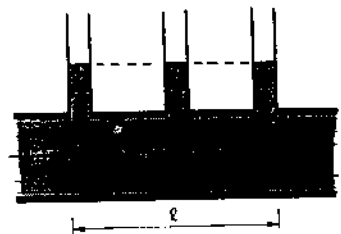
L'andamento della velocità in funzione della distanza r dall'asse si ricava per integrazione della [IX.13]:

$$\int_{v(o)}^{v(r)} dv = -\int_o^r \frac{\Delta p}{2\,\eta\, l}\, r\, dr = -\frac{\Delta p}{2\,\eta\, l}\left[\frac{r^2}{2}\right]_o^r = -\frac{\Delta p}{4\,\eta\, l}\, r^2,$$

da cui:

$$v(r) - v(o) = -\frac{\Delta p}{4\,\eta\, l}\, r^2$$

e quindi:

$$v(r) = v(o) - \frac{\Delta p}{4\eta l} r^2$$

dove v(o) indica la velocità nell'asse del condotto. La condizione che la velocità si annulli sulla parete del condotto determina il valore di v(o):

$$v(R) = 0 = v(o) - \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2$$

da cui

$$v(o) = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2.$$

Quindi:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2) \qquad [IX.14]$$

È opportuno ricordare che questa deduzione, che nella [IX.14] prevede un profilo di velocità parabolico, si riferisce a tubi capillari, dove il massimo della velocità si raggiunge proprio sull'asse del condotto. Per condotti di grande raggio, il profilo di velocità $v = v(r)$ presenta una zona piatta intorno all'asse del condotto. Infatti, per grandi raggi, è abbastanza lontana la parete del condotto che, in ultima analisi, è l'origine di quel frenamento, che poi i vari filetti fluidi, per viscosità, si trasmettono l'un l'altro.

Dalla conoscenza del profilo $v = v(r)$ della velocità discende immediatamente il calcolo della portata del condotto. Basta suddividere il condotto in una serie di filetti fluidi tubiformi di raggio r e spessore dr, all'interno dei quali la velocità è uniforme con valore $v(r)$ ed il cui contributo alla portata è:

$$dQ = v(r)\, dS = v(r) \cdot 2\pi r\, dr.$$

Integrando su tutto il condotto si ha:

Lege di Poiseuille

$$Q = \int v(r)\, dS = \int_o^R v(r) \cdot 2\pi r\, dr =$$

$$= \frac{\Delta p}{4\eta l} 2\pi \int_o^R (R^2 - r^2)\, r\, dr = \qquad [IX.15]$$

$$= \frac{\Delta p}{2\eta l}\pi\left[\frac{R^2 R^2}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi}{8}\frac{\Delta p}{\eta l} R^4$$

Viscosimetri a flusso capillare

Osserviamo che la portata in un capillare dipende dalla quarta potenza del raggio R e non da R^2 come accadeva per liquidi perfetti. Osserviamo anche che la legge di Poiseuille si presta a ricondurre la misura del coefficiente di viscosità a misure di pressione (Δp), portata volumetrica (Q) e lunghezze (R, l). Su questo principio si basa il funzionamento dei viscosimetri a flusso capillare.

Quando un corpo si muove relativamente ad un mezzo viscoso avviene che lo strato di fluido più prossimo al corpo aderisce al corpo stesso e ne viene trascinato. Questo primo strato tende a trascinare altri ad esso adiacenti. A seconda della velocità del corpo rispetto al fluido si potrà avere un regime laminare oppure un regime turbolento (con formazione di scia) di penetrazione del corpo nel fluido.

L'esperienza dimostra che un corpo che si muove in un fluido incontra una resistenza che dipende:

a) dalle dimensioni e dalla forma del corpo;

b) dalla densità e dalla viscosità del fluido;

c) dalla velocità relativa.

Per basse velocità, il *moto* del fluido intorno al corpo è *laminare* e la resistenza A incontrata dal corpo è direttamente proporzionale alla prima potenza della velocità, così come abbiamo anticipato nel cap. V.

In particolare, nel caso di *corpo sferico* di raggio R si ha la così detta *legge di Stokes*

Legge di Stokes per il moto laminare

$$A = 6 \pi \eta R v \qquad [IX.16]$$

per la forza frenante A incontrata dal corpo.

Esempio

E.IX.15. *Una sfera di massa m e raggio R cade in un fluido in quiete di densità ρ. Calcolare la velocità asintotica della sfera.*

Sulla sfera è attiva una forza risultante del tipo:

$$F = mg - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g - 6 \pi \eta R v$$

in cui i tre termini rappresentano la forza peso, la forza di Archimede e la resistenza del mezzo (Stokes) rispettivamente.

Per la seconda legge della dinamica si ha:

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

La velocità asintotica richiesta può essere ottenuta con un semplice ragionamento che evita l'integrazione della equazione differenziale precedente. La forza risultante è costituita da una parte costante

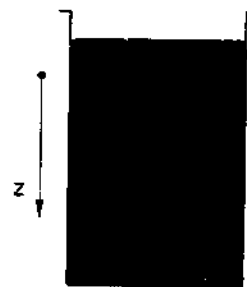
$$C = \left(mg - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g\right)$$

e da una parte negativa il cui modulo cresce con la velocità. Quando questo termine negativo arriverà ad essere uguale a C, l'accelerazione si annullerà e la sfera si muoverà di moto uniforme con velocità asintotica v_∞. Dunque:

$$mg - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g - 6 \pi \eta R v_\infty = 0$$

da cui:

$$v_\infty = \frac{C}{6 \pi \eta R}.$$

La formula di Stokes, applicata a casi analoghi a quelli dell'esempio E.IX.15, permette di misurare il coefficiente di viscosità tramite una misura di velocità limite. Tale metodo è effettivamente usato specialmente nel caso di fluidi molto viscosi.

Moto turbolento

Formula empirica di Newton

Per velocità maggiori, quando il regime diventa turbolento, nel caso di corpi simmetrici rispetto alla direzione di moto, la dipendenza dalla velocità della forza di resistenza del mezzo diventa di tipo quadratico. In particolare, per velocità al di sotto della velocità del suono in aria (340 m/s), vale abbastanza bene la seguente *formula* empirica *di Newton*:

$$A = C S \rho v^2$$

nella quale S è l'area della proiezione del corpo su un piano ortogonale alla direzione del moto, ρ è la densità del fluido (non compare la viscosità!) e C è un coefficiente che dipende dalla forma più o meno aerodinamica del corpo.

Concludiamo il paragrafo accennando ad un criterio empirico usato per stabilire quando il moto laminare è stabile.

Si considera il parametro adimensionale:

$$R_e = \frac{\rho v l}{\eta}$$

Numero di Reynolds

detto *numero di Reynolds*, in cui ρ è la densità del fluido, η il suo coefficiente di viscosità, v è la velocità del fluido rispetto al corpo od alle pareti del tubo, ed l è una lunghezza «caratteristica» del problema (per esempio nel moto di fluido in condotto, l è il diametro del condotto e v è la velocità media entro il condotto e non la velocità massima sull'asse del tubo; nel caso di una sfera che si muove in un fluido l è il diametro della sfera).

I *valori critici* del numero di Reynolds, per i quali si passa dal regime laminare al regime turbolento, dipendono ovviamente dalla forma geometrica dei sistemi. Esistono, tuttavia, dei criteri empirici approssimati del tipo:

- per $R_e < 1000$ il moto è praticamente sempre laminare;
- per $R_e < 2000$ in tubature diritte di sezione circolare di raggio R il flusso è sempre laminare e quindi la velocità critica è $v_{critica} \simeq \frac{2000\,\eta}{2\,\rho R}$
- per $R_e > 2000$ in tubature cilindriche diritte si può avere un flusso laminare o turbolento a seconda di vari fattori, tra cui la rugosità della parete del tubo
- per $R_e > 10000$ il regime è praticamente sempre turbolento.

IX.9. Tensione superficiale

Un liquido perfetto è un sistema materiale indifferente alla forma: esso assume la forma del recipiente in cui viene posto ma, per suo conto, non ha alcuna preferenza per una forma o per l'altra. Per i liquidi reali, questa proprietà vale solo approssimativamente; ad esempio, una goccia di mercurio

disposta su un tavolo orizzontale assume forma approssimativamente sferica, benché la configurazione di equilibrio dovuta alla sola forza di gravità (configurazione di energia potenziale minima) sia quella col baricentro più basso possibile, cioè quella in cui il liquido si spande in un sottile strato parallelo al piano. Questa preferenza per la forma sferica, che verrà approfondita nel seguito, discende dal fenomeno di *tensione superficiale*. Tale fenomeno è qualitativamente spiegabile in base alla considerazione microscopica che ogni molecola del liquido, trovandosi rispetto alle molecole adiacenti a distanza leggermente superiore rispetto alla distanza r_0 di equilibrio, è attratta da queste. Per le molecole interne al liquido, completamente circondate da altre molecole, il risultante di queste forze si annulla; mentre per le molecole che si trovano sulla superficie esterna del liquido, queste forze molecolari hanno un risultante diretto verso l'interno del liquido che si traduce in una azione di compressione.

Tensione superficiale

Della tensione superficiale diamo ora, in termini macroscopici, la definizione operativa.

Consideriamo un recipiente contenente acqua saponata; e in essa immergiamo una forchetta metallica con due soli denti fra di loro paralleli. Estraendo parzialmente la forchetta, si risconta che fra i denti si forma una pellicola di acqua saponata. Mediante misure dinamometriche, si trova che per la presenza di tale pellicola la forchetta è attratta verso il liquido da una forza f che risulta indipendente dall'area della pellicola (cioè dal tratto h di cui la forchetta è sollevata), ed è proporzionale alla larghezza L della forchetta stessa.

Tensione superficiale come forza per unità di lunghezza

Possiamo concludere che la pellicola presente in superficie al liquido esercita su un tratto l del suo bordo una forza proporzionale ad l. Nel caso della forchetta, la pellicola ha due facce e dunque la forza f misurata corrisponde a un tratto di bordo di lunghezza l pari a $2L$:

$$f = \tau l = \tau 2L \qquad \text{[IX.17]}$$

Il coefficiente di proporzionalità τ è una caratteristica del liquido, con le dimensioni di una forza per unità di lunghezza (τ si misura pertanto in Newton per metro): esso è detto *tensione superficiale* del liquido in questione.

Osserviamo che l'esperimento testé descritto può essere eseguito facilmente in acqua saponata perché l'effetto del sapone è quello di diminuire la tensione superficiale del liquido (esso è un «detensivo»). In acqua pura la tensione superficiale è così grande che essa spezza la pellicola di liquido appena si tenta di estrarre la forchetta.

Per estrarre la forchetta è necessario esercitare una forza uguale in modulo alla [IX.17] e opposta in verso; se la forchetta viene estratta di un tratto dh, la forza da noi applicata compie un lavoro positivo dato da:

$$dL = f\,dh = \tau l\,dh = \tau 2L\,dh = \tau\,dS \qquad \text{[IX.18]}$$

$dS = l\,dh = 2L\,dh$ rappresenta l'aumento di superficie libera del liquido che abbiamo provocato estraendo di dh la forchetta. Poiché per aumentare di dS la superficie libera del liquido dobbiamo compiere un lavoro positivo, ciò significa che la sua energia aumenta della quantità $d\Sigma$

$$d\Sigma = dL = \tau\,dS$$

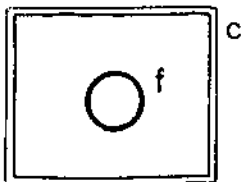
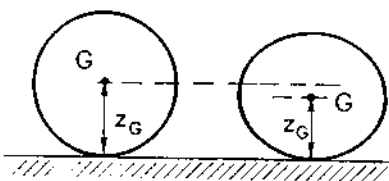
Tensione superficiale come energia per unità di superficie

Dunque *la tensione superficiale* $\tau = \frac{d\Sigma}{dS} = \frac{dL}{dS}$ *rappresenta anche l'energia per unità di superficie* libera che il liquido possiede in virtù delle forze intermolecolari. Tenendo conto della tensione superficiale, l'energia potenziale totale U_T di un liquido in equilibrio non è più descritta solo dalla energia U per unità di massa introdotta con le [IX.7]; ma occorre aggiungere il termine τS proporzionale alla superficie totale S del fluido:

$$U_T = \int_V \rho\, U\, dV + \tau S \qquad \text{[IX.19]}$$

Qualora, come spesso accade, la forza di volume sia solo la forza peso (costante su tutto il volume) la [IX.19] si può scrivere come:

$$U_T = \rho\, V g\, z_G + \tau S \qquad \text{[IX.20]}$$

dove: ρ : è la densità del fluido
V : è il suo volume
g : è l'accelerazione di gravità
z_G: è la quota del baricentro
τ : è la tensione superficiale
S : è la superficie

L'importanza relativa dei due termini della [IX.20] dipende, ovviamente, dalla quantità di liquido e dalla sua geometria. Quando si hanno grandi quantitativi di liquido, il primo termine domina largamente, abbastanza indipendentemente dalla forma. Per piccoli quantitativi, diviene importante invece il secondo termine. Consideriamo ad esempio una goccia di liquido (sia esso mercurio) appoggiata a un piano orizzontale. La forma sferica è quella che minimizza il secondo termine; benché la goccia tenda ad essere schiacciata dal peso, tale schiacciamento resta modesto perché al diminuire di z_G aumenta S, e il compromesso che minimizza U_T si raggiunge senza discostarsi molto dalla forma sferica perché nel caso del mercurio il termine τS è dominante, nella [IX.20], rispetto al termine $\rho V g z_G$. Qualora il liquido abbia forma di membrana (bolle di sapone) il primo termine può addirittura essere del tutto trascurato, e la configurazione di equilibrio è quella che minimizza la superficie.

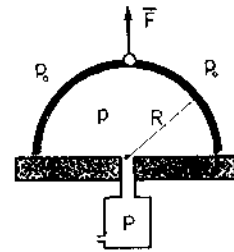
Esempio

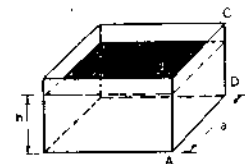
E.IX.16. *Una membrana di acqua saponata è tesa entro una cornicetta C. Sospeso nella membrana, vi è un filo di cotone f chiuso su sé stesso a formare una linea chiusa. Forando la porzione di membrana interna al filo, la si rompe; che configurazione assume il filo stesso?*

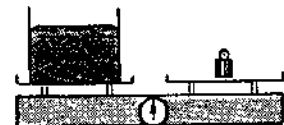
Per minimizzare la superficie della membrana è necessario che sia massima la superficie del buco in essa formato, cioè che sia massima l'area di superficie compresa internamente al filo. Poiché, a parità di perimetro, la figura di area massima è il cerchio, il filo assume forma circolare.

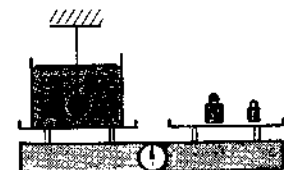
Esercizi del capitolo IX

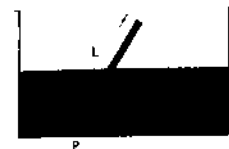
IX.1. Una semisfera metallica cava di raggio $R = 30$ cm è appoggiata lungo la sua linea equatoriale su un piano rigido orizzontale. Tramite un foro sul piano ed una pompa P è possibile ridurre al valore $p = p_o/3$ la pressione all'interno della sfera, essendo $p_o = 1$ atm la pressione esterna. Quale forza F verticale occorre applicare alla semisfera per staccarla dal piano?

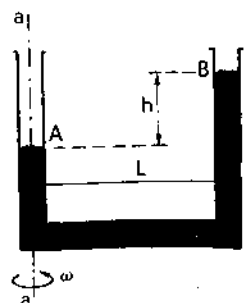
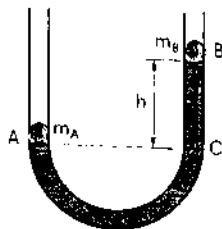
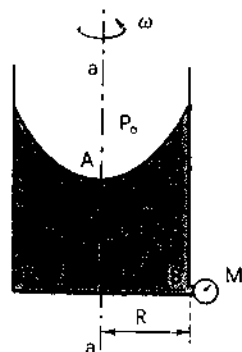
(Risposta: $1{,}9 \cdot 10^4$ N)

IX.2. Un recipiente aperto, a forma di parallelepipedo contiene acqua per un'altezza h. Calcolare la forza esercitata sulla parete $ABCD$, la cui larghezza è a.

(Risposta: $\frac{1}{2}\,\rho\, g\, a\, h^2$)

IX.3. Una bilancia, che ha su un piatto un recipiente aperto contenente del liquido di densità $\rho_L = 0{,}9$ g/cm^3, si mette in equilibrio ponendo sull'altro piatto un contrappeso di massa opportuna. In questa situazione viene immerso nel liquido un corpo più denso del liquido e di volume $V = 30$ cm^3, appeso all'estremità di un filo, la cui estremità opposta è ancorata ad un supporto fisso in modo che il corpo non tocchi il recipiente. Di quanto occorre variare il contrappeso perché si ristabilisca l'equilibrio?

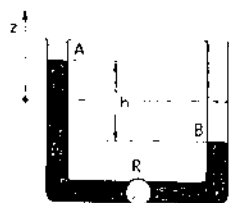
(Risposta: $+\,2{,}7 \cdot 10^{-2}$ kg)

IX.4. Un corpo si trova in equilibrio nella zona di separazione tra due liquidi non miscibili, di densità ρ_1 e ρ_2 rispettivamente ($\rho_1 < \rho_2$), con una frazione f_2 del suo volume totale immersa nel liquido 2. Qual'è la densità ρ del corpo?

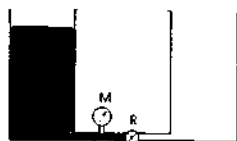
(Risposta: $\rho = \rho_1 + f_2\,(\rho_2 - \rho_1)$)

IX.5. Un pallone sferico, indeformabile, impermeabile e di massa trascurabile, galleggia in un lago. Sapendo che la densità dell'acqua è $\rho = 1$ g/cm^3 e che il raggio del pallone è $R = 15$ cm, calcolare il lavoro meccanico che occorre fare per immergerlo completamente nell'acqua. (Risposta: $L = 20{,}8$ J)

IX.6. Una sbarra rigida, omogenea, a sezione uniforme, di lunghezza L, ha un estremo P vincolato a ruotare senza attrito intorno ad un punto fisso solidale con il fondo di un recipiente contenente acqua fino ad un'altezza $h = L/2$. Se, all'equilibrio, l'angolo che la sbarra forma con l'orizzontale è $\alpha = 55°$, quanto vale la densità della sbarra? (Risposta: $\rho_s = 373$ kg/m^3)

IX.7. In un ascensore, inizialmente fermo, è posto un recipiente contenente acqua ($\rho_A = 1$ g/cm^3), in cui è completamente immersa una sfera di legno di densità $\rho_L = 0{,}4$ g/cm^3 e raggio $R = 5$ cm, trattenuta da un filo ancorato al fondo del recipiente.
a) Quanto vale la tensione τ del filo?
b) Se l'ascensore si mette a scendere con accelerazione verticale $a = 3{,}27$ m/s^2, che valore τ' assume la tensione del filo?

(Risposte: $\tau = 3{,}08$ N; $\tau' \simeq 2$ N)

IX.8. Un tubo ad U, sagomato con un tratto orizzontale e due tratti verticali, ha le estremità aperte e contiene un liquido omogeneo. La distanza tra i rami verticali è $L = 30$ cm ed il diametro del tubo è molto più piccolo di L. Il tubo ruota con velocità angolare $\omega = 10$ rad/s intorno ad un asse aa centrato su uno dei rami verticali del tubo. Qual è il dislivello h tra le superfici libere del liquido in equilibrio nei rami verticali? (Risposta: $h = 0{,}46$ m)

IX.9. Un tubo ad *U* aperto alle estremità e disposto verticalmente, contiene olio (ρ = 0,9 g/cm^3). Le superfici dell'olio nelle sezioni *A* e *B* sostengono due sferette a tenuta di massa m_A ed m_B rispettivamente. Il contatto tra le sferette ed il tubo non presenta attrito apprezzabile. Se, all'equilibrio, il dislivello tra le sezioni *A* e *B* è h = 10 cm, ed il raggio del tubo è R = 20 cm, qual'è la differenza di massa $\Delta m = m_A - m_B$? (Risposta: Δm = 0,13 kg)

IX.10. Un recipiente cilindrico, di raggio R = 30 cm, contiene olio (densità ρ = 0,9 g/cm^3) e, ruotando con velocità angolare ω = 12 rad/s intorno all'asse verticale *aa*, trascina l'olio in modo che questo sia in quiete rispetto al recipiente. Il manometro *M*, posto sul fondo del recipiente, come mostrato in figura, misura una pressione p_B = 1,1 atm, mentre $p_o = p_A$ = 1,0 atm. Calcolare l'altezza h_A dell'olio sull'asse del cilindro. (Risposta: 0,48 m)

IX.11. In un tubo orizzontale, la cui sezione è S_1 e che presenta una strozzatura di sezione $S_2 < S_1$, scorre in modo stazionario un liquido perfetto di densità ρ. La differenza di pressione tra le due sezioni è Δp. Qual'è l'espressione della massa di liquido che passa in una sezione del tubo nell'unità di tempo?

$$\left(\text{Risposta: } S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\,\rho\,\Delta p}{S_1^2 - S_2^2}}\right)$$

IX.12. Un tubo ad *U* a sezione costante, aperto alle estremità verso l'atmosfera, contiene liquido omogeneo per un tratto di lunghezza complessiva *l*. Nella situazione iniziale un rubinetto di arresto *R* mantiene il liquido in una configurazione asimmetrica in cui il dislivello tra le superfici libere *A* e *B* vale *h*. Ad un certo istante il rubinetto *R* viene aperto ed il liquido comincia ad oscillare. Nell'ipotesi che il liquido sia perfetto calcolare il periodo di oscillazione e la massima velocità del liquido rispetto al tubo.

(Risposte: $T = 2\,\pi\sqrt{l/2\,g}$; $v_{MAX} = \sqrt{g\,h^2/2\,l}$)

IX.13. Un tubo ad *U* è costituito da due rami verticali uguali, di larga sezione di area *S*, aperti verso l'atmosfera, collegati da un sottile tubo di raccordo lungo il quale è sistemato un rubinetto d'arresto *R* ed un manometro *M*. Inizialmente il rubinetto è chiuso ed uno dei rami contiene un liquido reale ed omogeneo, di densità ρ, per una altezza *h*, mentre l'altro ramo è vuoto. Ad un certo istante il rubinetto viene aperto e, dopo una fase di oscillazioni smorzate, il liquido raggiunge la situazione di equilibrio occupando i due rami del tubo. Qual'è il lavoro complessivo delle forze di attrito? Di quanto varia la lettura di pressione del manometro, passando dallo stato iniziale a quello finale?

$$\left(\text{Risposte: } L_A = -\frac{\rho g S h^2}{4};\ \Delta p = \rho\, g\frac{h}{2}\right)$$

IX.14. Un recipiente cilindrico di sezione *A* è riempito di un liquido perfetto per un'altezza *h*. Alla base del cilindro è praticato un foro di area $a = \frac{3}{10}A$, dal quale il liquido fuoriesce. Nell'ipotesi che l'area geometrica *a* del foro coincida con l'apertura effettiva, calcolare la velocità di efflusso del liquido e determinare l'errore percentuale che si commette considerando praticamente ferma la superficie libera del liquido nel recipiente.

$$\left(\text{Risposte: } v_a = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)}};\ \frac{\Delta v}{v} \simeq 5\%\right)$$

IX.15. In un condotto orizzontale a sezione costante ed aperto ad un estremo, alle cui estremità è mantenuta una certa differenza di pressione, viene fatto fluire un liquido di riferimento a coefficiente di viscosità noto η_R. All'estremo aperto si misura una fuoriuscita di liquido di 3 l in 200 s. Successivamente, nello stesso tubo e con la stessa differenza di pressione agli estremi, viene fatto fluire un liquido a coefficiente di viscosità η incognito. Si misura una fuoriuscita di liquido di 0,5 l in 400 s. Qual'è il rapporto η/η_R?

(Risposta: 12)

IX.16. Una sferetta di raggio R e massa m viene lasciata cadere da ferma in un liquido di coefficiente di viscosità η e densità ρ. Ricavare l'equazione del moto.

$$\left(\text{Risposta: } v(t) = \frac{C}{6\,\pi\,\eta\,R}\,(1 - e^{-\alpha t}) \right.$$
$$\left. \text{con } C = mg - \frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\rho\,g \text{ ed } \alpha = \frac{6\,\pi\,\eta\,R}{m}\right)$$

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo IX

IX.1. Trascurare le forze di volume (gravità). Le forze di superficie sono normali alla superficie semisferica; di queste forze occorre considerare la componente verticale.

IX.2. Valutare la forza sulla parete come risultante delle forze di superficie su rettangoli elementari di parete a quota costante (isobari).

IX.3. Applicare il principio di Archimede ed il principio di azione e reazione.

IX.4. Applicare le considerazioni dell'Esempio E.IX.7.

IX.5. Conviene riferirsi alla variazione di energia potenziale dell'acqua in corrispondenza alla immersione del pallone. Tenere conto che, a causa della vastità del lago, la sua quota praticamente non cambia.

IX.6. All'equilibrio è nullo il momento risultante della forza peso e della spinta di Archimede, rispetto al punto P.

IX.7. L'ascensore fermo è un sistema di riferimento inerziale e le forze di volume sono reali. L'ascensore in discesa è un sistema non inerziale e le forze di volume includono contributi di forze apparenti; anche la spinta di Archimede risente di forze apparenti.

IX.8. Procedere analogamente all'esempio E.IX.9.

IX.9. All'interno del liquido, in equilibrio nel campo della gravità, superfici alla stessa quota sono isobare.

IX.10. Riferirsi all'esempio E.IX.9.

IX.11. La quantità richiesta è $\rho\,Q$, dove $Q = vS$ è la portata del condotto. Procedere come nell'esempio E.IX.12.

IX.12. Prendere come livello di riferimento ($z = 0$) quello intermedio tra A e B nella situazione iniziale, oppure, equivalentemente, il livello di equilibrio per liquido in quiete a rubinetto aperto. Applicare il secondo principio della dinamica all'intera massa di liquido, quando la situazione è dissimmetrica, con la superficie A a quota generica ($+ z$) e la superficie B a quota ($- z$).

IX.13. Si può applicare il teorema dell'energia cinetica a questo caso particolare in cui $\Delta K = 0$. Trascurare il volume del sottile tubo di raccordo. Tenere conto della legge di Stevino.

IX.14. Applicare il teorema di Bernoulli e l'equazione di continuità con e senza l'approssimazione $v_A << v_a$ usata nell'esempio E.IX.10.

IX.15. Usare l'equazione di Poiseuille [IX.15] per la portata dei due liquidi.

IX.16. Ricordare la formula di Stokes [IX.16] e scrivere la seconda legge della dinamica come nell'esempio E.IX.15 (nell'ipotesi, da verificare, che il moto sia laminare).

Capitolo decimo

Onde in mezzi elastici

In questo capitolo ci occuperemo di una vasta categoria di fenomeni caratterizzati dal fatto che una perturbazione, esercitata su una qualche grandezza fisica in una regione limitata di spazio, si propaga nello spazio circostante con modalità che dipendono di norma dal tipo di perturbazione e dalle caratteristiche del mezzo che riempie lo spazio. Per esempio, è esperienza comune osservare come un sasso lanciato in uno specchio d'acqua inizialmente in quiete produca nell'acqua una *perturbazione ondosa* che si manifesta con l'apparire di una serie di anelli concentrici di liquido perturbato, che si allontanano regolarmente dal punto dove è caduto il sasso.

Perturbazione ondosa

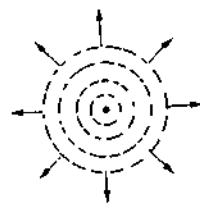
In questo caso, la grandezza fisica che viene perturbata è la localizzazione delle particelle di liquido intorno alla loro posizione di equilibrio. Per convincersene basta porre sulla superficie del liquido delle particelle (ad esempio segatura) che ci consentano di individuarne il movimento: si osserverà come l'arrivo dell'onda produca nelle particelle di liquido via via interessate al fenomeno un moto oscillatorio su orbita chiusa centrata intorno a una posizione fissa; passata l'onda le particelle tornano in quiete nella stessa posizione di equilibrio che occupavano prima dell'arrivo dell'onda stessa. Si osserva in sostanza che ciò che *si propaga* non è materia, ma solo *il movimento di materia* prodotto dalla caduta del sasso. Nel caso in esame potremo considerare l'onda come *propagazione di uno stato di moto* nella materia. Osserviamo che la propagazione dell'onda (cioè della perturbazione nello stato di moto del liquido) comporta trasferimento di energia: sia di energia cinetica, perché le particelle via via interessate dall'onda acquistano una certa velocità; sia di energia potenziale perché le stesse particelle cambiano di quota nel campo della gravità.

Propagazione dell'onda

Gli anelli che si osservano rappresentano *luoghi geometrici* di punti dotati ad ogni istante della stessa velocità; o, più sinteticamente, *di punti che si muovono in fase*. Tali luoghi geometrici si dicono *fronti d'onda*.

Fronti d'onda

Nell'esempio in esame, è fronte d'onda una circonferenza centrata nel punto di impatto del sasso, e costituita da punti che si trovano ad avere in sincronismo un certo stato di moto (ad esempio quello proprio della cresta dell'onda).

Velocità di propagazione

Si osserva sperimentalmente che la distanza relativa fra due fronti d'onda resta invariata con l'evolversi della perturbazione: i vari fronti d'onda si allontanano dal centro tutti con la stessa *velocità di propagazione*.

Onde sferiche e onde piane

Nel caso di propagazione nello spazio (ad esempio nel caso di onde sonore), se il mezzo è isotropo e non ci sono ostacoli i fronti d'onda sono sferici; si dice allora che si ha a che fare con *onde sferiche*. Spesso la porzione di fronte d'onda che ci interessa è assimilabile a un piano: ciò accade soprattutto quando ci troviamo lontani dal punto dove l'onda è stata generata. Si dice allora che si ha a che fare con un'*onda piana*. Noi limiteremo qui la nostra attenzione sostanzialmente a onde piane.

Onde elastiche

Come abbiamo già detto, le modalità con cui il fenomeno ondoso evolve dipendono dalle proprietà fisiche del mezzo, e in particolare dalla natura delle forze di richiamo delle particelle di fluido perturbato verso la loro posizione di equilibrio. Il caso più semplice si ha quando tale forza di richiamo può essere schematizzata come una forza elastica. In questo capitolo noi ci limiteremo per l'appunto a studiare *onde elastiche*, cioè perturbazioni meccaniche in mezzi elastici. In realtà, la forza elastica di richiamo è sempre accompagnata da una forza dissipativa; noi supporremo che i relativi effetti siano trascurabili. Quando questi non sono più trascurabili, le onde divengono *onde smorzate*. Se gli effetti dissipativi divengono dominanti, i fenomeni di propagazione ondosa non si manifestano più: è quanto accade ad esempio se un sasso viene lanciato in uno stagno di fango anziché d'acqua; si manifesta solo un disturbo localizzato nello spazio e nel tempo, passato il quale si ripristina la situazione di quiete iniziale.

Onde smorzate

Propagazione del suono

Le onde elastiche, benché costituiscano una schematizzazione, sono tuttavia adeguate a descrivere con sufficiente approssimazione molti fenomeni di notevole interesse: in particolare, la *propagazione del suono* in un fluido, e in particolare nell'aria; e le onde meccaniche in una corda tesa o in un solido.

Onde elettromagnetiche

Fenomeni di propagazione ondosa si manifestano anche in altri campi della fisica. Di importanza fondamentale sono le *onde elettromagnetiche* (luce, raggi X, onde radio, ecc.) che per le particolari proprietà del campo elettromagnetico possono propagarsi anche in assenza di un mezzo di supporto, cioè nel vuoto. Di queste ci occuperemo in un altro volume.

X.1. Forma matematica delle onde elastiche

Onde longitudinali

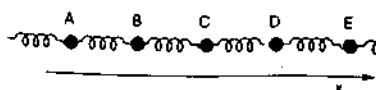
Un mezzo elastico consente la propagazione di due tipi fondamentali di onde: *onde longitudinali* e *onde trasversali*.

Un'onda si dice *longitudinale* se il moto delle particelle del mezzo si sviluppa parallelamente alla direzione di propagazione.

Il mezzo di sostegno di un'onda longitudinale monodimensionale può essere schematizzato come una sequenza rettilinea di particelle materiali A, B, C, ..., legate l'una alle adiacenti da un'interazione di tipo elastico, e vincolate a muoversi lungo l'asse x.

Quando una particella viene spostata lungo l'asse x rispetto alla sua posizione di equilibrio e poi rilasciata, il suo stato di moto oscillatorio si propaga lungo l'asse x e coinvolge le masse via via adiacenti, che si mettono ad oscillare a loro volta intorno alle rispettive posizioni di equilibrio.

Per esempio, si propaga per onde longitudinali una perturbazione impulsiva impressa con una martellata a un estremo di una sbarra lunga (è messo in gioco in questo caso il modulo di Young E); oppure il suono nell'aria

Onde trasversali

Un'onda si dice invece *trasversale* se il moto delle particelle del mezzo si sviluppa in direzione perpendicolare alla direzione di propagazione.

Il mezzo di sostegno di un'onda trasversale può essere schematizzato come una sequenza di oscillatori armonici vincolati a muoversi ad esempio lungo l'asse y, e collegati fra di loro da molle. Lo spostamento verticale di uno degli oscillatori e il successivo rilascio provoca la trasmissione del suo stato di moto oscillatorio agli oscillatori accoppiati adiacenti. La propagazione avviene nella direzione dell'asse x, mentre il moto delle particelle avviene lungo l'asse y. Un tipico esempio di onda trasversale si sviluppa nella corda vibrante. Le onde trasversali in un mezzo elastico mettono in gioco il modulo di torsione G; o nel caso di una corda, la tensione τ che tende la corda stessa.

Le onde superficiali in un liquido sono un esempio di un caso misto: le particelle di liquido compiono traiettorie chiuse, di forma praticamente circolare, e lo spostamento è una sovrapposizione di una componente longitudinale e di una trasversale.

Indichiamo con α la grandezza fisica la cui perturbazione si propaga lungo l'asse x in un mezzo elastico. Quindi α potrà indicare, di caso in caso, la quota y nel caso della corda vibrante; la pressione locale del gas in cui si propaga il suono; oppure lo spostamento lungo l'asse x, rispetto alla posizione di equilibrio, nel caso in cui si propaghi un'onda longitudinale.

Consideriamo, per esempio, un'onda impulsiva trasversale impressa ad una estremità di una corda tesa lungo l'asse x, mediante un singolo e rapido movimento alto-basso (*effetto frusta*). Il sistema carrucola-peso P garantisce una tensione costante alla corda.

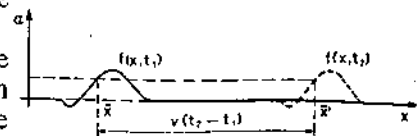
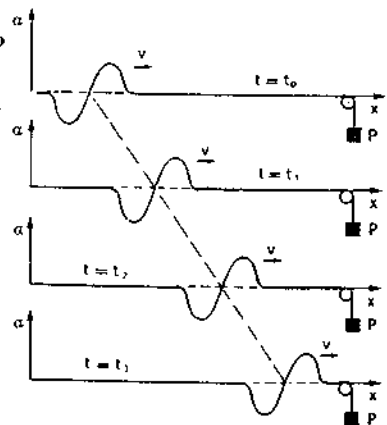
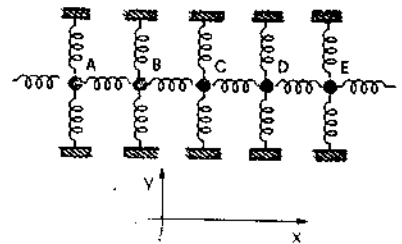
Se si trascura l'attenuazione della perturbazione durante la propagazione (forze non dissipative), a vari istanti successivi equidistanti (t_0; $t_1 = t_0 + \Delta t$; $t_2 = t_0 + 2\,\Delta t$; $t_3 = t_0 + 3\,\Delta t$; ecc.) la configurazione della corda è quella rappresentata in figura (si immaginino forografie istantanee scattate alla corda agli istanti successivi t_0, t_1, t_2, ...). La perturbazione procede con forma invariata nel verso positivo dell'asse delle x con velocità v.

Ad ogni istante t, la grandezza α che rappresenta la forma della corda è una funzione della variabile x; e tale forma cambia al cambiare di t. Sarà dunque:

$$\alpha = f(x, t) \qquad [X.1]$$

In base a considerazioni di carattere generale, si stabilisce che la funzione [X.1] deve essere del tipo $f(x - vt)$ per onde progressive e $f(x + vt)$ per onde regressive, dove v è la velocità di propagazione (in modulo), e il verso di riferimento per la progressività o regressività è quello positivo dell'asse delle x.

Consideriamo infatti una generica perturbazione progressiva; all'istante t_1 la corda appaia così come mostrato in figura (tratto continuo). In assenza di dissipazione (cioè ipotizzando che la forma della perturbazione non cambi durante la propagazione) all'istante $t_2 > t_1$ la configurazione della corda sarà quella riportata in tratteggio. È come dire che tutta la figura trasla con velocità v nel verso positivo dell'asse delle x; nell'intervallo di tempo $t_1 - t_2$ essa è traslata di un tratto $v(t_2 - t_1)$. In termini matematici, ciò è descritto dalla funzione:

$$\alpha(x, t) = f(x - vt) \qquad [X.2]$$

Onda progressiva

Infatti, supponiamo che l'argomento a della funzione [X.2] abbia un certo valore $\bar{a}$ ottenuto specificando $x = \bar{x}$ all'istante $t = t_1$

$$\bar{a} = \bar{x} - \mathrm{v}\, t_1$$

All'istante $t = t_2$ lo stesso valore $\bar{a}$ per l'argomento lo si ottiene in una posizione $\bar{x}'$ tale che:

$$\bar{x}' - \mathrm{v}\, t_2 = \bar{x} - \mathrm{v}\, t_1 \qquad [X.3]$$

Affinché valga la [X.3] deve essere $\bar{x}' - \bar{x} = \mathrm{v}\, t_2 - \mathrm{v}\, t_1 = \mathrm{v}(t_2 - t_1)$, cioè:

$$\frac{\bar{x}' - \bar{x}}{t_2 - t_1} = \mathrm{v} \qquad [X.4]$$

La posizione x corrispondente a un assegnato valore dell'argomento della [X.2] si sposta con velocità pari a v. La [X.2] rappresenta dunque una perturbazione che procede con velocità v e forma invariata nel verso positivo dell'asse delle x. Analogamente, la

Onda regressiva

$$\alpha(x, t) = f(x + \mathrm{v}\, t) \qquad [X.5]$$

rappresenta un'onda regressiva.

Una proprietà generale di una funzione del tipo $f(x \pm \mathrm{v}\, t)$ è quella di soddisfare la seguente equazione differenziale del secondo ordine alle derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad [X.6]$$

Equazione delle onde

Questa equazione differenziale si dice *equazione delle onde* (nel caso di propagazione monodimensionale). Per verificare che la [X.2], ad esempio, soddisfa la [X.6], effettuiamone le derivate seconde rispetto a x e a t, ricordando le proprietà di derivazione delle funzioni di funzione e indicando con un apice la derivazione della funzione rispetto all'intero argomento:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = f' \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x - \mathrm{v}\, t) = f'(x - \mathrm{v}\, t)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} f'(x - \mathrm{v}\, t) = f'' \frac{\partial}{\partial x}(x - \mathrm{v}\, t) = f''(x - \mathrm{v}\, t)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = f' \cdot \frac{\partial}{\partial t}(x - \mathrm{v}\, t) = (-\mathrm{v}) \cdot f'(x - \mathrm{v}\, t)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}[(-\mathrm{v}) \cdot f'(x - \mathrm{v}\, t)] = (-\mathrm{v}) \cdot f'' \cdot \frac{\partial}{\partial t}(x - \mathrm{v}\, t) =$$

$$= \mathrm{v}^2 f''(x - \mathrm{v}\, t)\,.$$

Confrontando la seconda con la quarta di queste relazioni, vediamo che la [X.2] verifica in effetti la [X.6]; allo stesso risultato si perviene anche per l'onda regressiva.

Tutte le volte che, studiando la dinamica di un sistema perturbato, si perviene a una equazione del tipo:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} = C\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} \quad \text{con } C \text{ costante} \tag{X.7}$$

la soluzione sarà dunque rappresentata da un'onda $\alpha = \alpha(x \mp \mathrm{v}\,t)$ che si muove lungo l'asse x con velocità tale che $\mathrm{v}^2 = 1/C$.

X.2. Onde sinusoidali

È di particolare interesse il caso in cui la funzione $\alpha(x, t)$ che rappresenta la perturbazione ondosa sia di tipo sinusoidale (o, equivalentemente, cosinusoidale):

$$\alpha(x, t) = A \cdot \sin\left[\frac{2\,\pi}{\lambda}(x \mp \mathrm{v}\,t)\right] \tag{X.8}$$

Ampiezza delle onde

La costante A rappresenta l'*ampiezza* dell'onda. Il fatto che A sia indipendente da x e da t indica l'assenza di dissipazione (l'onda non si attenua mentre si propaga). La presenza del fattore $(x \mp \mathrm{v}\,t)$ nell'argomento della [X.9] garantisce che essa rappresenta un'onda che si propaga lungo l'asse x con velocità $\pm$ v.

Esempio

E.X.1. *Verificare che la funzione*

$$\alpha(x, t) = A \sin\left[\frac{2\,\pi}{\lambda}(x \mp \mathrm{v}\,t)\right]$$

soddisfa l'equazione delle onde [X.6] (ovvero [X.7]).

Si ha:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = A\frac{2\,\pi}{\lambda}\cos\left[\frac{2\,\pi}{\lambda}(x \mp \mathrm{v}\,t)\right]$$

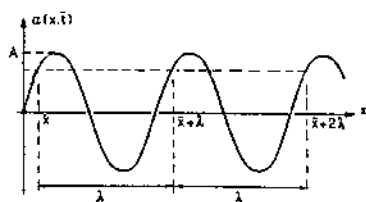
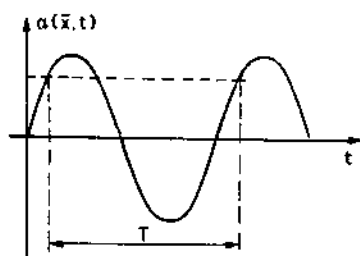
$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} = -A\left(\frac{2\,\pi}{\lambda}\right)^2\sin\left[\frac{2\,\pi}{\lambda}(x \mp \mathrm{v}\,t)\right]$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = A\cdot\frac{2\,\pi}{\lambda}\cdot(\mp\,\mathrm{v})\cdot\cos\left[\frac{2\,\pi}{\lambda}(x \mp \mathrm{v}\,t)\right]$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = -A\left(\frac{2\,\pi}{\lambda}\right)^2\cdot\mathrm{v}^2\cdot\sin\left[\frac{2\,\pi}{\lambda}(x \mp \mathrm{v}\,t)\right]$$

Dividendo per v^2 l'ultima di queste relazioni, si ha

$$\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = -A\left(\frac{2\,\pi}{\lambda}\right)^2\sin\left[\frac{2\,\pi}{\lambda}(x \mp \mathrm{v}\,t)\right] = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}$$

proprio l'equazione delle onde.

Il fattore $\frac{2\pi}{\lambda}$ nell'argomento della [X.8], con λ avente le dimensioni di una lunghezza, rende adimensionale l'argomento stesso. Esso garantisce inoltre che per ogni assegnato valore del tempo ($t = \bar{t}$) la perturbazione $\alpha(x, t)$ e le sue derivate assumono lo stesso valore in posizioni la cui coordinata spaziale x differisca per multipli interi di λ ($x = \bar{x}$; $x = \bar{x} + \lambda$; ... $x = \bar{x} + n\lambda$; ...). Infatti in posizioni diverse per multipli di λ l'argomento delle funzioni trigonometriche viene modificato per multipli interi di 2π:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\bar{x} + n\lambda \mp \mathrm{v}\bar{t}) = \frac{2\pi}{\lambda}(\bar{x} \mp \mathrm{v}\bar{t}) + n \cdot 2\pi$$

Lunghezza d'onda

La costante λ è detta *lunghezza d'onda*. Essa rappresenta, in sostanza, il *periodo spaziale* della perturbazione ondosa.

Periodo dell'onda

Un'onda sinusoidale ammette anche un *periodo temporale* $T = \frac{\lambda}{\mathrm{v}}$. Si verifica infatti facilmente che in ogni posizione $\bar{x}$ l'argomento delle funzioni trigonometriche differisce per multipli interi di 2π a istanti di tempo t diversi per multipli interi di $T = \frac{\lambda}{\mathrm{v}}$; infatti:

$$\frac{2\pi}{\lambda}[\bar{x} \mp \mathrm{v}(\bar{t} + nT)] = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\bar{x} \mp \mathrm{v}\left(\bar{t} + \frac{n\lambda}{\mathrm{v}}\right)\right] = \frac{2\pi}{\lambda}(\bar{x} \mp \mathrm{v}\bar{t}) + n \cdot 2\pi$$

Fra il periodo temporale T e la lunghezza d'onda λ sussiste dunque la relazione

$$\lambda = \mathrm{v}T \qquad [X.9]$$

Se ci si fissa in una certa posizione $x = \bar{x}$ la [X.8] si può scrivere come

$$\alpha(\bar{x}, t) = A \sin(\omega t + \varphi) \qquad [X.10]$$

con

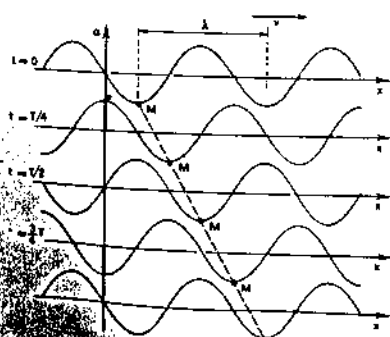
Pulsazione ω

$$\omega = \frac{2\pi\mathrm{v}}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\bar{x} + j\pi \quad (j = 0,1 \text{ a seconda che } x \mp \mathrm{v}t)$$

In un punto fisso $\bar{x}$ la perturbazione è di tipo armonico con pulsazione $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

A titolo illustrativo, nella figura è riportato l'andamento spaziale della perturbazione sinusoidale a vari istanti successivi $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3}{4}T, T$. Il punto pieno inizialmente nell'origine O oscilla di moto armonico in accordo con la [X.10] (ponendo in essa $\varphi = \pi$ in corrispondenza di $\bar{x} = 0$ e j ... onda progressiva). Il cerchietto M, che rappresenta un massimo della forma d'onda, si muove con velocità v: infatti si sposta di un tratto λ nel tempo T.

È superfluo rimarcare il fatto che la forma d'onda trasla con velocità v lungo x, mentre il mezzo elastico ha velocità mediamente nulla.

Un'onda sinusoidale $\alpha(x, t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x \mp vt)\right]$ può essere scritta anche in altre forme sostanzialmente equivalenti; ad esempio:

$$\alpha(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t + \varphi) \qquad [X.11]$$

Numero d'onda

Fase

dove la costante $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ è detto *numero d'onda*; ω è la *pulsazione* già definita $\left(\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}\right)$; e φ è una costante additiva, detta *fase*, dipendente dalle condizioni iniziali (nella [X,8] era $\varphi = 0$) ovvero:

$$\alpha(x, t) = A \sin\left\{\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}\right)\right] + \varphi\right\} \qquad [X.12]$$

Esempio

E.X.2. *Uno strumento musicale emette un suono di frequenza $v = 524$ Hz (armonica della nota do). Sapendo che la velocità di propagazione del suono nell'aria è $v \simeq 340$ m/s, quale è la lunghezza d'onda del suono emesso?*

La frequenza è definita come il numero di oscillazioni compiute nell'unità di tempo; essa si misura in Hertz (Hz) equivalenti a s^{-1}. La frequenza è legata al periodo e alla pulsazione dalle relazioni $v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Per il suono considerato, si ha dunque $T = \frac{1}{v} = \frac{1}{524\ s^{-1}} = 1{,}91 \cdot 10^{-3}$ s.

La lunghezza d'onda vale pertanto:

$$\lambda = vT = \left(340\ \frac{m}{s}\right) \cdot (1{,}91 \cdot 10^{-3}\ s) \simeq 0{,}65\ m$$

Armonica

È da osservare che un'onda sinusoidale come la [X.8] (detta anche *armonica*) rappresenta una schematizzazione estrema: oltre che avere forma rigorosamente sinusoidale, una armonica dovrebbe svilupparsi per un tempo infinito $(-\infty < t < +\infty)$ e occupare tutto l'asse delle x $(-\infty < x < +\infty)$.

Treno d'onda

Principio di sovrapposizione

Una porzione limitata di onda armonica si dice *treno d'onda sinusoidale*. L'onda armonica, a parte la sua capacità di descrivere con buona approssimazione fenomeni sinusoidali caratterizzati da treni d'onda abbastanza lunghi (temporalmente e spazialmente) rispetto al periodo T ed alla lunghezza d'onda λ, riveste importanza notevole in virtù del *principio di sovrapposizione* e del *teorema di Fourier*.

Il principio di sovrapposizione stabilisce quanto segue:

Se in un mezzo elastico si inviano simultaneamente uno o più perturbazioni ondose $\alpha_1(x, t)$, $\alpha_2(x, t)$, ... il risultato è una perturbazione ondosa descritta dalla funzione

$$\alpha(x, t) = \alpha_1(x, t) + \alpha_2(x, t) + \ldots$$

Ciò vale a condizione che le singole perturbazioni componenti siano sufficientemente piccole perché la perturbazione risultante non porti il mezzo a lavorare oltre il limite di elasticità.

Il principio di sovrapposizione discende dalla linearità della equazione delle onde [X.6], nella quale il coefficiente v rappresenta una caratteristica del mezzo (ed è dunque indipendente dalle modalità della perturbazione).

Infatti per ipotesi, essendo α_1 ed α_2 due perturbazioni ondose che si propagano nel mezzo, esse soddisfano l'equazione [X.6]

$$\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}$$

Sommando membro a membro si ha:

$$\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\right)$$

ovvero:

$$\frac{\partial^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\partial t^2}$$

relazione che dimostra che la funzione $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ soddisfa l'equazione delle onde caratteristica del mezzo considerato. Ovviamente, come si vedrà nel seguito, le modalità con cui si svolge il fenomeno ondoso risultante (cioè le proprietà della funzione $\alpha(x, t)$) dipendono dalle caratteristiche (ampiezza, pulsazione, fase, direzione di oscillazione) delle varie onde componenti.

Teorema di Fourier

Il *teorema di Fourier* si enuncia come segue:

Un'onda periodica di periodo T e lunghezza d'onda λ

$\left(\textit{e dunque di pulsazione } \omega = \frac{2\pi}{T} \textit{ e numero d'onda } k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$

e di forma per altro qualunque, sia essa $\alpha(kx \mp \omega t)$, sotto opportune ipotesi può essere espressa nella seguente forma (serie di Fourier):

$$\begin{aligned}\alpha(kx \mp \omega t) = {} & A_o + A_1 \cos(kx \mp \omega t) + B_1 \sin(kx \mp \omega t) + \\ & + A_2 \cos[2(kx \mp \omega t)] + B_2 \sin[2(kx \mp \omega t)] + \\ & + A_3 \cos[3(kx \mp \omega t)] + B_3 \sin[3(kx \mp \omega t)] + \ldots\end{aligned} \qquad \text{[X.13]}$$

I coefficienti A_o, A_1, A_2 ... B_1, B_2, ... sono calcolabili a partire dalla conoscenza della funzione periodica $\alpha(kx \mp \omega t)$; di solito il loro valore decresce al crescere del numero d'ordine del termine dello sviluppo. Lo sviluppo di Fourier [X.13] viene anche detto *analisi armonica* della funzione periodica $\alpha(x, t)$.

Analisi armonica

Qualche dettaglio sul calcolo di una serie di Fourier è presentato nel seguente esempio E.X.3.

Esempio

E.X.3. *Esplicitare i primi coefficienti dello sviluppo di Fourier dell'onda quadra di periodo 2π rappresentata in figura.*

Osserviamo che, data una qualunque funzione periodica $g(x)$ di periodo λ, essa può essere facilmente trasformata in una funzione $g(z)$ di periodo 2π; basta effettuare la sostituzione

$$x = z \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \quad \left(\text{ovvero } z = x \cdot \frac{2\pi}{\lambda}\right).$$

In virtù della [X.13], lo sviluppo di Fourier della $g(z)$ può essere scritto sinteticamente come:

$$g(z) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [A_j \cos jz + B_j \sin jz] \qquad [X.14]$$

Integrando la [X.14] fra 0 e 2π, e tenuto conto che

$$\int_0^{2\pi} \cos jz \, dz = \int_0^{2\pi} \sin jz \, dz = 0$$

(per ogni $j \neq 0$), si ha

$$\int_0^{2\pi} g(z) \, dz = A_0 \, 2\pi ;$$

da cui:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z) \, dz \qquad [X.15]$$

(valor medio della funzione $g(z)$ nell'intervallo di un periodo).

Per trovare i coefficienti A_j ($j \neq 0$), moltiplichiamo la [X.14] per $\cos nz$ ($n \neq 0$) e integriamo fra 0 e 2π. Tenuto conto che:

$$\int_0^{2\pi} \sin jz \cos nz \, dz = 0 \quad \text{(per ogni valore intero di } j \text{ e } n\text{)}$$

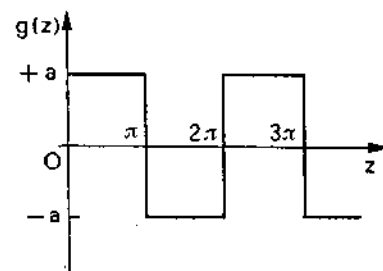
$$\int_0^{2\pi} \cos jz \cos nz \, dz = 0 \quad \text{(per } j \neq n \text{ interi)}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos jz \cos nz \, dz = \pi \quad \text{(per } j = n \text{ interi)}$$

si ottiene

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(z) \cos nz \, dz \qquad [X.16]$$

Analogamente, moltiplicando la [X.14] per $\sin nz$ e integrando fra 0 e 2π, si ottiene

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(z) \sin nz \, dz \qquad [X.17]$$

Mettendo insieme la [X.15], la [X.16] e la [X.17] si ha in definitiva:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z)\,dz$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(z)\cos nz\,dz \quad (n \neq 0) \qquad [X.18]$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(z)\sin nz\,dz \quad (n \neq 0)$$

Calcoliamo ora esplicitamente le [X.18] nel caso particolare che la $g(z)$ rappresenti l'onda quadra mostrata in figura:

$$\begin{cases} g(z) = +a & 0 \leq z < \pi \\ g(z) = -a & \pi \leq z < 2\pi \end{cases}$$

Si ha:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z)\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} a\,dz + \int_0^{2\pi}(-a)\,dz = 0 \quad \text{(valor medio nullo)}$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a\cos z\,dz + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-a)\cos z\,dz = \frac{a}{\pi}\{[\sin z]_0^{\pi} - [\sin z]_{\pi}^{2\pi}\} = 0$$

Analogamente $A_2 = A_3 = ... = 0$; tutti i coefficienti dei coseni sono nulli.

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(z)\sin z\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a\sin z\,dz + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-a)\sin z\,dz =$$

$$= \frac{a}{\pi}\{[-\cos z]_0^{\pi} - [-\cos z]_{\pi}^{2\pi}\} = \frac{4a}{\pi}$$

$$B_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a\sin(2z)\,dz + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-a)\sin(2z)\,dz =$$

$$= \frac{a}{\pi}\left\{\frac{1}{2}[-\cos(2z)]_0^{\pi} - \frac{1}{2}[-\cos(2z)]_{\pi}^{2\pi}\right\} = 0$$

Analogamente, si trova che gli altri coefficienti dispari valgono:

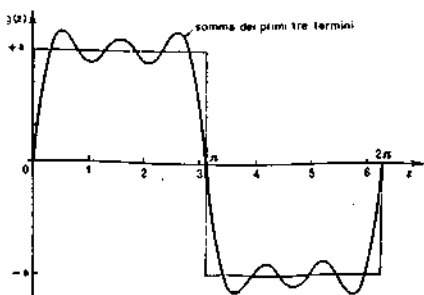
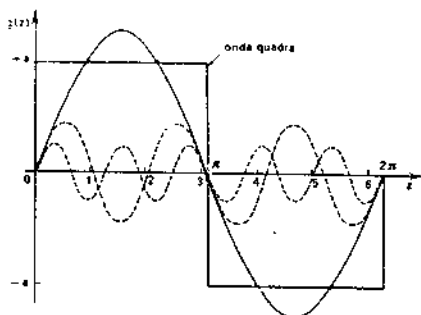
$$B_3 = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi};\; B_5 = \frac{4}{5}\frac{a}{\pi};\; ...\; B_n = \frac{4}{n}\frac{a}{\pi}...$$

mentre tutti i coefficienti pari sono nulli: $B_2 = B_4 = B_6 = ... = 0$.

Lo sviluppo di Fourier dell'onda quadra di ampiezza a e periodo 2π assume dunque la forma:

$$g(z) = \frac{4a}{\pi}\left[\sin z + \frac{1}{3}\sin(3z) + \frac{1}{5}\sin(5z) + ...\right]$$

Nella prima figura sono riportati separatamente i valori dei primi tre termini dello sviluppo (curve I, II, III rispettivamente); si vede che i relativi contributi decrescono al crescere dell'ordine del termine dello sviluppo.

Nella seconda figura è stata eseguita la somma dei primi tre termini dello sviluppo. Come si vede, già con tre soli termini si raggiunge un discreto livello di approssimazione della funzione data.

X.3. Onde elastiche longitudinali

Consideriamo una sbarra di materiale elastico omogeneo, di sezione costante S. Le dimensioni longitudinali della sbarra (lungo cui si sceglie l'asse delle x) siano molto maggiori delle dimensioni trasversali.

Supponiamo che nella sbarra si propaghi una perturbazione longitudinale $\alpha(x, t)$. Un elemento della sbarra, di lunghezza imperturbata dx, a causa della dislocazione $\alpha(x, t)$ rispetto alla sua posizione di equilibrio, viene richiamata verso la posizione di equilibrio stessa dalle forze dF di reazione elastica su di esso agenti.

Per tale elemento, potremo scrivere il secondo principio della dinamica (proiettato sull'asse x) nella forma

$$dF = dm\, a = \rho \cdot S\, dx \cdot a = \rho\, S\, dx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \qquad [X.19]$$

dm è la massa dell'elemento; a è la sua accelerazione $\left(a = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\right)$; ρ è la densità del materiale.

La forza di richiamo $F(x)$ che agisce sulla sezione della sbarra di coordinata x può essere scritta, in virtù della legge di Hooke (eq. V.31), come $F(x) = -E \cdot S \frac{dh}{h}$; nel nostro caso:

$$F(x) = -E \cdot S \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} \qquad [X.20]$$

Infatti $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ rappresenta l'allungamento per unità di lunghezza $\frac{dh}{h}$ che la sbarra subisce. La forza dF subita dall'elemento compreso fra x e $x + dx$ è data dalla differenza fra la forza agente sulla sezione $x + dx$ e la forza agente sulla sezione x:

$$dF = F(x) - F(x + dx) = -\frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx$$

e tenendo conto della [X.20]:

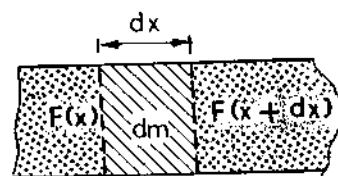
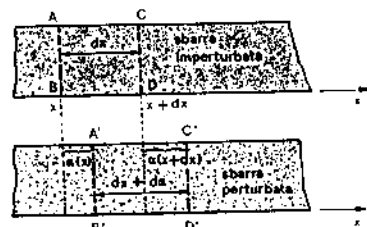
$$dF = -\frac{\partial F}{\partial x}\, dx = E \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\, dx$$

Sostituendo al primo membro della [X.19]:

$$E \cdot S \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\, dx = \rho\, S\, dx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

da cui in definitiva:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \qquad [X.21]$$

È questa una equazione delle onde, caratterizzata dalla velocità di propagazione:

Velocità di propagazione dell'onda longitudinale

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad [X.22]$$

Notiamo che tale velocità dipende dalle caratteristiche del mezzo, ma non dalla particolare perturbazione $\alpha(x, t)$.

Risolvendo la [X.21] con le opportune condizioni iniziali, si può determinare la forma esplicita della perturbazione

$$\alpha(x, t) = \alpha(x \mp vt)$$

La conoscenza della funzione $\alpha(x, t)$ permette poi, quando ciò interessi, di ricavare tramite la [X.20] l'andamento spazio-temporale del campo di forze presenti lungo la sbarra; ovvero del campo di pressione

$$P(x, t) = \frac{|F(x, t)|}{S} = E \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} \qquad [X.23]$$

Esempio

E.X.4. *Calcolare la velocità di propagazione delle onde longitudinali elastiche in una sbarra di alluminio* ($E \simeq 7 \cdot 10^{10}\ \mathrm{N/m^2}$; $\rho = 2{,}7\ \mathrm{g/cm^3}$).

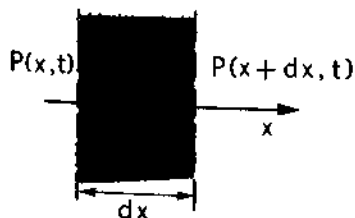
Usando la [X.22] si ha:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{7 \cdot 10^{10} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} \cdot \frac{1\ \mathrm{m^3}}{2{,}7 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}}} =$$

$$= \sqrt{2{,}95 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}} = 5{,}1 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 5{,}1 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Poniamo ora la nostra attenzione sulla propagazione di onde longitudinali in un materiale elastico omogeneo che occupi uniformemente lo spazio. In questo caso la legge della elasticità è espressa in termini più convenienti nella forma:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{K} dP \qquad [X.24]$$

dove $\frac{dV}{V}$ è la variazione di volume per unità di volume che il mezzo localmente subisce; dP è la variazione di pressione; e $1/K$ è il *coefficiente di compressibilità volumica* del materiale considerato. La [X.24] è del tutto analoga alla [V.31]: in effetti, anche nel caso di una sbarra omogenea la legge di Hooke può essere scritta nella forma [X.24]. Dividendo infatti per la sezione S ambo i membri della relazione $dF = -ES\frac{dh}{h}$ si ottiene $\frac{dF}{S} = -E\frac{S\,dh}{Sh}$ che ha la stessa forma della [X.24] (essendo $\frac{dF}{S} = dP$; $S\,dh = dV$; $S \cdot h = V$; $E = K$).

Mediante considerazioni e sviluppi del tutto identici a quelli utilizzati nel caso della sbarra, anche nel caso della propagazione di onde longitudinali in un mezzo isotropo e uniforme si perviene alla stessa equazione [X.21], con il coefficiente di compressibilità K al posto del modulo di Young E. La velocità di propagazione risulta pertanto:

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \qquad [X.25]$$

Onde longitudinali elastiche in un gas

Riveste grande interesse il caso in cui il mezzo omogeneo e isotropo sia rappresentato da un gas (e in particolare dall'aria).

Quando in un gas, inizialmente in quiete, un oggetto è posto in vibrazione (corda di violino; corda vocale; diapason; membrana; ecc.) nello spazio immediatamente adiacente all'oggetto vibrante si generano variazioni periodiche locali dP di pressione del gas. Queste variazioni di pressione provocano delle variazioni locali della densità (o, equivalentemente, variazioni percentuali $\frac{dV}{V}$ di volume). La relazione fra le variazioni dP di pressione e le variazioni percentuali $\frac{dV}{V}$ di volume è, come vedremo fra un attimo, del tipo [X.24]. Anche in questo caso, dunque, la perturbazione obbedirà all'equazione delle onde; e nel gas si propaga per conseguenza un'onda longitudinale (*suono*) con velocità data dalla [X.25].

Non ci resta dunque che mostrare che un gas obbedisce in effetti alla [X.24]; la relazione che troveremo fra il coefficiente di compressibilità K e le caratteristiche fisiche del gas ci consentirà inoltre di calcolare tramite la [X.25] la velocità del suono in quel gas.

Vedremo in termodinamica che un gas (perfetto) sottoposto a trasformazioni nelle quali siano trascurabili gli scambi di calore con l'esterno (trasformazioni adiabatiche) soddisfa la seguente equazione

$$P \cdot V^{\gamma} = \text{costante} \qquad [X.26]$$

dove P è la pressione del gas e V il suo volume. Il coefficiente costante adimensionale γ dipende dal tipo di gas: per un gas monoatomico che si comporti come un gas perfetto è $\gamma = \frac{5}{3}$; per un gas biatomico $\gamma = \frac{7}{5}$. Differenziando la [X.26] si ha:

$$P \cdot \gamma \cdot V^{\gamma-1} \cdot dV + V^{\gamma}\, dP = 0$$

ovvero

$$P \cdot \gamma \cdot dV + V \cdot dP = 0$$

da cui

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\gamma P}\, dP. \qquad [X.27]$$

Come si vede, il gas obbedisce in effetti alla [X.24]; il suo coefficiente di compressibilità volumica K vale $K = \gamma P$, cioè è dato dal prodotto fra il coef-

Velocità del suono in un gas

ficiente γ e la pressione P del gas. La velocità di propagazione del suono in un gas vale dunque

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad [X.28]$$

Può essere conveniente esprimere la velocità del suono [X.28] anziché in termini della pressione P e della densità ρ del gas, in termini della sua temperatura T e del suo peso molecolare M. A tal fine si usa la *equazione di stato* dei gas perfetti che lega fra di loro, come vedremo meglio in termodinamica, la pressione P, il volume V e la temperatura assoluta T di un gas perfetto:

$$\frac{m}{M} RT = P \cdot V \quad \text{ovvero} \quad \frac{RT}{M} = \frac{P}{\rho} \qquad [X.29]$$

dove:

P : pressione

$\rho = \frac{m}{V}$: densità

T : temperatura assoluta
[T (gradi Kelvin K) = t (gradi centigradi °C) + 273,16]

M : peso molecolare del gas

R : costante universale dei gas
$\left(R = 82{,}057 \cdot 10^{-3} \frac{\text{litri} \cdot \text{atm}}{\text{mole} \cdot \text{K}} = 8{,}314 \frac{\text{Joule}}{\text{mole} \cdot \text{K}}\right)$

Sostituendo la [X.29] nella [X.28] questa diviene:

$$v = \sqrt{\gamma \cdot \frac{R \cdot T}{M}} \qquad [X.30]$$

Anche nel gas, la perturbazione della pressione (onda di pressione) associata all'onda di spostamento $\alpha(x, t)$ può essere calcolata ricorrendo a una espressione analoga alla [X.23]; precisamente:

$$\Delta P = -K \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\gamma P \frac{\partial \alpha}{\partial x} \qquad [X.31]$$

dove ΔP rappresenta la variazione di pressione dovuta alla perturbazione e P la pressione in assenza di perturbazione; ovvero:

$$\frac{\Delta P}{P} = -\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x} \qquad [X.32]$$

Esempi

E.X.5. *Calcolare la velocità di propagazione di un'onda sonora in aria e in idrogeno alla pressione di 1 atm e temperatura di 0°C*

Il calcolo può essere effettuato usando la [X.28]. Le proprietà fisiche di aria e idrogeno rilevanti ai fini del calcolo sono:

Gas	Tipo	γ	ρ (kg/m^3)
aria	biatomico	1,4	1,29
H_2	biatomico	1,4	$8{,}93 \cdot 10^{-2}$

Sostituendo nella [X.28] si ha:

$$v_{aria} = 331{,}6 \ \text{m/s}$$
$$v_{H_2} = 1260 \ \text{m/s}$$

E.X.6. *In una colonna di gas di densità ρ si propaga un'onda sonora di tipo sinusoidale di pulsazione ω. La sua velocità di propagazione è v. Se in un punto della colonna un ricevitore acustico misura un'onda di pressione di ampiezza ΔP_o, qual'è l'ampiezza dello spostamento longitudinale associato all'onda?*

L'onda di spostamento ha la forma:

$$\alpha(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

L'onda di pressione corrispondente è, usando la [X.31]:

$$\Delta P = -\gamma P \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\gamma P A k \cos(kx - \omega t)$$

L'ampiezza dell'onda di pressione è dunque:

$$\Delta P_o = \gamma P A k$$

Poiché $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$, si ha $\gamma P = \rho v^2$.

Inoltre:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}.$$

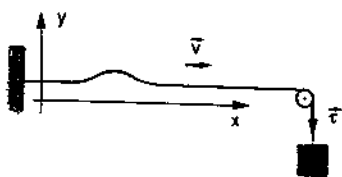
Dunque:

$$\Delta P_o = \gamma P A k = \rho v^2 A \frac{\omega}{v} = \rho v A \omega$$

da cui

$$A = \frac{\Delta P_o}{\rho v \omega}$$

X.4. Onde trasversali elastiche

In un'onda trasversale elastica il moto delle particelle del mezzo si sviluppa in direzione ortogonale (sia essa y) rispetto alla direzione di propagazione.

Osservando ad esempio le onde trasversali elastiche in una corda tesa, si riscontra che la loro velocità di propagazione aumenta all'aumentare della tensione del filo. Ciò è comprensibile se si pensa che proprio la tensione è responsabile delle forze elastiche che richiamano gli elementi della corda verso la posizione di equilibrio, e quindi gioca un ruolo analogo a quello del modulo di Young E o del coefficiente di compressibilità volumica K nel caso delle onde longitudinali.

Deriviamo ora l'equazione dinamica di una corda tesa; vedremo che questa assume la forma di una equazione delle onde, e l'espressione che in tale equazione assume il coefficiente di $\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}$ in funzione dei parametri caratteristici del problema ci consentirà di porre questa analogia in termini rigorosi.

Consideriamo una corda sottile e omogenea, e scegliamo l'asse x parallelo alla configurazione rettilinea che la corda assume a riposo in virtù della tensione $\vec{\tau}$ ad essa applicata (si trascura l'effetto della forza peso). Sia $\mu = \frac{dm}{dl}$ la densità lineare della corda.

Prendiamo in esame la dinamica del tratto di corda compreso fra x e $x + dx$ la cui massa è $dm = \mu dx$ e che, all'istante t, è dislocata di una quantità $y = \alpha(x, t)$ perpendicolarmente all'asse x.

Per definizione di tensione del filo, gli effetti dinamici esercitati sul tratto dx da parte del rimanente della corda possono essere schematizzati tramite le due forze $\vec{\tau}(x)$ e $\vec{\tau}(x + dx)$ applicate agli estremi A e B del tratto considerato.

A causa della curvatura del tratto AB le due tensioni, pur uguali in modulo, non si fanno equilibrio perché non sono allineate. La legge $\vec{f} = m\vec{a}$ proiettata perpendicolarmete all'asse x diventa:

$$\tau \sin(\theta + d\theta) - \tau(\sin\theta) = dm\,a = \mu\,dx\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}$$

In pratica, l'angolo θ è sempre molto piccolo; per cui si potrà scrivere:

$$\tau(\theta + d\theta) - \tau\theta = \tau\,d\theta = \mu\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\,dx \qquad [X.32]$$

D'altra parte l'angolo θ non è altro che la pendenza della curva $\alpha(x, t)$ (a t costante) riportata in un diagramma cartesiano di ascissa x; cioè:

$$\theta \simeq \operatorname{tg}\theta = \frac{\partial\alpha}{\partial x}$$

e differenziando rispetto a x

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}\,dx = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\,dx$$

Sostituendo nella [X.32] si ottiene infine:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} = \left(\frac{\mu}{\tau}\right)\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} \qquad [X.33]$$

che rappresenta per l'appunto l'equazione delle onde, con una velocità di propagazione

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \qquad [X.34]$$

Velocità di propagazione dell'onda trasversale

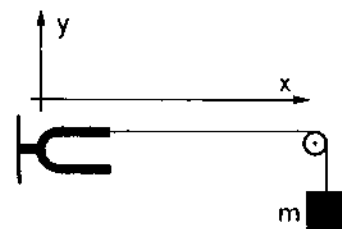
Ancora una volta vale la pena di osservare che per piccoli segnali (cui si è limitata la nostra trattazione) la velocità di propagazione dipende dalle caratteristiche del mezzo e non dalla forma dell'onda che si propaga.

Esempi

E.X.7. *Un filo collegato ad uno dei rebbi di un diapason è mantenuto teso da un peso di massa $m = 0,4$ kg attraverso una carrucola priva di attrito. Il filo ha densità lineare $\mu = 10$ g/m. Se il diapason vibra di moto armonico alla frequenza $\nu = 5\ s^{-1}$, calcolare la velocità di propagazione e la lunghezza d'onda della perturbazione. Considerare solo la presenza di onde progressive.*

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \qquad \tau = mg = 0,4\ \text{kg} \cdot 9,8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3,92\ \text{N}$$

$$v = \sqrt{\frac{3,92\ \text{N m}}{10 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}} = 19,8\ \text{m/s}$$

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = \left(19,8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot \left(\frac{1}{5\ \text{s}^{-1}}\right) = 3,96\ \text{m}\,.$$

E.X.8. *Se l'ampiezza di oscillazione del diapason dell'esempio precedente è $A = 1$ cm, quale è la forma esplicita dell'onda trasversale che si propaga nel filo?*

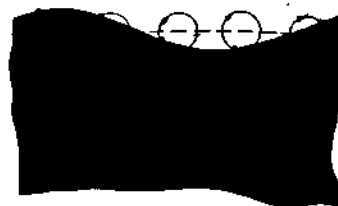
L'espressione dell'onda trasversale sinusoidale è

$$\alpha(x, t) = y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

con

$$\begin{cases} A = 1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m} \\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{3,96\ \text{m}} = 1,6\ \text{m}^{-1} \\ \omega = 2\pi\nu = 2\pi\,(5\ \text{s}^{-1}) = 31,4\ \text{s}^{-1} \end{cases}$$

Accenniamo finalmente alla propagazione di onde di superficie in un liquido. Abbiamo già affermato che le particelle di liquido prossime alla superficie si muovono su orbite chiuse; la perturbazione ha dunque componente sia trasversale che longitudinale rispetto al moto. Nella figura è riportata a tratteggio la superficie imperturbata del liquido: le circonferenze rappresentano le traiettorie di singole particelle. I centri di queste traiettorie sono fissi nel tempo e disposti sulla superficie imperturbata. Quando la profondità del liquido è molto grande rispetto alla lunghezza d'onda e all'ampiezza della perturbazione che si propaga nello strato superficiale, e qualora siano trascurabili gli effetti dissipativi, si trova che la velocità di propagazione vale

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \qquad [X.35]$$

È interessante osservare che la velocità di propagazione *non* dipende in questo caso dalle caratteristiche del mezzo; essa dipende però dalla lunghezza d'onda (fenomeno della *dispersione*).

Esempio

E.X.9. *In mare, a una distanza di 5 km dalla costa, esplode una mina.*
a) Dopo quanto tempo si vede da riva la colonna d'acqua che si forma per l'esplosione?
b) Dopo quanto tempo percepisce il fenomeno un pesce vicino alla costa?
c) Dopo quanto tempo viene udita l'esplosione a riva?
d) Se nell'acqua si formano onde superficiali di lunghezza d'onda $\lambda = 3$ m, dopo quanto tempo arrivano le prime di queste onde?

(Velocità di propagazione: luce in aria: 300.000 km/s
suono in acqua: 1500 m/s
suono in aria: 340 m/s)

a) luce in aria:

$$\Delta t = \frac{5 \text{ km}}{3 \cdot 10^5 \text{ km/s}} = 1{,}67 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 16{,}7 \ \mu\text{s} \ (1 \ \mu\text{s} = 10^{-6} \text{ s}) .$$

Il segnale luminoso arriva dunque in tempi brevissimi (decine di microsecondi).

b) Suono in acqua:

$$\Delta t = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ m}}{1{,}5 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = 3{,}3 \text{ s} .$$

Il pesce percepisce l'esplosione dopo poco più di tre secondi.

c) Suono in aria:

$$\Delta t = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ m}}{3{,}4 \cdot 10^2 \text{ m/s}} = 14{,}7 \text{ s} .$$

L'orecchio dell'uomo a riva percepisce l'esplosione quasi 15 s dopo che l'occhio ha visto, e più di 11 s dopo che il pesce si è allarmato.

d) Onda liquida superficiale in mare aperto: la velocità di un'onda con $\lambda = 3$ m vale

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\left(9{,}8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (3 \text{ m}) \cdot \frac{1}{2\pi}} = 2{,}2 \text{ m/s}$$

Pertanto

$$\Delta t = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ m}}{2{,}2 \text{ m/s}} = 2{,}3 \cdot 10^3 \text{ s} = 38 \text{ minuti.}$$

L'onda liquida generata dall'esplosione arriva con più di mezz'ora di ritardo.

X.5. Aspetti energetici della propagazione ondosa

Quando in un mezzo elastico inizialmente in quiete si produce un'onda, il mezzo comincia a muoversi in un campo di forze, acquistando così energia cinetica e potenziale; si è già accennato che per tal motivo la

propagazione di un'onda è accompagnata da un trasferimento di energia fra parti diverse del mezzo.

Diamo ora l'espressione esplicita del contenuto energetico dell'onda elastica, partendo dall'ipotesi che ogni elemento del mezzo possa essere considerato come un oscillatore armonico vincolato ad oscillare intorno a una posizione fissa. La legge del moto di ogni elemento è pertanto:

$$\alpha(x, t) = A \sin(kx - \omega t) .$$

Ricordiamo (vedi Es. E.V.7) che l'energia di un oscillatore armonico di massa m che oscilli con pulsazione ω e ampiezza A si mantiene costante nel tempo, e può essere scritta nella forma

$$E = \frac{1}{2} K A^2$$

ovvero (tenuto conto che $\omega^2 = \frac{K}{m}$, e dunque $K = m\omega^2$):

Energia di un oscillatore armonico

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \qquad [X.36]$$

Consideriamo, per fissare le idee, una sbarra molto lunga di materiale elastico. Se un estremo della sbarra viene sollecitato da una sorgente oscillante, nella sbarra si propaga un'onda. Via via che l'onda si propaga, una nuova porzione della sbarra, precedentemente ferma, comincia a muoversi ed acquista dunque energia. Questa energia viene rifornita dalla sorgente, e per arrivare fino al fronte del treno d'onda fluisce anche attraverso ogni sezione della sbarra già interessata dall'onda.

In generale, data un'onda piana che si muova nella direzione dell'asse x, ci proponiamo di calcolare l'*energia meccanica che fluisce nell'unità di tempo attraverso una sezione di area unitaria disposta perpendicolarmente alla direzione di propagazione*. Tale grandezza

$$I = \frac{dE}{dS\, dt} \qquad [X.37]$$

viene detta *intensità dell'onda* e si misura nel sistema SI in watt/m².

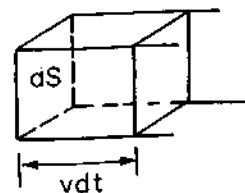
Intensità di un'onda

È evidente che la quantità di energia dE che fluisce nel tempo dt attraverso una sezione elementare di area dS ortogonale alla velocità $\vec{v}$, è pari all'energia contenuta in un volumetto di base dS e di altezza $v\,dt$; e può dunque essere scritta come

$$dE = w \cdot dS \cdot v\, dt$$

dove con w abbiamo indicato l'energia per unità di volume posseduta dal mezzo elastico interessato dall'onda. Abbiamo dunque:

$$I = \frac{dE}{dS\, dt} = w \cdot v \qquad [X.38]$$

D'altra parte il calcolo dell'energia per unità di volume w può essere effettuato facilmente tramite la [X.36]. L'energia dE posseduta dalla massa dm

del mezzo elastico (sia dV il volume della massa dm) è infatti semplicemente, secondo la [X.36]:

$$dE = \frac{1}{2} dm\, \omega^2 A^2$$

e dunque

$$w = \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \frac{dm}{dV} \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 .$$

dove ρ è la densità del mezzo. Sostituendo nella [X.38] abbiamo infine

$$I = w \cdot v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \qquad [X.39]$$

L'intensità dell'onda è proporzionale al quadrato della sua ampiezza e al quadrato della sua pulsazione

Fissato il mezzo (cioè fissati ρ e v) l'*intensità di un'onda è proporzionale al quadrato della sua ampiezza A e al quadrato della sua pulsazione* ω (o della sua frequenza ν).

L'intensità serve, in particolare, per caratterizzare suoni e rumori in rapporto alle sensazioni uditive. Per esempio la *soglia di udibilità*, cioè la minima intensità che viene percepita da un orecchio umano normale, dipende dalla frequenza e vale:

Soglia di udibilità di un suono

$$I_{soglia} = 3 \cdot 10^{-12} \text{ watt/m}^2 \quad \text{a } \nu = 1000 \text{ Hz}$$
$$I_{soglia} = 7 \cdot 10^{-12} \text{ watt/m}^2 \quad \text{a } \nu = 400 \text{ Hz}$$

Specialmente in acustica, si trova comodo misurare l'intensità in *decibel* (db). A tal fine si introduce una *intensità di riferimento* $I_o = 10^{-12}$ watt/m²; l'intensità in decibel è quindi definita dalla relazione

Decibel

$$I_{(db)} = 10 \log_{10} (I/I_o) \qquad [X.40]$$

Espresse in decibel, le due soglie di udibilità sopra citate valgono:

$$I_{soglia}(\text{db}) = 10 \log_{10}(3) = 4{,}77 \text{ db} \quad \text{a } 1000 \text{ Hz}$$
$$I_{soglia}(\text{db}) = 10 \log_{10}(7) = 8{,}45 \text{ db} \quad \text{a } 400 \text{ Hz}$$

Soglia della sensazione dolorosa

Il sistema nervoso umano reagisce con *sensazione di dolore* a un eccesso di intensità sonora. Valori tipici della soglia dolorosa si aggirano intorno a 120 db.

Esempi di intensità sonore tipiche

Soglia di udibilità	5 ÷ 10 db
Conversazione a voce normale (distanza 1 m)	50 db
Traffico intenso (distanza qualche metro)	80 db
Aereo al decollo (distanza decina di m)	> 120 db

Esempio

E.X.10. *Qual'è l'ampiezza ΔP_0 dell'onda di pressione che subisce un timpano quando arriva, in aria, un suono di intensità pari alla soglia della sensazione dolorosa?*

Usando la [X.31] (vedi anche l'esempio E.X.6) si ha:

$$\Delta P_0 = \rho \, v \, \omega A$$

D'altra parte la [X.39] ci consente di esprimere il prodotto ωA in funzione dell'intensità I

$$\omega A = \sqrt{\frac{2I}{\rho v}}$$

che inserita nella espressione precedente fornisce

$$\Delta P_0 = \rho v \sqrt{\frac{2I}{\rho v}} = \sqrt{2 I \rho v} \qquad [X.41]$$

relazione che esprime l'ampiezza ΔP_0 dell'onda di pressione in funzione della intensità I del suono e delle proprietà ρ e v del mezzo.

L'intensità I_d corrispondente alla soglia di dolore può essere calcolata dalla relazione

$$120 = 10 \log_{10} \frac{I_d}{I_0}$$

da cui:

$$\log_{10} \frac{I_d}{I_0} = 12$$

$$\frac{I_d}{I_0} = 10^{12}$$

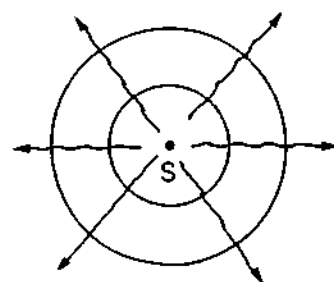
$$I_d = I_0 \cdot 10^{12} = (10^{-12}\ \text{watt/m}^2) \cdot 10^{12} = 1\ \text{watt/m}^2$$

Inserendo questo valore di I_d al posto di I nella [X.41] abbiamo infine:

$$\Delta P_0 = \sqrt{2 \cdot \left(1 \frac{W}{m^2}\right) \cdot \left(1{,}29 \frac{kg}{m^3}\right) \cdot \left(340 \frac{m}{s}\right)} \simeq \sqrt{877 \frac{N^2}{m^4}} \simeq 29{,}6 \frac{N}{m^2}.$$

Osservazione. Consideriamo una sorgente puntiforme S di onde sferiche. La potenza W della sorgente sia costante: ciò vuol dire che nell'unità di tempo viene inviata nello spazio una quantità costante di energia pari a W.

Consideriamo ora due sfere C_1 e C_2 centrate in S, di raggi rispettivi r_1 ed r_2. In assenza di effetti dissipativi nel mezzo, sia la superficie sferica C_1 che la superficie sferica C_2 saranno attraversate a regime, nell'unità di tempo, da una quantità di energia W. D'altra parte per definizione di intensità tali quantità di energia possono essere scritte rispettivamente come prodotto fra le intensità che l'onda ha a distanza r_1 ed r_2 da S e le superfici $4\pi r_1^2$ e $4\pi r_2^2$ di C_1 e di C_2. Dunque:

$$W = 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

Da cui

$$I_1 = \frac{W}{4\pi r_1^2} \qquad I_2 = \frac{W}{4\pi r_1^2}$$

Decremento con la distanza della intensità di un'onda sferica

L'intensità di un'onda sferica, in assenza di effetti dissipativi, decresce in misura inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente.

Poiché l'intensità è proporzionale all'ampiezza al quadrato A (vedi eq. [X.39]) questa stessa legge si esprime, in termini di ampiezza, nella forma: l'*ampiezza di un'onda sferica, in assenza di effetti dissipativi, decresce in misura inversamente proporzionale alla distanza dalla sorgente.*

onda sferica
senza dissipazione

$$A \propto \frac{1}{r} \qquad [X.42]$$

X.6. Fenomeni di interferenza

Onde coerenti

Supponiamo che in una certa regione dello spazio si propaghino, nella stessa direzione, due onde elastiche sinusoidali di pari lunghezza d'onda (e dunque anche di pari pulsazione), sfasate l'una rispetto all'altra di una quantità costante δ (*onde coerenti*). Per semplicità, supponiamo che le due onde abbiano anche la stessa ampiezza (condizione, quest'ultima, non necessaria affinché il fenomeno si verifichi):

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, t) &= A \sin (kx - \omega t) \\ \alpha_2(x, t) &= A \sin (kx - \omega t - \delta) \end{aligned} \qquad [X.43]$$

Si osserva che *il fenomeno ondoso risultante* dalla sovrapposizione di queste due onde *ha intensità non uniforme nello spazio*, nonostante le intensità (fra di loro uguali) delle due onde siano uniformi: $I_1 = I_2 = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \rho v$. Ciò implica in particolare che *il fenomeno ondoso risultante* $\alpha(x, t)$ (che per il principio di sovrapposizione può essere scritto come $\alpha(x, t) = \alpha_1(x, t) + \alpha_2(x, t)$, cioè come somma delle due onde) *ha intensità che non è* semplicemente *pari alla somma delle intensità delle onde componenti.*

Interferenza

Questo fenomeno, cui si dà il nome di *interferenza*, può essere facilmente giustificato dal punto di vista matematico.

Sommando le [X.43], calcoliamo l'onda risultante:

$$\alpha(x, t) = A \sin (kx - \omega t) + A \sin (kx - \omega t - \delta) \qquad [X.44]$$

Da questa espressione della [X.44] non risulta immediatamente evidente che il fenomeno risultante sia un fenomeno ondoso. Infatti la $\alpha(x, t)$ non appare come funzione di un *unico* argomento del tipo $kx - \omega t + \varphi$; condizione, quest'ultima, necessaria e sufficiente affinché la funzione in oggetto rappresenti un'onda. Tuttavia basta una semplice elaborazione matematica per mostrare che la [X.44] rappresenta in effetti un'onda. Tenendo infatti conto di una della relazione di prostaferesi – identità trigonometrica secondo la quale

$$\sin a + \sin b = 2 \cos \left(\frac{a - b}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{a + b}{2}\right)$$

la [X.44] può essere scritta nella forma

$$\alpha(x, t) = \left(2A\cos\frac{\delta}{2}\right)\cdot \sin\left(kx - \omega t - \frac{\delta}{2}\right) \qquad [X.45]$$

La forma della [X.45], e più in particolare il fatto che in essa la dipendenza spazio-temporale sia condensata nell'unico argomento $(kx - \omega t - \delta/2)$, mostra ora chiaramente la natura ondulatoria della $\alpha(x, t)$. Più precisamente, si tratta di un'onda caratterizzata dalla stessa lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ e dalla stessa pulsazione ω rispetto alle onde componenti. Tuttavia l'ampiezza $\left|2A\cos\frac{\delta}{2}\right|$ dell'onda risultante *non* è pari alla somma $2A$ delle ampiezze delle due onde; oltre che dalle ampiezze delle onde componenti, l'ampiezza dell'onda risultante dipende anche dal loro sfasamento δ tramite il fattore $\cos\frac{\delta}{2}$. L'ampiezza dell'onda risultante va da un massimo pari a $2A$ quando $\cos\frac{\delta}{2} = \pm 1$ (e dunque $\delta = 0, 2\pi, 4\pi, ...$) a un minimo pari a zero quando $\cos\frac{\delta}{2} = 0$ (e dunque $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, ...$).

Secondo la [X.39], l'intensità I_R dell'onda [X.45] risulta

$$I_R = \frac{1}{2}\rho\omega^2 v\left(4A^2\cos^2\frac{\delta}{2}\right) = 4I\cos^2\frac{\delta}{2} \qquad [X.45]$$

dove $I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v$ è l'intensità delle onde componenti. Vediamo dunque che nemmeno l'intensità I_R è pari alla somma $2I$ delle intensità delle onde componenti. I_R va da un valore massimo pari a $4I$ per $\cos\frac{\delta}{2} = \pm 1$ ($\delta = 0, 2\pi, 4\pi, ...$; situazione di *interferenza costruttiva*); a un valore minimo pari a zero per $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, ...$ (situazione di *interferenza distruttiva*).

Interferenza costruttiva
Interferenza distruttiva

Poiché l'intensità di un'onda rappresenta l'energia (per unità di tempo e per unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione) che l'onda trasporta, quest'ultima conclusione può apparire in contraddizione con il principio di conservazione dell'energia; in particolare, non appare immediatamente comprensibile la possibilità che sommando due onde, ciascuna di intensità I, si possa ottenere in certe condizioni $\left(\cos\frac{\delta}{2} = \pm 1\right)$, un'onda di intensità $4I$. Per comprendere, almeno qualitativamente, come ciò possa accadere, approfondiamo un poco il significato fisico dello sfasamento δ.

Consideriamo le due onde [X.43] ad un certo istante, ad esempio all'istante $t = 0$. L'espressione che esse assumono (e che ne rappresenta la configurazione spaziale all'istante $t = 0$) è:

$$\alpha_1(x, 0) = A\sin kx$$

$$\alpha_2(x, 0) = A\sin(kx - \delta) = A\sin k\left(x - \frac{\delta}{k}\right)$$

Si tratta di due sinusoidi aventi stessa ampiezza e stessa lunghezza d'onda, e traslate spazialmente, l'una rispetto all'altra, di un tratto $\frac{\delta}{k}$. Quando la traslazione relativa è nulla, o pari a un numero intero di lunghezze d'onda

$$\left(\frac{\delta}{k} = \frac{\delta\lambda}{2\pi} = n\lambda; \text{ cioè } \delta = n \cdot 2\pi\right)$$

le ampiezze si sommano e si ha interferenza costruttiva; quando la traslazione relativa è pari a un numero dispari di mezze lunghezze d'onda

$$\left(\frac{\delta}{k} = \frac{\delta\lambda}{2\pi} = (2n+1)\frac{\lambda}{2}; \text{ cioè } \delta = (2n+1)\pi\right)$$

le ampiezze si sottraggono e si ha interferenza distruttiva. Al passare del tempo, l'intera figura (data dalla somma di $\alpha_1(x, 0)$ e $\alpha_2(x, 0)$) trasla lungo l'asse x con velocità v.

Oltre che ad una *traslazione spaziale a un istante fisso*, la fase δ può essere ricollegata anche ad un *ritardo temporale in una posizione fissa*. Fissando la x nelle [X.43] (per semplicità poniamo $x = 0$) esse divengono:

$$\alpha_1(0, t) = -A \sin \omega t$$

$$\alpha_2(0, t) = -A \sin \omega \left(t + \frac{\delta}{\omega}\right)$$

Si tratta di due oscillazioni ritardate l'una rispetto all'altra di un tempo $\tau = \frac{\delta}{\omega}$. Nella pratica, le due onde saranno generate da due sorgenti coerenti situate in due posizioni diverse, S_1 e S_2. Se in una certa posizione P_1 le onde arrivano con un certo ritardo relativo δ_1/ω rappresentato dalla differenza dei tempi impiegati a percorrere i tratti S_1P_1 ed S_2P_1 rispettivamente

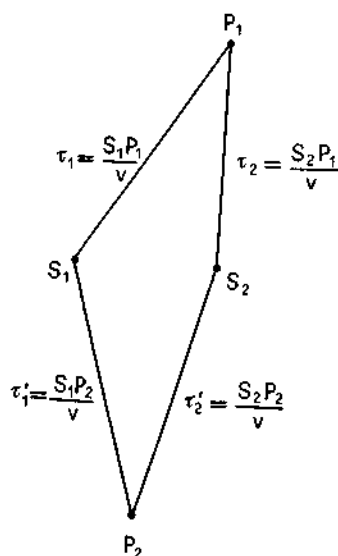
$$\left(\frac{\delta_1}{\omega} = \tau_2 - \tau_1 = \frac{S_2P_1 - S_1P_1}{v}\right)$$

in un'altra posizione P_2 esse arriveranno con un ritardo relativo diverso

$$\left(\frac{\delta_2}{\omega} = \tau'_2 - \tau'_1 = \frac{S_2P_2 - S_1P_2}{v}\right).$$

Se in qualche regione dello spazio circostante alle sorgenti si ha interferenza costruttiva, in altre regioni si ha interferenza distruttiva. Sarebbe possibile dimostrare (ma noi non lo faremo) che i due fenomeni si compensano in modo da garantire, nel suo complesso, la conservazione dell'energia; il fenomeno dell'interferenza comporta semplicemente un aumento della densità di energia in alcune regioni spaziali, e una diminuzione di tale densità in altre regioni spaziali.

Battimenti

Rientrano nella famiglia dei fenomeni interferenziali anche i *battimenti*, che si verificano quando le due sorgenti hanno numero d'onda (e pulsazione) anziché rigorosamente identiche fra di loro, diverse di una quantità percentualmente piccola; ad esempio $\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \simeq 10^{-2}$.

Siano le due onde:

$$\alpha_1(x, t) = A \sin (k_1 x - \omega_1 t)$$
$$\alpha_2(x, t) = A \sin (k_2 x - \omega_2 t)$$

L'onda risultante può essere scritta, usando ancora una volta le formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned}\alpha(x, t) &= \alpha_1(x, t) + \alpha_2(x, t) = \\ &= 2A \cos \left[\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right] \cdot \\ &\cdot \sin \left[\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right]\end{aligned} \qquad [X.46]$$

Nell'ipotesi che i numeri d'onda e le pulsazioni delle due onde differiscano poco fra di loro, possiamo porre:

$$\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega ; \quad k_1 \simeq k_2 \simeq \frac{k_1 + k_2}{2} = k$$

La [X.46] diviene:

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \left[\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right] \cdot \sin (kx - \omega t)$$

Questa espressione può essere scritta come:

$$\alpha(x, t) = B(x, t) \cdot \sin (kx - \omega t) \qquad [X.47]$$

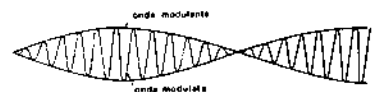
dove

$$B(x, t) = 2A \cos \left[\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right] \qquad [X.48]$$

Scrivendo la $\alpha(x, t)$ nella forma [X.47], la interpretiamo come un'onda con numero d'onda k e pulsazione ω pari alla media dei numeri d'onda e delle pulsazioni delle onde componenti, la cui ampiezza $B(x, t)$ dipende a sua volta dalla posizione x e dal tempo t. Più precisamente, la [X.48] ci dice che l'ampiezza «modulata» $B(x, t)$ è a sua volta un'onda, anche se di numero d'onda $\left(\text{pari a } \frac{k_1 - k_2}{2}\right)$ e pulsazione $\left(\text{pari a } \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)$ molto piccola: cioè in altri termini di lunghezza d'onda molto grande e di frequenza molto piccola (rispetto a quelle delle onde componenti).

Ampiezza modulata

Va notato che l'ampiezza modulata $B(x, t)$, che costituisce un inviluppo all'onda di alta frequenza, è un'onda che si muove con velocità v_B coincidente con la velocità $v_1 = v_2 = v$ delle onde componenti. Si ha infatti:

$$v_B = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

ed essendo $\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = \mathrm{v}$, possiamo sostituire nella precedente relazione $\omega_1 = k_1 \mathrm{v}$; $\omega_2 = k_2 \mathrm{v}$; ottenendo:

$$\mathrm{v}_b = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{k_1 \mathrm{v} - k_2 \mathrm{v}}{k_1 - k_2} = \mathrm{v} \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_2} = \mathrm{v}$$

X.7. Onde stazionarie

Onde stazionarie

Il fenomeno delle *onde stazionarie* nasce dalla sovrapposizione di onde componenti aventi la stessa frequenza, la stessa lunghezza d'onda e la stessa ampiezza che si propagano in *direzioni opposte*. Il modo usuale per realizzare onde stazionarie consiste nel far sovrapporre un'*onda incidente* con la sua *onda riflessa* contro qualche ostacolo o vincolo.

Per onde sinusoidali, per semplicità supposte in fase, si ha:

$$\alpha_1(x, t) = A \sin (kx - \omega t)$$
$$\alpha_2(x, t) = A \sin (kx + \omega t)$$

La perturbazione risultante sarà (usando ancora una volta la formula di prostaferesi):

$$\begin{aligned} \alpha(x, t) &= \alpha_1(x, t) + \alpha_2(x, t) = \\ &= 2A \cos (-\omega t) \cdot \sin kx = 2A \cos \omega t \sin kx . \end{aligned} \qquad [X.49]$$

Tale perturbazione non rappresenta un'onda che si propaga, dal momento che la funzione non dipende da un argomento del tipo $(x \mp \mathrm{v}t)$. Di fatto la dipendenza temporale e quella spaziale compaiono in due fattori separati di tipo sinusoidale. Ciò significa che il punto di coordinata generica x oscilla di moto armonico con pulsazione ω, e con ampiezza $2A \sin kx$ costante rispetto al tempo e dipendente dalla posizione x. È questo tipo di perturbazione che prende il nome, per l'appunto, di *onda stazionaria*.

Ci saranno dei punti sempre fermi, cioè punti che oscillano con ampiezza nulla: sono i punti in cui $\sin kx = 0$, condizione che si verifica per $kx = n\pi$ cioè per

$$x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n \cdot \pi}{(2\pi/\lambda)} = n \frac{\lambda}{2} \quad (n \text{ intero}) \qquad [X.50]$$

Nodi dell'onda stazionaria

Questi punti, detti *nodi dell'onda stazionaria*, hanno dunque coordinata pari a multipli interi di $\lambda/2$.

Ci saranno punti che oscillano sempre con ampiezza massima pari a $2A$: sono i punti in cui $\sin kx = 1$, condizione che si verifica per $kx = (2n+1)\pi/2$ cioè per

$$x = \frac{(2n+1)(\pi/2)}{(2\pi/\lambda)} = (2n+1)\frac{\lambda}{4} = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \quad (n \text{ intero}) \qquad [X.51]$$

Ventri dell'onda stazionaria

Questi punti sono detti *ventri dell'onda stazionaria*; essi sono distanti $\frac{\lambda}{2}$ l'uno dall'altro a partire dal punto di coordinata $x = \frac{\lambda}{4}$.

La pulsazione ω con cui ogni punto oscilla è la stessa; essi oscillano tutti all'unisono con la pulsazione propria delle due onde componenti, pulsazione legata dunque alla lunghezza d'onda λ dalla relazione

$$\omega = k\mathrm{v} = \frac{2\pi\mathrm{v}}{\lambda};$$

ovvero, in termini di frequenza:

$$\nu = \frac{\mathrm{v}}{\lambda} \qquad [X.52]$$

Un caso notevole di onde stazionarie si verifica in una corda vibrante bloccata agli estremi da due fermi rigidi A e B. Nei punti A e B un'onda, generata ad esempio pizzicando la corda, si riflette; e si realizzano così le condizioni richieste affiché si generi un'onda stazionaria.

Le condizioni al contorno, rappresentate dal fatto che i punti A e B devono rappresentare due nodi (trattandosi di punti bloccati, in essi l'ampiezza di oscillazione dell'onda stazionaria non può che essere nulla), impongono precisi vincoli alle lunghezze d'onda consentite per l'oscillazione. Più precisamente, deve essere

$$L = n\frac{\lambda}{2}; \quad \text{ovvero} \quad \lambda = \frac{2L}{n} \quad (n \text{ intero}) \qquad [X.53]$$

La corda può contenere solo un numero intero di mezze lunghezze d'onda.

Se $n = 1$, allora $\frac{\lambda}{2} = L$; la corda contiene una sola mezza lunghezza d'onda, e i due nodi A e B sono accompagnati da un solo ventre al centro della corda. Si dice allora che la corda vibra sulla sua *armonica fondamentale*.

Armonica fondamentale

Se $n = 2$, la corda contiene un'intera lunghezza d'onda ($\lambda = L$). Oltre ai nodi A e B si ha un nodo al centro C e due ventri (fra A e C e fra C e B rispettivamente). E così via per $n > 2$. In questi casi si dice che la corda vibra su *armoniche superiori*.

Armoniche superiori

In generale, quando una corda vibra, il modo di vibrazione dominante è rappresentato dall'armonica fondamentale, con un contributo minore di armoniche superiori (e di eventuali altri modi non multipli dovuti al fatto che l'onda non è rigorosamente stazionaria). Il mescolamento dei vari modi, così come è reso alla nostra sensazione uditiva anche dalla amplificazione della cassa armonica, costituisce il cosiddetto *timbro* di uno strumento.

Timbro di uno strumento

È bene osservare che la lunghezza d'onda di una oscillazione stazionaria è determinata da vincoli puramente geometrici (lunghezza della corda). Tuttavia la *frequenza del suono* che la corda trasmette (e dunque anche la lunghezza d'onda di questo) *è determinata dalla frequenza della oscillazione stazionaria*. Tale frequenza, secondo la [X.52] è collegata non solo a λ (e dunque alla geometria della corda) ma anche alla velocità v con cui nella corda si propagano le onde elastiche. In effetti, usando la [X.34], la [X.52] può essere scritta come:

$$\nu = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \qquad [X.54]$$

Frequenza del suono emesso da una corda

Accordatura di uno strumento

Ciò consente, mediante opportuna scelta della densità lineare μ della corda e soprattutto regolandone la tensione τ, di *accordare* uno strumento musicale. La tastiera, mediante la quale intervenendo con le dita si varia la lunghezza L del tratto di corda interessato alla oscillazione stazionaria, consente poi di variare λ entro certi limiti traendo dalla stessa corda note diverse.

Lunghezze d'onda consentite in una canna d'organo

Anche negli strumenti musicali a fiato (ad esempio in un organo) si realizzano onde stazionarie. Si tratta in questo caso di onde longitudinali di pressione, la cui trattazione matematica è del tutto simile a quella sviluppata sopra.

In una canna d'organo chiusa da una parte A e aperta dall'altra B, le condizioni al contorno impongono che si abbia un nodo in A e un ventre in B. Per conseguenza, le lunghezze d'onda consentite per le oscillazioni sono espresse dalla relazione:

$$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad \text{ovvero} \quad \lambda = \frac{4L}{(2n+1)} \quad (n \text{ intero o nullo}) \qquad [X.55]$$

La canna chiusa a un estremo *può contenere un numero dispari di quarti di lunghezza d'onda.*

X.8. Il principio di Huygens-Fresnel

La propagazione di una perturbazione ondosa in un mezzo elastico continuo avviene, in generale, nello spazio tridimensionale. L'equazione delle onde, che nel caso monodimensionale abbiamo visto avere la forma

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2},$$

assume nello spazio la forma più generale

Equazione tridimensionale delle onde

$$\nabla^2 \alpha \equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \qquad [X.56]$$

La soluzione $\alpha(x, y, z, t)$ che questa equazione ammette è diversa di caso in caso a seconda delle *condizioni al contorno* che vincolano fisicamente la propagazione del fenomeno ondoso. Ad esempio, nel caso della corda vibrante, abbiamo visto che il vincolo rappresentato dai punti A e B che bloccano la corda ai suoi estremi, impone alla soluzione dell'equazione monodimensionale delle onde di avere dei nodi in quei punti; per conseguenza la lunghezza d'onda poteva avere in quel caso solo un insieme di valori discreti. In modo analogo, dobbiamo aspettarci che la soluzione dell'equazione delle onde [X.56] sia fortemente condizionata dalla presenza di pareti assorbenti o riflettenti, da fori, passaggi fra mezzi diversi, ecc.

Fenomeni di eco
Rifrazioni

È esperienza comune osservare che un'onda che si propaga in un mezzo tridimensionale, quando incontra un ostacolo può subire *riflessioni* rimbalzando parzialmente all'indietro sotto determinati angoli (*fenomeno di eco*); oppure *rifrazioni* che le consentono di cambiare la direzione di propagazione penetrando in zone d'ombra; ecc.

Di norma, risultano notevoli le difficoltà di integrazione analitica della [X.56] in presenza di condizioni al contorno che non abbiano geometria estremamente semplice.

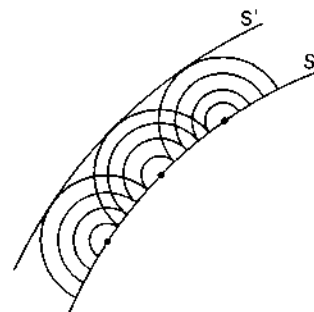
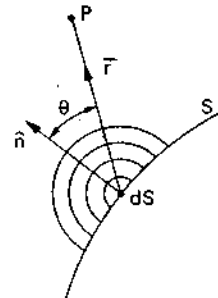
Torna particolarmente utile pertanto, nella maggior parte dei casi, il ricorso ad un metodo approssimato che va sotto il nome di *Principio di Huygens-Fresnel*; metodo che può essere elaborato anche con tecniche grafiche.

Principio di Huygens-Frusnel

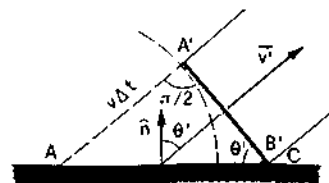
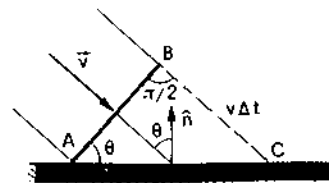
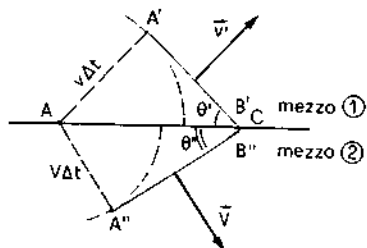
Consideriamo dunque a un certo istante t i fronti d'onda della perturbazione, cioè il luogo dei punti S nello spazio in cui la perturbazione arriva con la stessa fase. Per calcolare la configurazione della perturbazione all'istante $t + dt$, si ipotizza che ogni elemento di area dS di S generi delle onde sferiche secondarie tutte fra di loro in fase (onde secondarie coerenti). Le onde secondarie sono emesse in avanti rispetto a quella che, in ogni posizione, è la direzione di provenienza del fronte d'onda. Ciò si impone mediante un fattore direzionale all'ampiezza, fattore del tipo $f(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$, dove θ è l'angolo fra la direzione $\vec{r}$ di osservazione e la normale $\hat{n}$ al fronte d'onda. Il fattore $f(\theta)$ privilegia evidentemente l'emissione in avanti, visto che $f(o) = 1$ (in avanti) mentre $f(\pi) = 0$ (all'indietro).

Il fronte d'onda S' all'istante $t + dt$ è dato dall'inviluppo delle onde secondarie che sono state emesse al tempo t dal fronte d'onda S.

La base fisica del metodo di Huygens-Fresnel è appoggiata sul fatto che in un mezzo elastico continuo ogni elemento di volume, in movimento, trasmette il suo moto ai punti circostanti, e quindi può essere assimilato a una sorgente puntiforme di onde sferiche. A causa di fenomeni di interferenza con le onde secondarie emesse dai punti adiacenti, si hanno effetti distruttivi all'indietro e effetti costruttivi in avanti.

Il metodo di Hugens-Fresnel troverà maggiori approfondimenti e applicazioni nella trattazione delle onde elettromagnetiche.

Esempi

E.X.11. *Un'onda elastica piana incide su una superficie piana riflettente; la sua direzione di propagazione forma un angolo θ con la normale $\hat{n}$ alla superficie riflettente. Usando il principio di Huygens-Fresnel, determinare la direzione di propagazione θ' dell'onda riflessa*

Consideriamo un tratto AB del fronte d'onda nel momento t_A in cui il suo bordo A tocca la superficie riflettente. Il punto A diverrà sorgente di un'onda riflessa mentre il punto B deve ancora percorrere il tratto BC prima di toccare la superficie riflettente in C. All'istante t_B in cui il punto B del fronte d'onda arriva in C, l'onda sferica emessa in A all'istante t_A ha assunto un raggio AA' pari a $v(t_B - t_A) = v\Delta t = BC$; in quell'istante anche il punto $C \equiv B'$ diviene sorgente di un'onda riflessa, che tuttavia ha ancora dimensioni puntiformi. Il fronte dell'onda riflessa è dato in quell'istante dal segmento $A'B'$. In virtù dell'uguaglianza fra i due triangoli rettangoli ABC e $AA'C$ (essi hanno l'ipotenusa AC in comune; inoltre $BC = AA' = v\Delta t$), si ha $\theta' = \theta$. *L'angolo a cui l'onda viene riflessa è pari all'angolo di incidenza.*

E.X.12. *Un'onda elastica piana, procedente con velocità v nel mezzo [1], incide con angolo θ sulla superficie piana che separa il mezzo [1] da un secondo mezzo (mezzo [2]), in cui la velocità di propagazione dell'onda è V (per fissare le idee, si ponga $V < v$). L'onda incidente produce due onde secondarie:*

un'onda riflessa, che si propaga con angolo θ' nel mezzo [1]; e un'onda «rifratta», che si propaga nel mezzo [2] con angolo θ''. Determinare la relazione fra θ', θ'' e θ.

In base al ragionamento fatto nell'es. E.X.11, si ha $\theta' = \theta$.

Nell'intervallo di tempo Δt richiesto perché l'onda incidente percorra il tratto BC, mentre l'onda riflessa emessa in A a $t = t_A$ assume raggio $v\,\Delta t$, l'onda rifratta (emessa anch'essa in A a $t = t_A$) assume raggio $V\Delta t$. Si ha dunque

$$AA' = v\,\Delta t$$
$$AA'' = V\Delta t$$

$A'B'$ e $A''B''$ rappresentano i fronti dell'onda riflessa e rifratta rispettivamente.

Da semplici considerazioni geometriche si ha:

$$\begin{cases} \sin\theta' = \dfrac{AA'}{AC} = \dfrac{v\,\Delta t}{AC} \\ \sin\theta'' = \dfrac{AA''}{AC} = \dfrac{V\Delta t}{AC} \end{cases}$$

Facendo il rapporto membro a membro:

Legge di Snell

$$\sin\theta''/\sin\theta' = V/v \quad \text{(Legge di Snell).}$$

X.9. Effetto Doppler

Consideriamo un'onda, che per semplicità supporremo sinusoidale, che si propaga in un mezzo elastico omogeneo. Essa è generata da una *sorgente*, cioè da un sistema meccanico vibrante (diapason, membrana, corda di strumento musicale, strumento a fiato, ecc.) che interagisce con il mezzo elastico, trasmettendogli un movimento locale che poi si propaga, in virtù delle proprietà elastiche del mezzo, secondo le leggi fin qui discusse.

Un'onda elastica così generata può essere rivelata da un opportuno *rivelatore* meccanico (timpano, membrana vibrante, ecc.) che è a contatto con il mezzo elastico perturbato dall'onda, e che da questo riceve impulsi dinamici sincroni con l'onda di spostamento.

Se la distanza relativa tra sorgente e osservatore è costante nel tempo, il numero di fronti d'onda emessi nell'unità di tempo dalla sorgente coincide con il numero dei fronti d'onda che nello stesso intervallo di tempo arrivano al rivelatore e quindi con il numero di vibrazioni che il rivelatore registra. Ciò implica che la frequenza ν_S dell'onda emessa dalla sorgente coincida con la frequenza ν_R dell'onda rivelata.

In maggior dettaglio si può dire che la frequenza di emissione da parte della sorgente è pari al numero di fronti d'onda emessi nel tempo unitario. Il numero di fronti d'onda Δn_S emessi dalla sorgente nel tempo Δt è dunque $\Delta n_S = \nu_S \Delta t$. Tali fronti d'onda distano l'uno dall'altro di una quantità pari a λ e procedono con velocità $v = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda\nu_S$. Il numero Δn_R di fronti d'onda che arrivano al rivelatore R nel tempo Δt è pari a tanti fronti d'onda quanti sono contenuti nel tratto $v\Delta t$ di cui tutti i fronti d'onda si spostano nel tempo Δt, cioè

$$\Delta n_R = \frac{v\,\Delta t}{\lambda} = \frac{(\lambda\nu_S)\,\Delta t}{\lambda} = \nu_S \Delta t\,.$$

La frequenza rivelata ν_R è dunque:

$$\nu_R = \frac{\Delta n_R}{\Delta t} = \frac{\nu_S \Delta t}{\Delta t} = \nu_S$$

e coincide pertanto con quella emessa.

Se invece la sorgente e il rivelatore sono in moto relativo, la frequenza percepita dal rivelatore non coincide più con la frequenza emessa dalla sorgente; questo fenomeno va sotto il nome di *effetto Doppler* (1842).

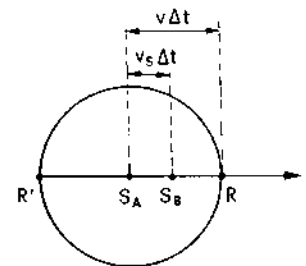
Effetto Doppler

Trattiamo separatamente due casi: a) il rivelatore R è fermo rispetto al mezzo elastico (solidalmente al quale scegliamo il sistema di riferimento) e la sorgente S è in moto di avvicinamento o di allontanamento; b) la sorgente S è ferma rispetto al mezzo elastico (e rispetto al sistema di riferimento) mentre si muove il rivelatore.

a) *Sorgente in moto e osservatore fermo*

Supponiamo che la sorgente S si avvicini al rivelatore R con velocità v_S diretta come la retta che congiunge S con R; v è la velocità dell'onda rispetto al mezzo elastico.

Consideriamo un certo istante $t = t_A$, e sia S_A la posizione che la sorgente ha a tale istante. Sia t_B l'istante in cui il fronte d'onda emesso a t_A in S_A giunge al rivelatore R; indichiamo con Δt l'intervallo di tempo $\Delta t = t_B - t_A$. Durante tale intervallo di tempo la sorgente ha emesso un numero di fronti d'onda Δn_S pari a $\Delta n_S = \nu_S \Delta t$, dove ν_S è la frequenza propria della sorgente stessa.

All'istante $t = t_B$, tutti questi fronti d'onda si trovano contenuti nello spazio $\Delta l = v\Delta t - v_S \Delta t$ compreso fra R (posizione in cui è arrivato il fronte d'onda emesso in S_A all'istante t_A) e S_B (posizione dove si trova la sorgente all'istante $t = t_B$). Dunque la lunghezza d'onda λ_R dell'onda elastica che la sorgente genera nel tratto di mezzo elastico che la separa dal rivelatore R è:

$$\lambda_R = \frac{\Delta l}{\Delta n_S} = \frac{v\Delta t - v_S \Delta t}{\nu_S \Delta t} = \frac{v - v_S}{\nu_S}$$

Poiché tali fronti d'onda procedono verso il rivelatore R con velocità v, la frequenza ν_R misurata dal rivelatore stesso è (vedi eq. [X.52]):

$$\nu_R = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v}{(v - v_S)/\nu_S} = \nu_S \left(\frac{v}{v - v_S} \right) \quad (S \text{ si avvicina}) \qquad [X.57]$$

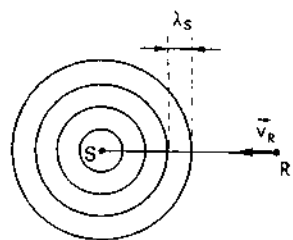
Il rivelatore R percepisce una frequenza ν_R maggiore rispetto a quella ν_S emessa dalla sorgente che si avvicina (suono più acuto).

Analogamente si trova che qualora la sorgente si allontani (rivelatore posto in R') la frequenza ν_R percepita è minore rispetto a quella ν_S emessa, essendo espressa da

$$\nu_R = \nu_S \left(\frac{v}{v + v_S} \right) \quad (S \text{ si allontana}). \qquad [X.58]$$

Fa parte dell'esperienza comune il constatare che il suono da noi percepito, emesso dal clacson di un'automobile in corsa, subisce un brusco

spostamento da toni acuti a toni più gravi nel momento in cui l'automobile, passandoci accanto, cessa di avvicinarsi per cominciare ad allontanarsi: si tratta di una riprova sperimentale delle [X.57] e [X.58].

b) *Sorgente ferma e osservatore in moto*

La sorgente ferma emette fronti d'onda la cui distanza relativa è λ_S. Se il rivelatore si avvicina alla sorgente il numero Δn_R di fronti d'onda che esso incontra nell'intervallo di tempo Δt generico è pari al numero Δn_o di fronti che comunque lo raggiungerebbero se fosse fermo, e cioè $\Delta n_o = \nu_S \Delta t$, aumentato del numero di fronti $\Delta n'$ che si trovano nello spazio $v_R \Delta t$ di cui il rivelatore si è spostato nel frattempo verso la direzione di provenienza dell'onda: $\Delta n' = \dfrac{v_R \Delta t}{\lambda_S}$. In totale si ha dunque

$$\Delta n_R = \Delta n_o + \Delta n' = \nu_S \Delta t + \frac{v_R \Delta t}{\lambda_S} = \left(\nu_S + \frac{v_R}{\lambda_S}\right) \Delta t$$

Tenuto conto della [X.52], la frequenza osservata sarà dunque

$$\nu_R = \frac{\Delta n_R}{\Delta t} = \nu_S + \frac{v_R}{\lambda_S} = \nu_S + \frac{v_R}{v}\nu_S = \nu_S\left(1 + \frac{v_R}{v}\right) \quad (R \text{ si avvicina}) \quad [X.59]$$

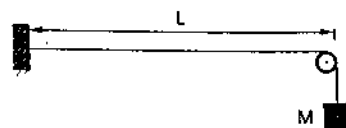
Quando l'osservatore si avvicina alla sorgente, la frequenza ν_R osservata è maggiore della frequenza emessa ν_S.

Analogamente, nel caso in cui il rivelatore si allontani dalla sorgente, la frequenza ν_R osservata è minore della frequenza ν_S emessa, essendo espressa dalla relazione:

$$\nu_R = \nu_S\left(1 - \frac{v_R}{v}\right) \quad (R \text{ si allontana}) \quad [X.60]$$

Esercizi del capitolo X

X.1. Calcolare la velocità di propagazione di un'onda elastica trasversale che si propaga in un filo di lunghezza $L = 10$ m, mantenuto teso da un peso di massa $M = 5$ kg, come mostrato in figura. La massa m del filo è 100 g.

(Risposta: $v = 221$ m/s)

X.2. Un'onda longitudinale di spostamento si propaga in una sbarra omogenea di densità $\rho = 2{,}7$ g/cm^3. L'onda é di tipo sinusoidale, con numero d'onda $k = 0{,}5\ \text{m}^{-1}$ e pulsazione $\omega = 2530$ rad/s. Quanto vale il modulo di Young del materiale?

$$\left(\text{Risposta: } E = 6{,}9 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$$

X.3. Supponiamo che l'onda longitudinale elastica di cui al problema 2 abbia ampiezza $A = 2 \cdot 10^{-6}$ m. Calcolare il valore massimo dello sforzo normale in una sezione della sbarra.

$$\left(\text{Risposta: } \left(\frac{F}{S}\right)_{max} = 6{,}9 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$$

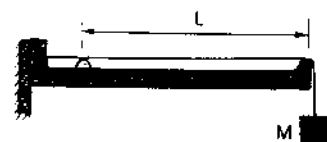
X.4. Un altoparlante emette onde sferiche nello spazio omogeneo e trasparente (cioè privo di smorzamento). La potenza della sorgente è $W = 10$ w. Calcolare l'intensità dell'onda acustica, I, alle distanze $d_1 = 3$ m e $d_2 = 6$ m.

(Risposte: $I_1 = 8{,}84 \cdot 10^{-2}$ w/m^2; $I_2 = 2{,}21 \cdot 10^{-2}$ w/m^2)

X.5. Due onde piane longitudinali, di tipo sinusoidale, aventi la stessa ampiezza e la stessa lunghezza d'onda $\lambda = 50$ cm, si propagano nella stessa direzione e verso in un mezzo trasparente. Le rispettive sorgenti hanno la stessa fase e distano di un tratto $L = 3{,}25$ m. Calcolare l'intensità risultante dalla sovrapposizione delle due onde.

(Risposta: $I = 0$)

X.6. Una corda, di densità lineare $\mu = 0{,}5$ g/m e di lunghezza $L = 40$ cm, è tesa fra due punti fissi mediante un peso di massa $m = 2$ kg. Pizzicando la corda, quale è la frequenza del suono che ne esce? (Si supponga che la corda vibri sull'armonica fondamentale).

(Risposta: $\nu = 247\ \text{s}^{-1}$)

X.7. Uno zufolo è costituito da una canna di legno di lunghezza $L = 40$ cm, chiusa a un estremo. Qual'è la frequenza dell'armonica fondamentale che esso emette? (La pressione P_0 e la temperatura T_0 dell'aria sono rispettivamente $P_0 = 1$ Atm; $T_0 = 0$°C).

(Risposta: $\nu = 207\ \text{s}^{-1}$)

X.8. Quale variazione percentuale subisce la frequenza emessa dallo zufolo di cui al problema 7 se la temperatura dell'aria varia di 15°C?

(Risposta: $\Delta\nu = 5{,}7\ \text{s}^{-1}$)

X.9. Un'automobile passa vicino a un pedone suonando il clacson, alla velocità v_S di 108 km/h. Quale variazione percentuale nella frequenza del suono del clacson percepisce il pedone nel momento in cui l'automobile lo sorpassa? Si trascuri la velocità del pedone.

$$\left(\text{Risposta: } \frac{\Delta\nu_R}{\nu_S} = 17{,}8 \cdot 10^{-2}\right)$$

X.10. Il Do medio ha una frequenza $\nu = 261{,}6$ Hz. In un concerto all'aperto, spira un vento dal palco verso la platea alla velocità $v_0 = 6$ m/s. Quale variazione della frequenza del Do viene percepita dagli ascoltatori?

(Risposta: $\nu_R - \nu_S \simeq 4{,}5\ \text{s}^{-1}$)

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo X

X.1. Ricordare (o ricavare) l'espressione della velocità di propagazione di onde trasversali in una corda tesa in funzione della tensione applicata e della densità della corda (par. X.4).

X.2. Dati k e ω, è nota la velocità v dell'onda; d'altra parte v è funzione, per un'onda longitudinale, del modulo di Young E e della densità ρ (vedi par. X.3).

X.3. La forza F sulla sezione della sbarra è legata al modulo di Young E e alla derivata dello spostamento $\alpha(x, t)$ (vedi par. X.3). La funzione $\alpha(x, t)$ è data.

X.4. L'energia W emessa dalla sorgente nell'unità di tempo, transita, nel tempo unitario, attraverso ogni superficie sferica centrata nella sorgente.

X.5. Si tratta di un fenomeno di interferenza, per il quale va calcolato lo sfasamento fra le due onde; va quindi usata la [X.45].

X.6. Si tratta di una oscillazione stazionaria, la cui lunghezza d'onda λ è dunque direttamente legata alla lunghezza L della corda. La frequenza è poi legata a l e alla velocità di propagazione dell'onda nella corda (vedi par. X.4).

X.7. Si tratta di una oscillazione longitudinale stazionaria, la cui lunghezza l è dunque direttamente legata alla lunghezza L della canna. La frequenza è poi legata a λ e alla velocità di propagazione delle oscillazioni longitudinali in aria (vedi eq. [X.28]).

X.8. La variazione di frequenza è dovuta alla variazione della velocità del suono in aria con la temperatura; variazione descritta dalla [X.30]

X.9. Prima del sorpasso la sorgente si avvicina al pedone; dopo se ne allontana. Si realizza pertanto un effetto Doppler (vedi eqs. [X.57] e [X.58]).

X.10. La velocità con cui i fronti d'onda arrivano all'orecchio degli ascoltatori è pari alla velocità v del suono in aria più la velocità v_0 con cui l'aria si muove verso gli ascoltatori stessi. Si realizza pertanto un effetto Doppler (vedi eq. [X.59]).

Capitolo undicesimo

Teoria della relatività ristretta

La meccanica classica, di cui ci siamo occupati fino a qui in questo libro, è una teoria che descrive correttamente la maggior parte dei fenomeni con cui abbiamo a che fare nella vita di tutti i giorni. Come abbiamo visto, essa impiega a tale scopo molte equazioni. Tuttavia, a ben guardare, dal punto di vista concettuale le basi su cui si fonda possono essere ridotte a un numero assai limitato di princìpi.

Infatti già il solo principio di relatività, associato alle trasformazioni di Galileo (che ci dicono come le coordinate che descrivono un punto materiale cambiano passando da un sistema di riferimento a un altro) rende immediata l'ipotesi che le forze debbano essere poste in relazione con l'accelerazione; e porta dunque alla formulazione del secondo principio della dinamica. Se infatti le forze fossero in relazione con la velocità, poiché questa viene modificata dalle trasformazioni di Galileo, avremmo una legge della dinamica *non covariante* passando da un sistema di riferimento a un altro in moto traslatorio uniforme rispetto al primo; e ciò sarebbe in contrasto con il principio di relatività. Va notato anche che quando nella legge delle forze compare una velocità $\vec{v}$ (ad esempio nel caso della resistenza del mezzo esercitata dall'aria) questa rappresenta la velocità del punto *relativamente a qualche altro sistema con cui il punto interagisce*; e dunque $\vec{v}$ viene lasciata inalterata, dalle trasformazioni di Galileo, passando dal primo sistema di riferimento al secondo, e con ciò resta preservata la coerenza col principio di relatività.

D'altra parte le trasformazioni di Galileo (sinteticamente enunciabili in termini della regola di somma delle velocità) oltreché essere coerenti con l'esperienza quotidiana sono anche facilmente deducibili in base a semplici considerazioni geometriche una volta accettata l'ipotesi che *il tempo sia una grandezza assoluta*, cioè che esso abbia valore indipendente dal sistema di riferimento. Possiamo dunque dire che i princìpi basilari della dinamica classica del punto materiale siano il *principio di relatività* e il *principio di invarianza del tempo* rispetto al sistema di riferimento.

Princìpi basilari della meccanica classica

Passando alla dinamica dei sistemi, è necessario introdurre in più il *principio di conservazione della quantità di moto e del momento angolare per*

i sistemi isolati (terzo principio della dinamica); questo rappresenta in effetti il terzo grande pilastro della meccanica classica. Ci limitiamo qui ad affermare (il dimostrarlo ci porterebbe lontano) che questo principio equivale all'ipotesi assai ragionevole che lo spazio vuoto non abbia posizioni né orientamenti privilegiati.

L'elegante teoria rappresentata dalla dinamica classica fu messa in crisi verso la fine del secolo scorso, prima a livello teorico e poi sperimentale, dalla osservazione di una particolare circostanza relativa alla propagazione della luce.

Secondo le equazioni di Maxwell, che sintetizzano in termini molto compatti le leggi relative ai fenomeni elettrici e magnetici, il campo elettromagnetico è descritto da una equazione in cui compare una costante universale la cui interpretazione fisica è la velocità di propagazione di ogni onda elettromagnetica (e dunque anche della luce) nel vuoto. La circostanza singolare è che tale costante (indicata usualmente con c; il suo valore è $c \simeq 300.000$ km/s) descrive una *velocità assoluta*; non dunque una velocità relativa a qualche sistema fisico partecipante al fenomeno di propagazione e atto a individuare – così come accade tutte le volte che una velocità compare in una equazione meccanica – un sistema di riferimento rispetto al quale misurare quella velocità.

Esperimento di Michelson

Più tardi un famoso esperimento (compiuto per la prima volta da Michelson nel 1881) indicava che la velocità con cui la luce proveniente dal Sole arriva sulla Terra è la stessa sia quando la luce procede parallelamente al moto della Terra rispetto al Sole, sia quando essa viene deviata ortogonalmente a tale moto. Benché la velocità della Terra rispetto a un sistema di riferimento con origine nel Sole sia dell'ordine di un decimillesimo della velocità della luce, la precisione dell'esperimento era sufficiente a mettere in evidenza l'effetto di somma delle velocità previsto dalle trasformazioni di Galileo; effetto che invece non si dimostrava a livello sperimentale.

Su basi teoriche, si poneva dunque il problema di quale fosse il sistema di riferimento in cui la luce avesse la velocità prevista dalla teoria; su basi sperimentali vi erano indicazioni a favore dell'ipotesi che tale velocità avesse valore indipendente dal sistema di riferimento in cui la misura veniva eseguita.

Ipotesi dell'etere

La tendenza generale nel mondo della scienza era quella di rinunciare al principio di relatività (che del resto era stato enunciato da Galileo solo in relazione ai fenomeni meccanici) ipotizzando l'esistenza di un mezzo impalpabile (l'«etere») che riempiva uniformemente lo spazio «vuoto», e individuava fra tutti i sistemi di riferimento inerziali un sistema privilegiato: quello cioè in quiete rispetto all'etere stesso. In questo schema la velocità della luce aveva valore pari a *c rispetto all'etere*; e i risultati dell'esperimento di Michelson potevano essere interpretati, se pure in termini piuttosto macchinosi, ipotizzando una perturbazione indotta dalla Terra, al suo passaggio, nell'etere («vento d'etere»).

Teoria della Relatività Ristretta

Principio di costanza della velocità della luce

Fu a questo punto (1905) che Einstein propose la sua *teoria della relatività ristretta*; teoria basata su una riaffermazione del principio di relatività enunciato da Galileo, con l'estensione di tale principio a tutti i fenomeni fisici, e non solo dunque a quelli meccanici. Si rinunciava invece alla legge di somma delle velocità affermando al suo posto il *principio di costanza della velocità della luce*, secondo cui la luce si muove sempre con velocità pari a c indipendentemente dal sistema di riferimento in cui ci si ponga a misurarla. Secondo questo principio – ormai ampiamente consolidato a livello sperimentale – sia quando ci si muove verso la direzione di prove-

nienza della luce, sia quando ci si allontani - a qualunque velocità - dalla sorgente, si osserva sempre per la luce la stessa velocità di propagazione.

Evidentemente questo principio è, come già accenato, in contrasto con la legge di somma delle velocità, cioè con le trasformazioni di Galileo. Einstein osservò però che tale legge di trasformazione era stata verificata sperimentalmente solo nel caso di velocità molto piccole rispetto a quella della luce; e non vi è alcun motivo sperimentale per ritenerla valida anche nel caso di sistemi in moto con velocità confrontabili con quella della luce.

Trasformazioni di Lorentz

In effetti, nella teoria della relatività, a partire da una analisi critica del concetto di tempo, le trasformazioni di Galileo vengono sostituite dalle cosiddette *trasformazioni di Lorentz*, che si riducono alle trasformazioni di Galileo quando la velocità V del sistema di riferimento «mobile» sia molto piccola rispetto alla velocità c della luce, cioè nel limite $V/c << 1$. In realtà tutte le leggi della relatività di Einstein, che pure forniscono risultati diversi e per certi aspetti sorprendenti quando V sia confrontabile con c, si riducono alle leggi della meccanica classica nel limite $V/c << 1$.

Teoria della Relatività Generale

Qualche anno più tardi (1916) Einstein pubblicò anche la sua Teoria della Relatività Generale; teoria nella quale le forze gravitazionali vengono interpretate in termini di proprietà geometriche dello spazio nei sistemi di riferimento non inerziali. In questo corso di fisica noi non tratteremo nemmeno marginalmente la Teoria della Relatività Generale.

XI.1. Il tempo nella relatività ristretta. La sincronizzazione degli orologi

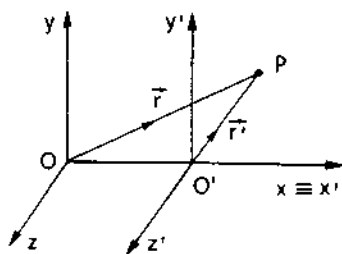
I principi su cui si basa la relatività ristretta sono dunque i seguenti:

1) *Principio di relatività*. Qualunque esperimento, a proposito di qualsivoglia fenomeno fisico, fornisce gli stessi risultati quando venga eseguito in due sistemi di riferimento dotati di moto relativo traslatorio rettilineo ed uniforme.

2) *Principio di costanza della velocità della luce*. La velocità c con cui si propaga un segnale luminoso (così come ogni altra onda elettromagnetica) è sempre la stessa, indipendentemente da quale sia il sistema di riferimento in cui ci si pone per effettuare la misura.

3) *Principio di conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto*. In un sistema di riferimento inerziale, la quantità di moto totale e il momento angolare totale di un sistema fisico isolato restano costanti nel tempo.

Il primo e il terzo di questi principi sono presenti anche nella meccanica classica. Il principio di costanza della velocità della luce non è invece presente in fisica classica; anzi al suo posto abbiamo in meccanica classica una legge di trasformazione delle coordinate («trasformazioni di Galileo») che è in contrasto con il principio di costanza della velocità della luce.

Richiamiamo brevemente le trasformazioni di Galileo, così come le abbiamo introdotte nel par. III.6. Consideriamo dunque un sistema di riferimento $\Sigma \equiv O\,x\,y\,z$ e un secondo sistema di riferimento $\Sigma' \equiv O'\,x'\,y'\,z'$ che si muove rispetto al primo di moto traslatorio rettilineo ed uniforme (con velocità $\vec{V}$) rispetto a Σ. Per semplicità, supponiamo (ciò non toglie generalità al ragionamento) che all'istante $t = 0$ sia $O \equiv O'$, e che la velocità $\vec{V}$ sia parallela all'asse x.

Deduzione delle trasformazioni di Galileo

Considerato un punto P, sia $\vec{r}$ il vettore posizione di P rispetto a $\sum$ e $\vec{r}'$ il suo vettore posizione rispetto a $\sum'$. Si ha:

$$\vec{r} = \vec{r}' + OO' = \vec{r}' + \vec{V}t \qquad \text{[XI.1]}$$

avendo tenuto conto del fatto che $OO' = Vt$ (nell'ipotesi da noi fatta che per $t = 0$ sia $O \equiv O'$). Proiettando sugli assi (e ipotizzando che il tempo t' nel sistema $\sum'$ coincida con il tempo t nel sistema $\sum$) possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \qquad \text{[XI.2]}$$

che rappresentano le trasformazioni di Galileo.

Derivando la [XI.2] (o la [XI.1]) rispetto al tempo $t \equiv t'$, si ha:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \qquad \text{[XI.3]}$$

dove $\vec{v}$ è la velocità di P in $\sum$ e $\vec{v}'$ la sua velocità in $\sum'$. Questa legge è incompatibile con il principio di costanza della velocità della luce: non può essere infatti, secondo la [XI.3], $\vec{v} = \vec{v}'$ altro che quando $\vec{V} = 0$, cioè quando il sistema di riferimento $\sum'$ è fermo rispetto a $\sum$.

La deduzione della [XI.3] mostra che questa legge, oltre che essere in accordo con gli usuali esperimenti di meccanica (esperimenti eseguiti tuttavia per valori delle velocità v, v′ e V molto minori di c) è anche ricavabile mediante semplici considerazioni geometriche una volta accettata l'ipotesi che il tempo sia lo stesso nei due sistemi di riferimento.

L'assunzione del principio di costanza della velocità della luce deve pertanto necessariamente comportare un riesame critico del concetto di tempo; perché esso possa valere, ci aspettiamo che sia $t \neq t'$.

Definizione operativa di tempo

La definizione operativa della grandezza tempo (così come l'abbiamo presentata nel par I.4) è concettualmente basata su due assunzioni:

a) l'individuazione di un *orologio*, cioè di *uno strumento che compie cicli rigorosamente ripetitivi*; cosicché il tempo che separa due eventi A e B possa essere misurato contando il numero di cicli che l'orologio compie fra l'evento A e l'evento B;

Sincronismo

b) la capacità di giudicare la *contemporaneità* (o *sincronismo*) di due eventi: in modo da essere in grado di far partire il conteggio delle oscillazioni dell'orologio («start») in sincronismo con l'evento A, e di fermarlo («stop») in sincronismo con l'evento B.

Contemporaneità e casualità

Cominciamo con l'analizzare meglio il concetto di sincronismo. Questo concetto è definibile in termini semplici, almeno in linea di principio, nel caso di eventi A e B che abbiano luogo nello *stesso posto*. Diremo che l'evento A è avvenuto *prima* di B se A è in grado, almeno in linea di principio, di influenzare B. A è avvenuto invece *dopo* B, se almeno in linea di principio B è in grado di influenzare A. I due eventi sono dunque *contemporanei* se non è possibile, nemmeno in linea di principio, collegarli fra di loro con alcuna relazione di causa-effetto.

Se i due eventi avvengono in luoghi diversi, tuttavia, la semplice definizione di sincronismo testé data non è praticabile tale quale. Se ad esempio i due eventi A e B avvengono in due stanze diverse, non è possibile

un osservatore confrontare direttamente i tempi in cui essi avvengono. Due osservatori a e b che osservino rispettivamente A e B giudicano usualmente la contemporaneità confrontando gli istanti in cui A e B avvengono con due orologi posti vicino ad A e a B rispettivamente. Si pone però, evidentemente, il problema di *sincronizzare* i due orologi; cioè di assicurarsi non solo che essi misurino il tempo allo stesso ritmo (che non vadano né avanti né indietro uno rispetto all'altro), ma anche che la loro origine dei tempi sia stata aggiustata rispetto a uno stesso evento di riferimento per entrambi. Notiamo che la procedura comunemente usata nella pratica per sincronizzare orologi fra di loro lontani è quella del *segnale orario*: procedura consistente nell'inviare agli orologi un segnale costituito da un treno d'onda elettromagnetica (un segnale radio), in modo che gli orologi possano essere fatti partire in sincronismo con l'arrivo ad essi del segnale orario stesso. Questa procedura è adeguata alla maggior parte delle esigenze pratiche, perché il tempo impiegato dal segnale orario per viaggiare fino alla posizione degli orologi è irrilevante rispetto alla precisione con cui di solito interessa sincronizzarli. Tuttavia questa procedura non è concettualmente esatta; né è adottabile in relatività, quando si ha a che fare con sistemi che si muovono con velocità prossima a quella della luce, e il tempo impiegato dal segnale orario a compiere il suo viaggio dall'emettitore di segnale ai luoghi dove gli orologi sono posti è confrontabile con i tempi in gioco nei fenomeni di nostro interesse.

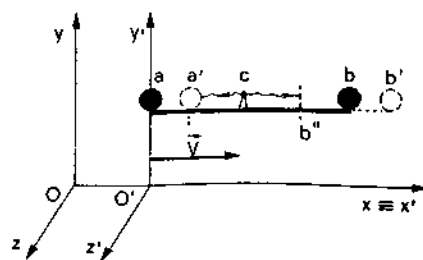
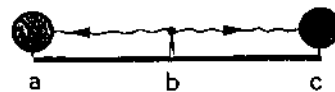
Sincronizzazione degli orologi

Dati due orologi a e b, un modo concettualmente corretto per sincronizzarli consiste nel disporre un emettitore di segnale elettromagnetico (per semplicità ci riferiremo a un segnale luminoso) nel punto di mezzo C del segmento che congiunge a e b, e avviando i due orologi quando il segnale arriva in a e in b.

Vediamo ora come questa procedura di sincronizzazione degli orologi funziona quando venga osservata da due sistemi di riferimento diversi in moto uno rispetto all'altro con velocità V non trascurabile, ma confrontabile, rispetto alla velocità c della luce.

Consideriamo dunque i due sistemi di riferimento già definiti $\sum$ e $\sum'$; e supponiamo che due orologi, a e b, siano solidali con $\sum'$: a è disposto nell'origine O', e b si trova sull'asse $x \equiv x'$ a una distanza $\Delta x'$ da O'. Uno sperimentatore S' disposto solidalmente a $\sum'$ attua la procedura di sincronizzazione degli orologi facendo partire dal punto di mezzo C un segnale orario. Quando il segnale orario arriva in a e in b i due orologi partono, per lui, in sincronismo.

Un secondo sperimentatore S osserva, dal sistema di riferimento $\sum$, quello che è successo. Mentre il segnale orario procede da C verso gli orologi, il sistema di riferimento $\sum'$ (e con esso i due orologi) si è mosso. Poiché la luce, benché emessa da una sorgente in movimento in $\sum'$, si muove anche rispetto a $\sum$ con velocità c (principio di costanza di c), lo sperimentatore S non vede il segnale orario arrivare contemporaneamente ai due orologi: quando esso arriva nella posizione a' nella quale l'orologio a si è nel frattempo portato, dall'altro lato esso arriva nella posizione b'' simmetrica ad a' rispetto a C; mentre nel contempo l'orologio b si è portato in b'. Gli orologi, sincronizzati in $\sum'$, non appaiono dunque sincronizzati quando li si guardi da $\sum$; visto da $\sum$, l'orologio b è stato fatto partire in ritardo rispetto ad a.

Il sincronismo degli orologi non è una loro caratteristica assoluta, ma relativa; orologi sincroni in un sistema di riferimento, se localizzati in posizioni diverse appaiono non sincroni quando osservati da un sistema di rife-

Il sincronismo di due orologi è una loro caratteristica relativa

rimento in moto rispetto al primo. Naturalmente, come è facile verificare, i due orologi appaiono sincroni da entrambi i sistemi di riferimento qualora essi siano dislocati uno rispetto all'altro in direzione ortogonale al moto relativo dei due riferimenti.

Non è difficile, in base a semplici considerazioni cinematiche, quantificare la relazione esistente fra la dislocazione spaziale $\Delta x'$ e la differenza temporale $\Delta t'$ marcata dai due orologi. Si ha infatti:

$$aa' = V \cdot \frac{(\Delta x'/2)}{c}$$

considerato che $\frac{(\Delta x'/2)}{c}$ rappresenta il tempo che il segnale luminoso impiega (visto da $\sum$) a percorrere in $\sum'$ il tratto $Ca = \frac{\Delta x'}{2}$ che separa l'emettitore di segnale orario dall'orologio a. E quindi:

$$\Delta t' = \frac{2\,aa'}{c} = \frac{V \Delta x'}{c^2} \qquad [XI.4]$$

Vedremo che la [XI.4] è coerente, come deve, con le trasformazioni di Lorentz che sostituiscono, nella teoria della relatività ristretta, le trasformazioni di Galileo.

XI.2. **Dilatazione del tempo e contrazione delle lunghezze**

Non solo la sincronizzazione degli orologi, ma anche le misure degli intervalli temporali e delle distanze spaziali divengono, accettando i principi della relatività di Einstein, quantità relative; cioè dipendenti dal sistema di riferimento (inerziale) in cui ci si ponga per effettuare la misura stessa. Discutiamo perché ciò accada.

A tal fine consideriamo un orologio O solidale col sistema «fisso» $\sum$ e un orologio O' identico ad O ma solidale con $\sum'$, e dunque in moto con velocità V costante rispetto a $\sum$. Visto da $\sum$, l'orologio O batte il tempo t caratteristico del sistema $\sum$; per il principio di relatività, l'orologio O' (che è identico a O) quando venga osservato da $\sum'$ batte esattamente lo stesso tempo t che O batte in $\sum$. Il nostro problema è quello di stabilire quale relazione intercorra fra il tempo t che O batte in $\sum$ (uguale al tempo che O' batte in $\sum'$; questo tempo t, battuto dall'orologio solidale con l'osservatore, viene detto *tempo proprio*) e il tempo t' che O' batte quando viene osservato da $\sum$ (uguale al tempo che O batte quando venga osservato da $\sum'$). t' è dunque il tempo battuto da un orologio in moto con velocità V rispetto all'osservatore.

Tempo proprio

In meccanica classica, le trasformazioni di Galileo consentono di calcolare come un qualunque sistema meccanico (e in particolare un orologio) viene visto muoversi da un sistema di riferimento in moto rispetto ad esso; il risultato è che il tempo battuto dall'orologio è lo stesso sia rispetto all'osservatore fisso che rispetto all'osservatore mobile, come è ovvio, considerato che l'invarianza del tempo è il punto di partenza per dedurre le trasformazioni di Galileo.

Noi qui tuttavia, volendo assumere il principio di costanza della velocità della luce, siamo costretti a mettere in discussione le trasformazioni di Galileo. Solo il principio di costanza della velocità della luce (insieme al principio di relatività) può essere il punto di partenza del nostro ragionamento sulle proprietà di trasformazione del tempo.

Immaginiamo dunque che l'orologio O (così come l'orologio O') sia un orologio basato non su un pendolo meccanico né su qualunque altro fenomeno di tipo meccanico; ma sulla oscillazione di un segnale luminoso, così come mostrato in figura. In esso il segnale luminoso S emesso dalla sorgente S viene rivelato dal rivelatore R dopo essere stato riflesso dallo specchio M.

Benché ciò non appaia dal disegno, immaginiamo che S ed R siano spazialmente coincidenti.

Visto da un punto di osservazione solidale con l'orologio, il tempo Δt impiegato dal raggio s a compiere una oscillazione è dato evidentemente da

$$\Delta t = \frac{2l}{c} \qquad \text{[XI.5]}$$

Guardando invece l'orologio che si muove, si vedrà che il raggio luminoso (che procede comunque, da qualunque punto di osservazione, con velocità c) compie un percorso più lungo, perché mentre il raggio s si muove da S a R passando per M il rivelatore si sposta di un tratto $RR'' = SS''$. Si ha pertanto

$$\Delta t' = \frac{2SM'}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{l^2 + SS'^2} \qquad \text{[XI.6]}$$

Essendo d'altra parte $SS' = V\Delta t'$ $\left(\text{e dunque } SS' = \frac{V\Delta t'}{2}\right)$ quadrando la [XI.6] si ottiene

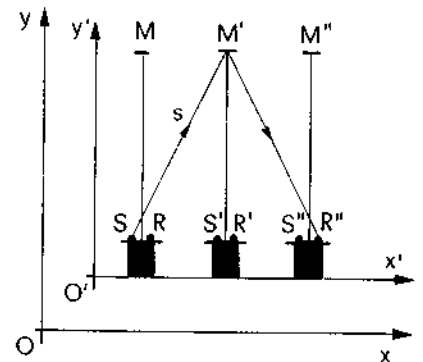
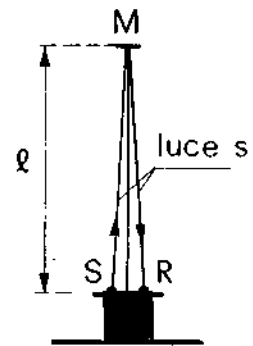
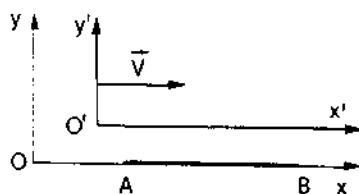
$$\Delta t' = \left(\frac{2}{c}\right)^2 \left[l^2 + \left(\frac{V\Delta t'}{2}\right)^2\right] = \Delta t^2 + \frac{V^2}{c^2}\Delta t'^2$$

avendo usato la [XI.5]. Da questa relazione si deduce

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad \text{[XI.7]}$$

La [XI.7] mostra che il tempo $\Delta t'$ battuto dall'orologio mobile rispetto all'osservatore scorre più lentamente del tempo proprio, cioè del tempo Δt battuto dall'orologio solidale con l'osservatore (fenomeno della dilatazione del tempo).

Dilatazione del tempo

Il ragionamento che abbiamo fatto per arrivare alla [XI.7] non è altro che una analisi dei risultati che in base ai principi generali della teoria ci si aspettano per un esperimento che non è stato effettivamente eseguito, e che anzi a causa di difficoltà pratiche (connesse con l'esigenza di far muovere un orologio a velocità confrontabile con la velocità della luce) difficilmente potrà mai essere eseguito (*esperimento concettuale* o, in tedesco, *gedanken experiment*).

Esperimento concettuale

In base alla analisi di esperimenti concettuali Einstein dedusse la struttura delle leggi fondamentali della sua teoria; leggi che hanno poi trovato innumerevoli conferme sperimentali, non sempre così dirette come gli esperimenti concettuali di partenza, ma non per questo meno stringenti. In particolare il fenomeno della dilatazione del tempo è stato sperimentalmente verificato anche direttamente osservando che le particelle instabili (caratterizzate cioè da una vita media τ, dopo la quale mediamente esse «muoiono» decadendo in particelle diverse) vivono di più quando si muovono rispetto all'osservatore: l'allungamento misurato per la loro vita media è in effetti descritto dalla [XI.7]; esso è cioè coerente con il fenomeno di dilatazione del tempo previsto dalla relatività ristretta.

Contrazione delle lunghezze

Al fenomeno della dilatazione dei tempi si accompagna, necessariamente, il fenomeno della *contrazione delle lunghezze*. Il modo più semplice per mostrarlo consiste nell'analizzare un esperimento concettuale di misura indiretta delle lunghezze, basata su una misura di tempo e una misura di velocità.

Supponiamo dunque che due diversi osservatori S e S', che si trovano rispettivamente in $\sum$ e in $\sum'$, vogliano misurare la lunghezza di una sbarretta AB solidale con $\sum$ e disposta parallelamente all'asse $x \equiv x'$.

Posto un traguardo dotato di cronometro solidalmente a $\sum'$ (ad esempio tale traguardo sia disposto nell'origine O'), la lunghezza della sbarretta viene misurata misurando l'intervallo di tempo che intercorre fra quando il traguardo passa, rispettivamente, davanti ad A e a B.

L'osservatore S misura per la sbarretta (solidale con sé) la lunghezza propria L; il risultato della sua misura è:

$$L = V\Delta t' \qquad \text{[XI.8]}$$

Va notato infatti che per S l'orologio si muove con velocità V insieme a $\sum'$, e dunque l'intervallo di tempo da esso segnato *non* è un tempo proprio.

Per l'osservatore S', invece, l'orologio è fermo e la sbarretta si muove con velocità V; il valore L' della lunghezza misurata da S' è dunque:

$$L' = V\Delta t \qquad \text{[XI.9]}$$

Essendo infatti l'orologio fermo rispetto a S' esso misura per lui un tempo proprio. Facendo il rapporto fra la [XI.9] e la [XI.8] si ha $\frac{L'}{L} = \frac{\Delta t}{\Delta t'}$; e dunque in definitiva, tenendo conto della [XI.7]:

$$L' = L\sqrt{1 - V^2/c^2} \qquad \text{[XI.10]}$$

Vista dall'osservatore mobile, la lunghezza L' appare dunque contratta per un fattore $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ rispetto al valore L misurato dall'osservatore fermo rispetto alla sbarretta stessa, cioè rispetto alla lunghezza propria (contrazione delle lunghezze)

XI.3. Trasformazioni di Lorentz, spazio-tempo e trasformazioni relativistiche della velocità

Analizzando, in base al principio di relatività e al principio di costanza della velocità della luce, esperimenti concettuali come quelli discussi nel

precedente paragrafo, Einstein fu portato ad assumere nella sua teoria, al posto delle trasformazioni di Galileo, le cosiddette *trasformazioni di Lorentz*, che rappresentano le uniche leggi di trasformazione coerenti coi suddetti principi.

Trasformazioni di Lorentz

Nel caso, cui qui continuiamo a limitare la nostra attenzione, che il sistema $\sum'$ si muova con velocità $\bar{V}$ (costante) parallela all'asse $x \equiv x'$, le trasformazioni di Lorentz hanno la forma

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - (V/c^2)\,x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{cases} \quad \text{[XI.11.a]} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + (V/c^2)\,x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{cases} \quad \text{[XI.11.b]}$$

È facile rendersi conto, in particolare, che queste leggi di trasformazione contengono le equazioni [XI.4], [XI.7] e [XI.10]: lasciamo al lettore la facile verifica.

Per rendere le equazioni dimensionalmente omogenee, è usuale, in relatività, introdurre il *vettore a quattro componenti* (quadrivettore):

$$\underline{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad \text{[XI.12]}$$

definito dalle relazioni

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \\ x_4 = ct \end{cases} \qquad \text{[XI.13]}$$

Esso viene detto *quadrivettore posizione* degli eventi *nello spazio-tempo*. Notiamo che x_4 rappresenta la distanza percorsa dalla luce nel tempo t; la chiameremo talvolta anche *coordinata temporale*.

Quadrivettore posizione nello spazio-tempo

In termini del quadrivettore posizione nello spazio-tempo, mediante facili passaggi le trasformazioni di Lorentz [XI.11] possono essere poste nella forma

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma x_1 - \beta\gamma x_4 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_4 = -\beta\gamma x_1 + \gamma x_4 \end{cases} \quad \text{[XI.14.a]} \qquad \begin{cases} x_1 = \gamma x'_1 + \beta\gamma x'_4 \\ x_2 = x'_2 \\ x_3 = x'_3 \\ x_4 = \beta\gamma x'_1 + \gamma x'_4 \end{cases} \quad \text{[XI.14.b]}$$

dove, secondo notazioni usuali, abbiamo posto

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad \text{[XI.15]}$$

I coefficienti β e γ hanno le dimensioni fisiche di numeri puri.

Usando le notazioni matriciali introdotte nel par. II.3, le [XI.14] possono essere scritte anche nella forma:

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{[XI.16.a)}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \quad \text{[XI.16.b)}$$

ovvero, in forma più compatta:

$$\underline{x}' = A\underline{x} \quad \text{[XI.17.a]} \qquad \underline{x} = A^{-1}\underline{x}' \quad \text{[XI.17.b]}$$

dove $\underline{x}$ (e analogamente $\underline{x}'$) rappresenta la [XI.12] (disposta in riga o in colonna a seconda dei casi); A rappresenta la matrice che compare nella [XI.16.a] e A^{-1} (detta *trasformazione inversa*) la matrice che compare nella [XI.16.b].

Le [XI.11], le [XI.14] e le [XI.16] (tenendo conto delle definizioni [XI.15]) rappresentano dunque dei modi fra di loro equivalenti per scrivere le trasformazioni di Lorentz.

Consideriamo due eventi, E ed $\bar{E}$, le cui posizioni rispettive nello spazio tempo siano $\underline{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $\underline{\bar{x}} \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$. Il quadrato della distanza spaziale $\Delta\vec{s}$ fra i due eventi, calcolata usando il teorema di Pitagora, è:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 = (x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 + (x_3 - \bar{x}_3)^2 \quad \text{[XI.18]}$$

mentre il quadrato della loro «distanza temporale» $\Delta(ct) = \Delta x_4$ è:

$$(\Delta ct)^2 = (\Delta x_4)^2 = c^2(t - \bar{t})^2 \quad \text{[XI.19]}$$

Sia la distanza spaziale $\Delta\vec{s}$ che la distanza temporale Δct (e dunque anche i loro quadrati) sono quantità relative, cioè dipendenti dal sistema di riferimento in cui le si misura: ciò è conseguenza, rispettivamente, del fenomeno della contrazione delle lunghezze e del fenomeno della dilatazione dei tempi. Tuttavia è facile verificare che la quantità:

Invarianza della distanza spazio-temporale

$$(\Delta S)^2 = (\Delta s)^2 - (\Delta ct)^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta x_4^2 \quad \text{[XI.20]}$$

è invariante per trasformazioni di Lorentz; essa ha cioè lo stesso valore sia nel sistema $\sum'$ che nel sistema $\sum$. Si ha infatti, usando le [XI.14],

$$\begin{aligned}(\Delta S')^2 &= (\Delta x'_1)^2 + (\Delta x'_2)^2 + (\Delta x'_3)^2 - (\Delta x'_4)^2 = (\gamma\Delta x_1 - \beta\gamma\Delta x_4)^2 + (\Delta x_2)^2 + \\ &+ (\Delta x_3)^2 - (-\beta\gamma\Delta x_1 + \gamma\Delta x_4)^2 = \gamma^2(\Delta x_1)^2 + \beta^2\gamma^2(\Delta x_4)^2 - \\ &- 2\beta\gamma^2\Delta x_1\Delta x_4 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - \beta^2\gamma^2(\Delta x_1)^2 - \gamma^2(\Delta x_4)^2 + \\ &+ 2\beta\gamma^2\Delta x_1\Delta x_4 = \gamma^2(1-\beta^2)(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - \\ &- \gamma^2(1-\beta^2)(\Delta x_4)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - (\Delta x_4)^2 .\end{aligned}$$

avendo tenuto conto del fatto che $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$ come risulta dalle [XI.15].

La quantità $(\Delta S)^2$ è ciò che viene detto il *quadrato della distanza spazio-temporale fra i due eventi*, che dunque risulta essere lo stesso indipendentemente dal sistema di riferimento (inerziale) in cui ci si pone a misurarlo.

I due eventi hanno *distanza spazio-temporale nulla* quando $(\Delta S)^2 = 0$; in tal caso si ha, usando la [XI.20],

Distanza spazio-temporale nulla

$$(\Delta s)^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0$$

ovvero:

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2 = c^2$$

I due eventi si trovano cioè a una distanza spaziale Δs tale che il rapporto fra Δs e l'intervallo temporale Δt che li divide è pari alla velocità della luce. In altri termini, se i due eventi hanno distanza spazio-temporale nulla, un raggio luminoso che parta dalla posizione del primo evento quando questo si verifica giunge nella posizione del secondo evento esattamente quando quest'ultimo si verifica.

Va notato che contrariamente a quanto accade al quadrato della distanza spaziale Δs^2 (che è necessariamente positiva o nulla), il quadrato della distanza spazio-temporale ΔS^2 può assumere anche valori negativi. Più precisamente, risulta immediatamente dalla [XI.20] che quando $\Delta S > 0$ è $(\Delta s)^2 > c^2(\Delta t)^2$; e ciò accade quando la distanza spaziale Δs fra i due eventi è maggiore dello spazio $c\Delta t$ che la luce percorre nell'intervallo di tempo Δt che separa i due eventi.

Un segnale di luce emesso dal luogo del primo evento quando questo avviene, giunge sul luogo del secondo evento *dopo* che quest'ultimo è avvenuto; per conseguenza, non può esservi fra i due eventi alcuna relazione di causa-effetto. Quando $\Delta S^2 > 0$ si usa dire che la *distanza spazio-temporale* fra i due eventi è *di tipo spaziale*.

Distanza spazio-temporale di tipo spaziale

Al contrario, quando $\Delta S^2 < 0$ si dice che la distanza spazio-temporale fra i due eventi è *di tipo temporale*: un segnale luminoso emesso dal luogo del primo evento quando questo avviene giunge sul luogo del secondo *prima* che quest'ultimo avvenga, cosicché le modalità di questo possono essere influenzate dal primo evento.

Distanza spazio-temporale di tipo temporale

Discutiamo ora quale legge di trasformazione delle velocità discenda dalle equazioni di Lorentz come legge di trasformazione delle coordinate spazio-temporali.

Consideriamo dunque un oggetto che si muove con velocità $\vec{v}'$ nel riferimento mobile $\sum'$; ci proponiamo di trovare la relazione fra $\vec{v}'$ e la velocità $\vec{v}$ con cui l'oggetto è visto muoversi da un osservatore solidale col sistema $\sum$.

Per definizione, si ha:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v'_y = \frac{dy'}{dt'}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} \qquad v'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

Differenziando le [XI.11.b] si ha:

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
$$dy = dy'$$
$$dz = dz'$$
$$dt = \frac{dt' + (V/c^2)\, dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Dividendo ciascuna delle prime tre di queste relazioni per la quarta si ha:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + (V/c^2)\, dx'}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt' + (V/c^2)\, dx'}$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt' + (V/c^2)\, dx'}$$

e dividendo numeratore e denominatore per dt' si ottiene infine:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} \\ v_y = \dfrac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} \\ v_z = \dfrac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} \end{cases} \qquad \text{[XI.21.a]}$$

e analogamente:

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} \\ v'_y = \dfrac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2} \\ v'_z = \dfrac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2} \end{cases} \qquad \text{[XI.21.b]}$$

Notiamo che nel caso che sia $V/c << 1$ e $\dfrac{v_x}{c} << 1$, le [XI.21] si riducono alle [XI.3], cioè alla legge di somma delle velocità.

Principio della velocità limite

Quando tuttavia V si avvicina alla velocità c della luce, qualunque sia v' la velocità v si avvicina indefinitamente alla velocità c della luce senza mai superarla, come si verifica facilmente eseguendo nelle [XI.21] il limite per $V \to c$. Le [XI.21] contengono dunque anche quello che si chiama *principio della velocità limite*: come conseguenza del principio di relatività e del principio di costanza della velocità della luce (a partire dai quali principi in defi-

nitiva le [XI.21] sono state ricavate) segue l'impossibilità che, da qualunque sistema di riferimento, si possa osservare un oggetto (o un segnale) muoversi a velocità maggiore di quella della luce.

Il principio della velocità limite verrà esteso e generalizzato di qui a poco.

XI.4. Covarianza a vista delle leggi fisiche

Accettando i principi della relatività, è necessario modificare non solo i concetti di spazio e di tempo, come abbiamo visto nei precedenti paragrafi; ma occorre rivedere anche la definizione delle grandezze dinamiche e le relative leggi. Infatti le leggi della dinamica newtoniana classica non sono coerenti con tali principi: in altri termini, mentre esse sono covarianti per trasformazioni di Galileo (come abbiamo mostrato nel par. III.6), esse non sono per contro covarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Per convincersene, basta ad esempio calcolare (con procedimento analogo a quello da noi usato nel precedente paragrafo per il calcolo delle leggi [XI.21] di trasformazione delle velocità) le leggi di trasformazione dell'accelerazione: si troverà che l'accelerazione di un punto materiale *non è la stessa* in due diversi sistemi di riferimento inerziali, il che rende l'equazione [III.5] ($\vec{f} = m\vec{a}$) non covariante rispetto alle trasformazioni che le grandezze coinvolte nell'equazione subiscono passando da un sistema di riferimento all'altro. Del resto, come mostreremo nel prossimo paragrafo, nemmeno il terzo principio della dinamica, così come enunciato nel par. VI.2, risulta covariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz; ed anzi il nostro punto di partenza per stabilire le leggi della dinamica relativistica sarà proprio quello di scrivere la legge di conservazione della quantità di moto in forma covariante.

Per arrivare a ciò, cominciamo con l'enunciare in termini più generali i risultati raggiunti nel precedente paragrafo.

Consideriamo una quaterna di numeri:

$$\underline{a} \equiv (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

Condizione affinché essa costituisca le componenti di un quadrivettore è che passando da un sistema di riferimento inerziale a un altro essa si trasformi secondo le trasformazioni di Lorentz:

$$\underline{a}' = A\underline{a} \qquad \text{[XI.22]}$$

Ovvero, più esplicitamente:

$$a'_1 = \sum A_{ij} a_j \qquad \text{[XI.22.a]}$$

dove $A \equiv \{A_{ij}\}$ è la matrice di Lorentz

$$A \equiv \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{[XI.23]}$$

Un quadrivettore verrà da noi indicato da una lettera minuscola sottolineata $\underline{a}$; mentre useremo la nostra usuale notazione $\vec{a}$ per indicare i vettori tridimensionali (o spaziali).

Quadrivettore

Ad esempio la posizione spazio-temporale di un evento (eq. [XI.13]) è un quadrivettore. Considerato che la legge di trasformazione [XI.22] è una relazione lineare, segue immediatamente che la somma di due quadrivettori è un quadrivettore; formalmente, se $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sono quadrivettori, anche $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ è un quadrivettore. Infatti:

$$\underline{c}' = \underline{a}' + \underline{b}' = A\underline{a} + A\underline{b} = A(\underline{a} + \underline{b}) = A\underline{c} \qquad \text{[XI.24]}$$

relazione che dimostra l'asserto. Ad esempio la distanza spazio-temporale fra due eventi $\underline{\Delta S} = \underline{x}_1 - \underline{x}_2$ è un quadrivettore.

Anche la combinazione lineare di due quadrivettori:

$$\underline{d} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$$

costituisce un quadrivettore, a condizione che i coefficienti α e β siano invarianti passando da un riferimento all'altro, cioè siano invarianti per trasformazioni di Lorentz. La dimostrazione è del tutto analoga alla [XI.24].

Prodotto scalare di quadrivettori

Dati due quadrivettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$, si definisce il loro prodotto scalare $S = \underline{a} \cdot \underline{b}$ mediante la relazione:

$$S = \underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4 \qquad \text{[XI.25]}$$

In particolare, se $\underline{a} = \underline{b}$ si ottiene il modulo quadrato (prodotto scalare per sé stesso) del quadrivettore $\underline{a}$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 \qquad \text{[XI.26]}$$

Il prodotto scalare fra due quadrivettori (e dunque in particolare il modulo quadrato di un quadrivettore) è invariante relativistico, cioè non cambia per trasformazioni di Lorentz: la dimostrazione è del tutto identica alla dimostrazione di invarianza della distanza spazio-temporale di due eventi (eq. [XI.20]). Un invariante relativistico è detto anche uno *scalare spazio-temporale*.

Scalare spazio-temporale

Come abbiamo già visto nel caso particolare della distanza spazio-temporale fra due eventi, il modulo quadrato di un quadrivettore non è necessariamente positivo. Quando esso è positivo il vettore si dice di tipo spaziale; quando è negativo esso è di tipo temporale.

Ciò premesso ricordiamo che condizione necessaria e sufficiente *affinché una legge fisica* (espressa in termini di una equazione che lega fra di loro due membri) *sia coerente con i principi della relatività di Einstein* è che i suoi membri siano covarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz. In base a quanto fin qui detto, risulta che affinché ciò accada è sufficiente che i suoi membri siano esprimibili entrambi attraverso le stesse operazioni (con coefficienti scalari) eseguite su quadrivettori.

Condizioni per la covarianza

In particolare, è certamente covariante (*covariante a vista*) una legge espressa come uguaglianza fra due quadrivettori. Supponiamo ad esempio che una legge sia scritta nella forma

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c} + \underline{d} \qquad \text{[XI.27]}$$

Se $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ e $\underline{d}$ sono quadrivettori (e solo in tal caso), moltiplicando ambo i membri dell'equazione [XI.27] per la matrice di Lorentz A si ottiene:

$$\underline{a}' + \underline{b}' = \underline{c}' + \underline{d}'$$

L'equazione è dunque covariante per trasformazioni di Lorentz. Notiamo che l'equazione [XI.27] riassume in se quattro equazioni, una per ciascuna componente spazio-temporale:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 = c_2 + d_2 \\ a_3 + b_3 = c_3 + d_3 \\ a_4 + b_4 = c_4 + d_4 \end{cases}$$

Passando ad un altro sistema di riferimento inerziale, il valore dei due membri di queste equazioni cambia; ma cambia allo stesso modo per entrambi i membri, cosicché la validità delle quattro equazioni resta preservata.

Solo qualora una legge sia espressa in termini dell'uguaglianza fra due scalari spazio-temporale, essa risulta non solo covariante, ma addirittura invariante per trasformazioni di Lorentz.

Queste considerazioni di carattere generale saranno utilizzate nei prossimi paragrafi per stabilire le leggi della dinamica della relatività ristretta di Einstein.

XI.5. Il terzo principio della dinamica e il quadrivettore momento lineare

Consideriamo il più semplice dei sistemi materiali, costituito da due oggetti puntiformi di masse rispettive m_1 ed m_2. Se il sistema è isolato, la meccanica newtoniana classica ci dice (per conseguenza del suo terzo principio) che la quantità di moto totale del sistema deve rimanere costante nel tempo. Se ad esempio le due particelle subiscono un urto, potremo scrivere:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m\vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \qquad \text{[XI.28]}$$

dove $\vec{v}_{1i}$ e $\vec{v}_{2i}$ sono le velocità dei punti prima dell'urto e $\vec{v}_{1f}$ e $\vec{v}_{2f}$ le loro velocità dopo l'urto. La [XI.28] riassume in sé tre relazioni scalari, rappresentate dalle proiezioni di tale equazione sugli assi coordinati.

Secondo quanto abbiamo visto nel precedente paragrafo, ci aspettiamo che nella teoria della relatività la [XI.28] – che come ogni legge deve essere covariante per trasformazioni di Lorentz – sia sostituita da una relazione fra quadrivettori. Ciò non significa tuttavia che si debba semplicemente affiancare alla [XI.28] una quarta relazione: infatti la quantità di moto classica $\vec{q} = m\vec{v}$ (e dunque anche ciascun membro della [XI.28]) non costituisce la parte spaziale di un quadrivettore spazio-temporale. Per convincersene basta considerare che la massa m è, in meccanica classica, un invariante, e quindi affinché le componenti di $\vec{q}$ fossero componenti spaziali di un quadrivettore spazio-temporale tali dovrebbero essere le componenti di $\vec{v}$; mentre la velocità $\vec{v} \equiv \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ è il rapporto fra le componenti spaziali di un

quadrivettore e la quantità dt che non è un invariante relativistico (non è cioè invariante per trasformazioni di Lorentz: vedi eq. [XI.7]). A conferma di ciò, usando le [XI.21] è possibile verificare con relativa facilità che l'equazione [XI.28] non è covariante per trasformazioni di Lorentz: cioè se $m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$ nel sistema di riferimento $\sum$, è in generale $m_1\vec{v}'_{1i} + m_2\vec{v}'_{2i} \neq m_1\vec{v}'_{1f} + m_2\vec{v}'_{2f}$ nel sistema di riferimento $\sum'$.

Al fine di rendere relativisticamente covariante l'enunciato del III principio della dinamica è pertanto necessario modificare la definizione della grandezza fisica quantità di moto.

Quadrivettore momento lineare o impulso-energia

Considerata dunque una particella P, definiamo per essa il quadrivettore *momento lineare* (detto anche quadrivettore *impulso-energia*) mediante la relazione:

$$\underline{p} \equiv \left(m_0\frac{dx_1}{dt_0},\ m_0\frac{dx_2}{dt_0},\ m_0\frac{dx_3}{dt_0},\ m_0\frac{dx_4}{dt_0}\right) \qquad [XI.29]$$

Massa a riposo

dove (x_1, x_2, x_3, x_4) è la posizione spazio-temporale di P; m_0 è la massa della particella misurata in un riferimento solidale con la particella stessa (*massa a riposo*); e dt_0 è il differenziale del tempo proprio, cioè del tempo misurato da un orologio solidale con la particella. Che la quantità p definita dalla equazione [XI.29] sia un quadrivettore è evidente: infatti il differenziale $\underline{dx} \equiv (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)$ è un quadrivettore (essendo il differenziale di un quadrivettore); mentre m_0 e dt_0 sono invarianti relativistici per definizione, essendo misurati, qualunque sia il sistema $\sum$, nel sistema di riferimento solidale col punto P. Tenuto conto della relazione [XI.7], il differenziale del tempo proprio dt_0 può essere scritto come

$$dt_0 = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

dove v è la velocità della particella (rispetto a $\sum$) e dt è il differenziale del tempo misurato in $\sum$. Sostituendo nella [XI.29] si ha:

$$\underline{p} \equiv \left(m\frac{dx_1}{dt},\ m\frac{dx_2}{dt},\ m\frac{dx_3}{dt},\ m\frac{dx_4}{dt}\right) \qquad [XI.30]$$

in cui

$$m = m_0\gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad [XI.31]$$

La [XI.30] può anche essere scritta nella forma

$$\underline{p} \equiv (m\vec{v}, mc) \equiv (\vec{p}, mc) \qquad [XI.32]$$

dove $\vec{v} \equiv \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right)$ è la velocità del punto misurata in $\sum$; mentre l'espressione $p_4 = mc$ per la quarta componente del quadrivettore p segue dalla [XI.30], considerato che per definizione $x_4 = ct$ (vedi eq. [XI.13]).

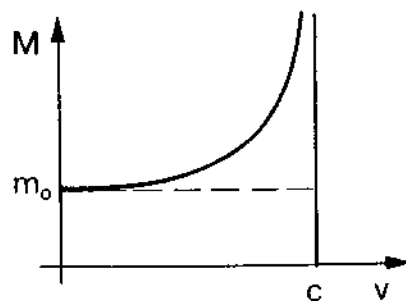
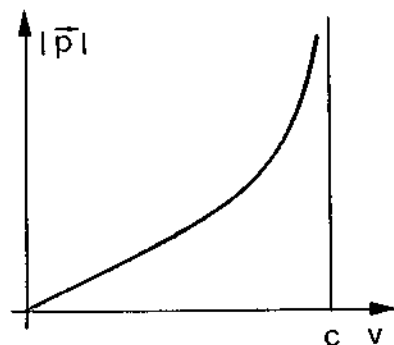
Enunciato relativisticamente covariante del III principio

Per essere scritto in forma relativisticamente covariante, il III principio della dinamica verrà dunque posto nella forma:

$$\underline{p_i} = \underline{p_{1i}} + \underline{p_{2i}} = \underline{p_{1f}} + \underline{p_{2f}} = \underline{p_f} \qquad [XI.33]$$

anziché nella forma [XI.28].

Questo enunciato, relativisticamente covariante, del III principio della dinamica comporta (come si vede dalla [XI.31] e dalla [XI.32]), le seguenti differenze rispetto all'enunciato newtoniano classico [XI.28]:

a) La massa della particella $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ risulta essere dipendente dalla velocità v della particella. Nel limite $v/c << 1$ la massa relativistica m coincide, come deve, con la massa classica m_0 (cioè con la massa a riposo). Ma nel limite $v \rightarrow c$ (cioè $v/c \rightarrow 1$) la massa relativistica m tende all'infinito. L'andamento di m in funzione di v è quello mostrato qualitativamente nella prima figura. Nella seconda figura è mostrato, sempre in funzione di v, l'andamento del modulo $|\vec{p}|$ della parte spaziale del momento lineare della particella. Questo andamento mostra che comunque grande sia $|\vec{p}|$ (cioè comunque grande sia il modulo dell'impulso spaziale comunicato alla particella), la sua velocità $\vec{v}$ si avvicina indefinitamente (senza mai superarla) alla velocità c della luce. Nel prossimo paragrafo vedremo che, analogamente, anche all'aumentare dell'energia della particella, la sua velocità v si approssima a c senza mai superarla (principio della velocità limite).

b) Alla conservazione delle componenti spaziali $\vec{p} = m\vec{v}$ del momento lineare (legge di conservazione che sostituisce la conservazione della quantità di moto classica $\vec{q} = m_0\vec{v}$), va affiancata anche la legge di conservazione della quarta componente p_4 del quadrivettore momento lineare. Il significato fisico di questa legge di conservazione verrà discusso nel prossimo paragrafo.

Osserviamo che, così come accade per qualunque quadrivettore, il modulo quadrato p^2 del momento lineare di una particella è un invariante relativistico. Usando la [XI.32] e la [XI.31] si ricava immediatamente

$$p^2 = |\vec{p}|^2 - p_4^2 = -m_0^2c^2 \qquad \text{[XI.34]}$$

Osserviamo inoltre che dalla [XI.32], facendo il rapporto fra la sua parte spaziale $\vec{p}$ e la sua componente temporale p_4, si ottiene:

$$\frac{\vec{p}}{p_4} = \frac{\vec{v}}{c}; \quad \text{ovvero} \quad v = \frac{\vec{p}c}{p_4} \qquad \text{[XI.35]}$$

relazione che esprime la velocità di una particella in funzione delle componenti del suo quadrivettore momento lineare.

XI.6. Massa ed energia

Consideriamo, nel sistema di riferimento $\sum$, una particella P di massa a riposo m_0. Se essa è isolata, il suo quadrivettore momento lineare p si conserva in virtù della [XI.33].

Consideriamo però ora il caso che essa non sia isolata, cioè che su essa agisca una forza $\vec{F}$ che compie lavoro fornendole energia; ci aspettiamo allora che il suo momento lineare vari. Supponiamo che la particella sia priva di struttura interna. La sua massa a riposo m_0 è allora costante nel tempo; e l'energia ad essa comunicata non può che tradursi in energia di movimento.

Tenuto conto della [XI.34], deve allora sussistere una precisa relazione fra le variazioni della parte spaziale $\vec{p}$ e della componente temporale p_4 di $\underline{p}$;

e sarà proprio l'analisi di questa relazione che ci consentirà di dare l'interpretazione fisica di p_4.

Differenziamo dunque la [XI.34]; si ottiene:

$$\vec{p} \cdot d\vec{p} - p_4 dp_4 = 0$$

Dividendo questa relazione per p_4 e tenendo presente la [XI.35] si ha:

$$\frac{\vec{v}}{c} \cdot d\vec{p} = dp_4 \qquad \text{[XI.36]}$$

In meccanica classica, fra la forza $\vec{F}$ e la derivata temporale $\frac{d\vec{p}}{dt}$ della parte spaziale di p sussiste la relazione di uguaglianza $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$; da cui $d\vec{p} = \vec{F}dt$. Se ipotizziamo che questa relazione continui a definire operativamente l'impulso di una forza anche in relatività, sostituendo $\vec{F} \cdot dt$ al posto di $d\vec{p}$ nella [XI.36] e moltiplicandone ambo i membri per c otteniamo:

$$\vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = c\, dp_4 \qquad \text{[XI.37]}$$

Il primo membro di questa equazione rappresenta il lavoro elementare compiuto dalla forza $\vec{F}$ che agisce sul punto e dunque la quantità elementare di energia fornita alla particella. La [XI.37] ci dice dunque che il differenziale $c\,dp_4$ deve rappresentare il differenziale dE dell'energia totale E posseduta dalla particella:

$$dE = c\,dp_4$$

da cui segue

$$E = p_4 c \qquad \text{[XI.38]}$$

più una eventuale costante, a meno della quale l'energia è sempre definita; costante che per semplicità porremo uguale a zero. Tenendo conto che $p_4 = mc$, la [XI.38] diviene:

$E = mc^2$

$$\boxed{E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \qquad \text{[XI.39]}$$

che costituisce una delle leggi più famose della fisica moderna; legge sulla cui interpretazione fisica torneremo fra poco.

In definitiva, tenendo conto delle conclusioni finora raggiunte, il quadrivettore momento lineare $\underline{p}$ di una particella può essere scritto come:

Quadrivettore impulso-energia

$$\underline{p} \equiv \left(\vec{p}, \frac{E}{c}\right) \equiv \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \qquad \text{[XI.40]}$$

Ciò giustifica anche il nome di *quadrivettore impulso-energia* che sovente si usa per il quadrivettore momento lineare. Va notato che coerentemente con la [XI.39] l'energia $E = p_4 c$ di una particella è una quantità necessariamente positiva.

Usando la [XI.40], la massa a riposo della particella può essere scritta nella forma

$$m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\bar{p}|^2 = -p^2 \qquad \text{[XI.41]}$$

Approfondiamo ora il significato fisico dei risultati fin qui ottenuti, discutendo le conseguenze che essi hanno su alcuni esperimenti significativi.

Consideriamo una particella inizialmente ferma. Applichiamo ad essa una forza $\bar{F}$ che, compiendo lavoro, comunica ad essa energia via via crescente (è quanto accade normalmente negli acceleratori di particelle).

Integrando la [XI.37] fra l'istante iniziale e l'istante generico t abbiamo:

$$\int_{t_0}^{t} \bar{F} \cdot \bar{v}\, dt = [p_4 c]_{t_0}^{t}$$

Il primo membro di questa equazione rappresenta il lavoro L compiuto dalla forza $\bar{F}$ agente nella particella; mentre il secondo membro, in accordo con la [XI.38], rappresenta la differenza fra l'energia E che la particella ha acquisito all'istante t e l'energia E_0 che essa aveva inizialmente (all'istante t_0). Pertanto:

$$L = E - E_0$$

Teniamo ora conto della [XI.39]. Considerato che la particella ha inizialmente velocità nulla, e detta v la sua velocità all'istante t, si ha:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad E_0 = m_0 c^2$$

e dunque la relazione precedente diviene:

$$L = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 \qquad \text{[XI.42]}$$

Questa relazione sostituisce, in relatività, il teorema dell'energia cinetica [IV.42]; teorema che scritto in relazione al nostro presente esempio assume nella meccanica classica la forma:

$$L = K - K_0 = \frac{1}{2} m_0 v^2 - \frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 \qquad \text{[XI.43]}$$

avendo tenuto conto del fatto che la velocità iniziale v_0 è nulla.

Confrontando la [XI.42] con la [XI.43] notiamo che la relazione fra il lavoro L (e dunque l'energia acquisita dalla particella) e la velocità v della particella stessa è, nei due casi, profondamente diversa. In meccanica classica la velocità al quadrato v^2 della particella aumenta, a partire dalla quiete, proporzionalmente ad L. Dalla [XI.43] segue infatti:

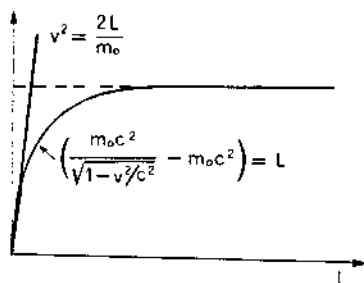
$$v^2 = \frac{2L}{m_0} \qquad \text{[XI.44]}$$

Al contrario in relatività, eq. [XI.42], non vi è proporzionalità fra L e v^2.

Per meglio vedere la relazione relativistica fra L e v^2 sviluppiamo in serie rispetto a $\frac{v}{c}$ la relazione $E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$; si ottiene immediatamente:

$$E = m_o c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots\right) \qquad [XI.45]$$

Sostituendo nella [XI.42] si ha:

$$L = \frac{1}{2} m_o v^2 + \frac{3}{8}\frac{m_o}{c^2} v^4 + \dots \qquad [XI.46]$$

Questa relazione sostituisce, nella teoria della relatività, la [XI.42] (ovvero la [XI.44]). Nella figura, è riportato l'andamento di v^2 in funzione dell'energia L comunicata alla particella, così come previsto dalla meccanica classica (eq. [XI.44]) e dalla teoria della relatività (eq. [XI.46]).

Principio della velocità limite e sue conferme sperimentali

Come si vede, l'andamento relativistico mostra ancora una volta che la velocità v non può superare la velocità c della luce. Che una particella di alta energia (per la quale sia $E >> E_o$, cioè $mc^2 >> m_o c^2$; il che comporta $\gamma >> 1$) segua in effetti l'andamento relativistico [XI.46] e non l'andamento classico [XI.44], è un fatto che viene ogni giorno confermato nei laboratori dove sono in funzione acceleratori di particelle.

Un'altra conseguenza assai rilevante della [XI.39] è la completa equivalenza fra massa ed energia. Il significato di questa equivalenza può essere ben compreso analizzando il caso di due particelle, P_1 e P_2, che interagiscono fra di loro (ad esempio, ma non necessariamente, tramite un urto). Siano $\underline{p}_1$ e $\underline{p}_2$ i quadrivettori momento lineare delle due particelle. Se le due particelle interagiscono solo fra loro (nel complesso esse sono un sistema isolato), il III principio della dinamica (eq. [XI.33]) impone che:

$$\underline{p}_{1i} + \underline{p}_{2i} = \underline{p}_{1f} + \underline{p}_{2f}$$

ovvero, separando la parte spaziale $\vec{p}$ del quadrimomento dalla sua quarta componente $p_4 = \frac{E}{c}$:

$$\begin{cases} \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = \vec{p} \\ \frac{E_{1i}}{c} + \frac{E_{2i}}{c} = \frac{E_{1f}}{c} + \frac{E_{2f}}{c} = \frac{E}{c} \end{cases} \qquad [XI.47]$$

Sistema del centro di massa

Ovviamente, ciò che deve conservarsi è ciascuna componente della somma $\underline{p} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2$, e non ciascuna componente di $\underline{p}_1$ e $\underline{p}_2$ separatamente. Per semplicità, supponiamo di esserci posti nel sistema di riferimento in cui $\vec{p} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = 0$ (ma sia $\vec{p}_{1i} = -\vec{p}_{2i} \neq 0$). Per definizione, così come in meccanica classica, questo sistema è detto sistema del centro di massa.

È allora possibile, senza violare la legge di conservazione [XI.47], che dopo l'urto sia $\vec{p}_{1f} = \vec{p}_{2f} = 0$ (urto completamente anelastico). Dopo l'urto le particelle costituiscono allora un'unica particella di momento tridimensionale $\vec{p} = 0$ e di energia

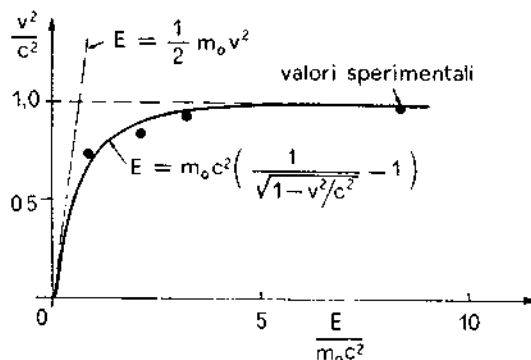
$$E = E_{1f} + E_{2f} = E_{1i} + E_{2i} \qquad [XI.48]$$

RIPROVE SPERIMENTALI DELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

La teoria della relatività ristretta, le cui leggi fondamentali vengono presentate in questo capitolo, ha ricevuto innumerevoli verifiche sperimentali dirette e indirette: limitiamoci qui a ricordarne alcune.

Il principio della velocità limite

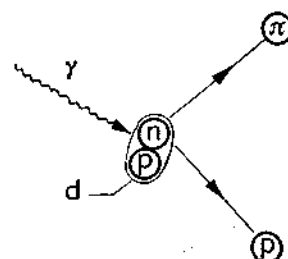
Come abbiamo accennato nel testo, il funzionamento stesso delle macchine acceleratrici di particelle, e in particolare di quelle circolari, fornisce una accurata verifica di questo principio. In virtù di un campo magnetico, le particelle compiono in questi acceleratori una traiettoria approssimativamente circolare: e benché nelle macchine di alta energia l'energia E raggiunta dalle particelle possa essere di decine di migliaia di volte superiore rispetto all'energia a riposo m_0c^2, si riscontra che il tempo impiegato a percorrere l'orbita non supera mai il valore asintotico dato dal tempo necessario per percorrere l'orbita stessa alla velocità della luce.

I risultati di un esperimento didattico, meno preciso ma dimostrativo, sono mostrati in figura. Con un acceleratore lineare, viene comunicata ad elettroni l'energia E, graficata in ascisse mediante il rapporto $\frac{E}{m_0c^2}$; e la velocità v raggiunta dagli elettroni viene misurata rilevando il tempo da essi impiegato a percorrere lo spazio compreso fra due traguardi rappresentati da contatori di particelle. Graficando i valori di v^2/c^2 così ottenuti come funzione di $\frac{E}{m_0c^2}$, si ottengono i valori sperimentali indicati in figura, che sono in buon accordo con le previsioni della teoria relativistica, ma non con quelli della meccanica classica. Questo esperimento è stato eseguito da W. Bertozzi (*American Journal of Physics*, *322*, 551 (1964)).

Equivalenza fra massa ed energia

L'equivalenza fra massa ed energia è stata verificata in una grande varietà di processi. In molte reazioni nucleari, generate bombardando un bersaglio con particelle di alta energia, si ha la produzione di particelle che non erano presenti nello stato iniziale; e in molti casi la somma delle masse a riposo delle particelle presenti nello stato finale è maggiore rispetto alla somma delle masse delle particelle presenti nello stato iniziale, l'eccesso di massa essendo stato prodotto a spese dell'energia cinetica del proiettile.

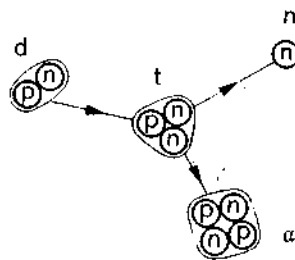
Una tra le innumerevoli reazioni di questo tipo è quella mostrata schematicamente in figura. Il bersaglio è formato da deuterio il cui nucleo (deutone, d) è formato da un protone e un neutrone legati insieme. Nell'urto ad opera di un fotone di alta energia (ad esempio 1000 milioni di elettronvolt, un elettronvolt essendo l'energia che acquista un elettrone quando attraversa la differenza di potenziale di 1 Volt), il neutrone viene strappato e rincula dopo essere stato trasformato in protone, mentre nell'urto è stato prodotto anche un mesone π negativo che emerge a sua volta dalla reazione con elevata energia cinetica. La massa a riposo presente nello stato finale è maggiore rispetto a quella presente nello stato iniziale, considerato che è comparso un mesone π che non era presente nello stato iniziale, e che ha massa che è circa il 15% rispetto a quella del protone (o del neutrone).

In molte razioni nucleari si ha trasformazione di energia potenziale di legame in massa, o viceversa. Ad esempio unendo un deutone e un nucleo di trizio (costituito da due neutroni e un protone) è possibile ottenere un nucleo di Elio (detto particella α, formata da due protoni e due neutroni) più un neutrone. Questa reazione, che avviene solo se le particelle presenti nello stato iniziale sono portate ad altissima temperatura (centinaia di milioni di gradi) è detta *fusione nucleare*.

La massa delle particelle presenti nello stato finale è minore di circa il 4 per mille rispetto a quella delle particelle nello stato iniziale: ciò è dovuto al fatto che nel nucleo di elio protoni e neutroni sono più strettamente

legati che non nel deutone e nel trizio (e come visto alla fine del par. V.2 l'energia di legame è negativa) e questa minore energia totale del sistema corrisponde secondo la [IV.39] a una sua minore massa. Poiché il sistema nello stato finale ha massa a riposo m_f minore rispetto alla massa m_i del sistema nello stato iniziale (difetto di massa $\Delta m = m_i - m_f$), per la conservazione dell'energia le particelle nello stato finale devono essere dotate di energia cinetica E_T che secondo la [IV.39] è data da

$$E_T = \Delta m\, c^2$$

Benché Δm sia percentualmente modesto rispetto alle masse in gioco, in virtù del fattore c^2 l'energia cinetica liberata è molto grande; in effetti la reazione di fusione nucleare è quella che alimenta il sole, ed è anche quella su cui si basano le bombe nucleari H. La fusione nucleare controllata, allo scopo di usare questa fonte di energia a scopo pacifico, non è stata invece ancora realizzata.

Un analogo meccanismo di liberazione di energia cinetica, a spese di un difetto di massa, si ha nella reazione di *fissione nucleare* in cui un nucleo pesante (ad esempio Uranio) si spezza in frammenti più leggeri: la massa del nucleo presente nello stato iniziale è maggiore della somma delle masse nello stato finale e la differenza si trasforma in energia cinetica. La fissione nucleare è il processo alla base dei reattori nucleari usati per gli usi pacifici dell'energia nucleare; e sulla stessa forma di energia erano basate anche le prime bombe atomiche che hanno distrutto Hiroshima e Nagasaki.

Dilatazione del tempo

Abbiamo appena visto un esempio di reazione nucleare in cui viene prodotto un mesone π. Questa particella, come la maggior parte delle particelle subatomiche, è instabile; dopo un tempo medio caratteristico di ogni particella (nel caso di un mesone π a riposo tale tempo medio, detto *vita media*, è dell'ordine di dieci nanosecondi, cioè di dieci miliardesimi di secondo) essa muore, decadendo in particelle diverse. Il mesone π decade in un neutrino (stabile) e in un μ; e quest'ultimo, dopo una vita media di poco più di un microsecondo (milionesimo di secondo) decade a sua volta in tre particelle stabili più leggere (un elettrone e due neutrini). Lo studio della vita media τ delle particelle instabili, e l'osservazione che τ dipende dalla velocità con cui la particella si muove rispetto all'osservatore, fornisce una ottima evidenza sperimentale del fenomeno della dilatazione relativistica del tempo. Al riguardo, riportiamo qui la descrizione dei risultati di osservazioni eseguite non su un fenomeno artificialmente generato in laboratorio, bensì su un fenomeno naturale.

Se un contatore di particelle viene posto a livello del suolo, si trova che esso rivela il passaggio di un certo numero di particelle: ad esempio uno scintillatore di 1 m² di superficie disposto orizzontalmente segnala circa 10.000 particelle al minuto. Ad una analisi approfondita con opportune tecniche, tali particelle risultano essere soprattutto μ. Essi derivano da protoni di alta energia generati nello spazio cosmico da fenomeni stellari: questi protoni, interagendo con l'alta atmosfera, producono una valanga di mesoni π che, decadendo, danno origine ai μ. Ora è facile calcolare che anche muovendosi alla velocità della luce una particella non può percorrere, in un microsecondo, che qualche centinaio di metri. Come possono allora le particelle μ attraversare, prima di morire, i molti chilometri che separano l'alta atmosfera, in cui vengono generati, dal contatore che li rivela a livello del suolo? Il fenomeno è interpretabile solo in base alla dilatazione relativistica del tempo: per l'osservatore fermo rispetto all'atmosfera, i μ si muovono infatti a velocità v prossima a quella c della luce; e dunque la loro vita media è dilatata di un fattore $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, e grazie a questa dilatazione essi possono compiere, prima di morire, un percorso di diversi chilometri.

Al riguardo di questa conclusione viene spontanea la seguente obiezione: immaginiamo di porci dal punto di vista di un μ, cioè di essere un immaginario osservatore che si è posto a cavallo di uno di questi μ. Rispetto a questo osservatore, il μ è fermo e dunque vive poco più di un microsecondo: come può attraversare in tale breve tempo molti chilometri di atmosfera? Ma la risposta è semplice: rispetto a questo osservatore, solidale col μ, si muove l'atmosfera (con velocità uguale e opposta a quella con cui nel laboratorio si muove il μ); e dunque lo spessore dell'atmosfera subisce il fenomeno della contrazione delle lunghezze. Rispetto al μ, l'atmosfera appare spessa non già molti chilometri, ma poche centinaia di metri; e dunque può essere attraversata nel microsecondo o poco più che rappresenta la vita media a riposo del μ. L'abbondanza di mesoni μ a livello del suolo rappresenta dunque, a seconda dei punti di vista, una riprova del fenomeno della dilatazione del tempo ovvero del fenomeno della contrazione delle lunghezze.

Poiché questa particella ha, nel sistema di riferimento scelto, $\vec{p} = 0$, essa secondo la [XI.32] ha anche, in quel sistema di riferimento, velocità $\vec{v}$ nulla. Tutta la sua energia [XI.48] è pertanto energia di riposo; coerentemente con la [XI.39] la massa a riposo di questa particella è

$$m_o = \frac{E}{c^2} = \frac{E_{1i} + E_{2i}}{c^2}. \qquad [XI.49]$$

Prima dell'urto, la massa a riposo del sistema era pari alla somma delle masse a riposo m_{o1} ed m_{o2} delle particelle interagenti. Usando la [XI.41] si ha pertanto:

$$m_{o1} + m_{o2} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{E_{1i}^2}{c^2} - |\vec{p}_{1i}|^2} + \frac{1}{c}\sqrt{\frac{E_{2i}^2}{c^2} - |\vec{p}_{2i}|^2} \leq \frac{E_{1i}}{c^2} + \frac{E_{2i}}{c^2} = m_o$$

dove il segno di uguale vale solo se $\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{2i} = 0$, cioè se anche inizialmente le particelle erano ferme. A meno di questo caso, nell'urto anelastico ipotizzato la massa a riposo m_o della particella finale è maggiore della somma delle masse a riposo m_{o1} ed m_{o2} delle particelle iniziali: quella che era inizialmente energia di movimento si è trasformata in energia a riposo, cioè sostanzialmente in massa (a meno del fattore c^2).

Naturalmente è anche possibile il fenomeno inverso, in cui massa si trasforma in energia. Se va persa una quantità $\bar{m}$ di massa a riposo, si libera una quantità di energia $\bar{E}$ pari a $\bar{E} = \bar{m}c^2$.

Queste conclusioni sono state sottoposte a un gran numero di riprove sperimentali. La più famosa (e la più tragica) verifica della trasformazione di massa in energia è venuta dalla distruzione di Hiroshima e Nagasaki.

XI.7. Cinematica relativistica degli urti

La cinematica dell'urto fra due particelle è correttamente descritta dalle equazioni classiche presentate nel capitolo VIII solo se l'energia delle particelle è piccola rispetto alla loro energia a riposo, cioè se per ciascuna di esse è $\bar{m}c^2 << m_o c^2$; il che comporta (vedi eq. [XI.39]) $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} << 1$.

In caso contrario, cioè se per almeno una delle particelle coinvolte nell'urto è $\gamma \geq 1$, è necessario ricorrere alle equazioni della meccanica relativistica. Poiché ciò non comporta alcuna difficoltà concettuale, dedichiamo al problema, a titolo illustrativo, questo breve paragrafo.

Coerentemente con quanto fin qui detto, l'equazione fondamentale per la descrizione dell'urto è l'equazione [XI.33] che esprime la conservazione del quadrivettore momento lineare totale del sistema; equazione che riscriviamo qui per comodità

$$\underline{p}_{1i} + \underline{p}_{2i} = \underline{p}_{1f} + \underline{p}_{2f} \qquad [XI.33]$$

Ciascuna delle grandezze che compare in questa equazione è un quadrivettore momento lineare (indichiamo il generico di essi semplicemente con $\underline{p}$ senza indici); e in quanto tale gode di un certo numero di proprietà di cui qui riassumiamo per comodità quelle che ci servono.

a) Passando da un sistema di riferimento inerziale $\sum$ a un altro sistema inerziale $\sum'$, $\underline{p}$ si trasforma secondo le equazioni di Lorentz:

$$\left| \begin{array}{ll} p'_x & = \dfrac{\left(p_x - \dfrac{V}{c} \cdot \dfrac{E}{c}\right)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma \left(p_x - \beta \dfrac{E}{c}\right) \\ p'_y & = p_y \\ p'_z & = p_z \\ \dfrac{E'}{c} & = \dfrac{E/c - \dfrac{V}{c} p_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma \left(\dfrac{E}{c} - \beta p_x\right) \end{array} \right. \qquad \text{[XI.50]}$$

Dove: V è la velocità di $\sum'$ rispetto a $\sum$ (supposta parallela all'asse x)

$$\beta = V/c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \, .$$

Nello scrivere le [XI.50] abbiamo tenuto conto del significato fisico delle quattro componenti di $\underline{p}$, così come riassunto nell'eq. [XI.40]).

b) Il modulo quadrato di $\underline{p}$ è un invariante relativistico, che descrive la massa a riposo della particella (o del sistema) considerato:

$$m_0 c^2 = -p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 \qquad \text{[XI.51]}$$

c) La velocità $\vec{v}$ di ogni particella può essere immediatamente calcolata una volta note le quattro componenti di $\underline{p} \equiv (\vec{p}, E/c)$; facendo infatti il rapporto fra la parte spaziale e la componente temporale della [XI.40] si ricava immediatamente:

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{c\vec{p}}{E} \qquad \text{[XI.52]}$$

In particolare, facendo il modulo del vettore (spaziale) [XI.52] si ha:

$$\beta = \left|\frac{\vec{v}}{c}\right| = \frac{c|\vec{p}|}{E} \qquad \text{[XI.53]}$$

Ritorniamo ora al nostro problema d'urto, e vediamo come possiamo usare l'equazione [XI.33] per ricavare informazioni di nostro interesse. Notiamo che essa riassume in sé quattro equazioni (una per ciascuna componente); mentre le incognite del problema (se sono note le condizioni iniziali $\underline{p}_{1i}$ e $\underline{p}_{2i}$, e si vuole determinare la cinematica finale) sono le otto componenti di $\underline{p}_{1f}$ e $\underline{p}_{2f}$. Rispetto al caso classico, si hanno dunque due incognite in più; infatti le masse delle particelle emergenti dall'urto, che nel caso classico sono necessariamente uguali alle masse prima dell'urto, nel caso relativistico possono essere (e sono sovente) diverse.

Come nel caso classico, le manipolazioni dell'eq. [XI.33] vengono notevolmente semplificate se ci si pone nel sistema di riferimento $\sum_c$ del centro

di massa. Cominciamo col calcolare la velocità $\beta_c = \frac{V_c}{c}$ del sistema $\sum_c$ rispetto al sistema $\sum$ del laboratorio. Supponiamo per semplicità che le particelle si muovano inizialmente lungo l'asse x.

Detto $\underline{p}_i \equiv \left(\vec{p}_i, \frac{E_i}{c}\right) \equiv \left(\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}, \frac{E_{1i} + E_{2i}}{c}\right)$ il quadrivettore al primo membro della [XI.33] nel sistema $\sum$ (quadrivettore momento iniziale totale del sistema), nel sistema $\sum_c$ del centro di massa tale quadrivettore, usando le [XI.50], si trasforma in:

$$\begin{cases} p_x^{(c)} = \gamma_c\left(p_{ix} - \beta_c \frac{E_i}{c}\right) \\ p_y^{(c)} = p_{iy} = 0 \\ p_z^{(c)} = p_{iz} = 0 \\ \frac{E^{(c)}}{c} = \gamma_c\left(\frac{E_i}{c} - \beta_c p_{ix}\right) \end{cases} \quad \text{[XI.54]}$$

avendo tenuto conto del fatto che le particelle si muovono inizialmente lungo l'asse x (per cui $p_{iy} = p_{iz} = 0$). D'altra parte il sistema del centro di massa è definito come quel sistema in cui la parte spaziale del momento lineare totale è nulla; condizione che, nelle [XI.54], si traduce in $p_x^{(c)} = 0$, cioè:

$$\gamma_c\left(p_{ix} - \beta_c \frac{E_i}{c}\right) = 0$$

da cui

$$\beta_c = \frac{V_c}{c} = \frac{c p_{ix}}{E_i} = \frac{c(p_{1ix} + p_{2ix})}{E_{1i} + E_{2i}} \quad \text{[XI.55]}$$

La velocità del centro di massa nel sistema $\sum$ del laboratorio si ottiene come rapporto fra la componente x del momento lineare totale del sistema e la sua energia totale.

Velocità del centro di massa

Una volta calcolata la velocità del centro di massa le [XI.50] ci consentono di calcolare il momento lineare $\underline{p}_{1i}^{(c)}$ e $\underline{p}_{2i}^{(c)}$ delle particelle nel sistema $\sum_c$ del centro di massa:

$$\underline{p}_{1i}^{(c)} \equiv \left(\vec{p}_{1i}^{(c)}, \frac{E_{1i}^{(c)}}{c}\right); \qquad \underline{p}_{2i}^{(c)} \equiv \left(\vec{p}_{2i}^{(c)}, \frac{E_{2i}^{(c)}}{c}\right)$$

Quantità che ci risultano a questo punto note.

Nel sistema $\sum_c$ del centro di massa la [XI.33] si scrive:

$$\begin{cases} 0 = \vec{p}_{1f}^{(c)} + \vec{p}_{2f}^{(c)} \\ E_i^{(c)} = E_{1f}^{(c)} + E_{2f}^{(c)} \end{cases} \quad \text{[XI.56]}$$

Usando la [XI.51], le [XI.56] possono essere poste anche nella forma:

$$\begin{cases} \vec{p}_{1f}^{(c)} = -\vec{p}_{2f}^{(c)} \equiv \vec{p}_f^{(c)} \\ E_i^{(c)} = c\sqrt{|\vec{p}_f^{(c)}|^2 + m_{01}c^2} + c\sqrt{|\vec{p}_f^{(c)}|^2 + m_{02}c^2} \end{cases} \quad \text{[XI.56.a]}$$

dove le masse a riposo m_{o1} ed m_{o2} delle particelle finali sono di norma incognite. Le [XI.56] rappresentano ancora, evidentemente, quattro equazioni in otto incognite. Dunque la conoscenza completa dello stato finale può essere ottenuta solo misurando quattro delle otto incognite.

A seconda dei casi, può essere conveniente misurare alcune o altre di queste incognite. Se ad esempio si misura il momento spaziale $\bar{p}_{1f}^{(c)}$ e la massa a riposo m_{o1} di una delle particelle emergenti, le [XI.56.a] consentono di calcolare $\bar{p}_{2f}^{(c)}$ e m_{o2}; ovvero misurando le due masse a riposo e la direzione (due angoli) di una particella, si può calcolare il modulo $|\bar{p}_f^{(c)}|$ del momento spaziale comune alle due particelle e la direzione dell'altra particella; e così via.

Una volta nota la configurazione cinematica dell'urto nel sistema Σ_c del centro di massa, le trasformazioni di Lorentz inverse (eq. [XI.16.b]) ci consentono di calcolare la configurazione cinematica nel sistema del laboratorio.

Come si vede, si tratta di un procedimento laborioso, ma metodologicamente semplice.

XI.8. La forza di Minkowski

Per ricavare la [XI.37] abbiamo utilizzato la relazione

$$\bar{F} \cdot dt = d\bar{p} \qquad \text{[XI.57]}$$

cioè abbiamo accettato anche in teoria della relatività la definizione dinamica dell'impulso (spaziale) di una forza agente su una particella come quella quantità dinamica misurata dalla variazione della quantità di moto (parte spaziale del momento lineare) della particella stessa.

La [XI.57] costituisce la parte spaziale di un quadrivettore; e dunque l'impulso di una forza, pur di estendere la definizione anche alla quarta componente, è una grandezza coerente con la condizione di covarianza delle leggi relativistiche.

Tuttavia la [XI.57], considerato che dt non è invariante, mostra anche che la forza $\bar{F}$ definita dalla [XI.57] stessa (cioè la forza «classica») non costituisce la parte spaziale di un quadrivettore. In altri termini, l'equazione

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_o \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \qquad \text{[XI.58]}$$

non è di immediata applicazione in teoria della relatività, poiché non è covariante a vista.

Forza di Minkowski

Per superare questa difficoltà si introduce la *forza di Minkowski* $\underline{f}$ come quel quadrivettore definito dinamicamente dalla relazione:

$$\underline{f}\, dt_o = d\underline{p} \qquad \text{[XI.59]}$$

dove dt_o è il differenziale del tempo proprio della particella che subisce la forza. Che $\underline{f}$ sia un quadrivettore segue dal fatto che $d\underline{p}$, variazione del quadrivettore momento lineare della particella, è un quadrivettore; mentre dt_o è un invariante.

Tenuto conto della relazione $dt = \dfrac{dt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\, dt_0$ fra la variazione dt del tempo in $\sum$ e la variazione dt_0 del tempo proprio, la [XI.59] può essere scritta come:

$$\underline{f}\frac{dt}{\gamma} = d\underline{p}$$

ovvero, separando la parte spaziale dalla componente temporale:

$$\begin{cases} \vec{f}\dfrac{dt}{\gamma} = d\vec{p} \\ f_4\dfrac{dt}{\gamma} = dp_4 \end{cases}$$

e introducendo nella seconda di queste equazioni la [XI.36] $dp_4 = \dfrac{\vec{v}}{c} \cdot d\vec{p}$:

$$\begin{cases} \vec{f}\dfrac{dt}{\gamma} = d\vec{p} \\ f_4\dfrac{dt}{\gamma} = \dfrac{\vec{v}}{c} \cdot d\vec{p} \end{cases}$$

Sostituendo in questa equazione la [XI.57] ($d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$) si ottiene infine:

$$\begin{cases} \vec{f} = \gamma\, \vec{F} = \dfrac{\vec{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ f_4 = \gamma \dfrac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F} = \dfrac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad [XI.60]$$

che riassume le relazioni che legano la forza di Minkowski $\underline{f} \equiv (\vec{f}, f_4)$ alla forza classica tridimensionale $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$.

Operativamente, trovandosi in un sistema di riferimento $\sum$ la forza classica $\vec{F}$ che agisce su una particella di velocità $\vec{v}$ e massa a riposo m_0 si misura mediante la [XI.58]. Qualora la si voglia calcolare in un altro sistema di riferimento $\sum'$, si calcola la forza di Minkowski $\underline{f}$ tramite le [XI.60]. Essendo $\underline{f}$ un quadrivettore, esso si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz; e se ne può quindi calcolare facilmente il vettore $\underline{f}'$ in $\sum'$.

Questa macchinosità della dinamica relativistica basata sul concetto di forza si accompagna anche a difficoltà concettuali connesse col fatto che le azioni dinamiche (così come ogni altra azione a distanza che trasporti energia) non possono propagarsi istantaneamente. Queste difficoltà vengono superate nella dinamica relativistica basata su campi quadrivettoriali (quadrivettore potenziale).

La dinamica relativistica del campo elettromagnetico verrà trattata nel volume dedicato all'elettromagnetismo; mentre la dinamica relativistica del campo gravitazionale, che è oggetto della relatività generale, non verrà trattata in questo corso di fisica.

XI.9. L'esperimento di Michelson

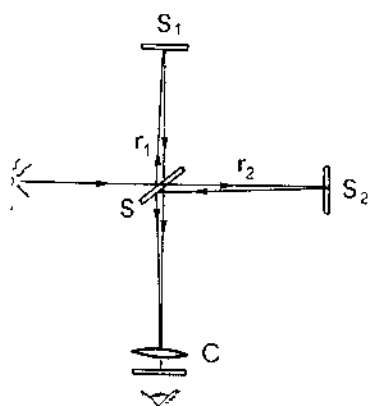
Nelle brevi considerazioni generali da noi svolte a introduzione di questo capitolo, abbiamo accennato all'esperimento di Michelson: l'esperimento che ha consentito di concludere che l'ipotesi dell'etere non è realistica, spianando la strada alla enunciazione, da parte di Einstein, del principio di costanza della velocità della luce in base al quale le misure della velocità della luce forniscono sempre, come risultato, c, indipendentemente dalla eventuale velocità con cui si muovano gli strumenti con i quali la misura viene effettuata (ovvero, come si usa dire, indipendentemente dalla velocità del sistema di riferimento in cui è situato l'osservatore).

L'esperimento di Michelson è stato il punto di partenza per un notevole passo in avanti compiuto dall'uomo nel suo sforzo di approfondire la sua conoscenza delle leggi di natura. Esso è inoltre un esperimento di notevole raffinatezza. L'effetto che voleva essere messo in evidenza – e che invece non fu osservato – era l'effetto di somma delle velocità previsto per la velocità della luce dalle trasformazioni di Galileo in considerazione del fatto che la stessa, orbitando intorno al Sole, sarebbe in moto rispetto all'etere con velocità v: la difficoltà dell'esperimento segue dal fatto che la velocità v della Terra ($v \simeq 30$ Km/s) è circa un decimillesimo rispetto a quella della luce. Riteniamo pertanto istruttivo dedicare questo paragrafo a una descrizione dettagliata di questo fondamentale e difficile esperimento.

Consideriamo l'apparato sperimentale schematicamente mostrato in figura (interferometro di Michelson). La sorgente di luce L emette un raggio collimato di luce monocromatica, con lunghezza d'onda λ, nella direzione LS. S è uno specchio semitrasparente, disposto ad un angolo di 45° rispetto al raggio luminoso: di quest'ultimo una parte r_1 viene dunque riflessa verso lo specchio S_1; e una parte r_2 viene trasmessa verso lo specchio S_2. Del primo raggio r_1, riflesso da S_1, una parte attraversa S e viene raccolta dal cannocchiale C; e così pure del secondo raggio r_2, riflesso da S_2, una parte viene riflessa da S verso il cannocchiale C che riceve così due raggi luminosi fra di loro coerenti. L'apparato è montato su un supporto orizzontale rigido (parallelo al piano del disegno); nell'esperimento di Michelson il supporto era un blocco di granito che veniva fatto galleggiare in una vasca piena di mercurio, cosicché esso poteva essere fatto ruotare senza scosse attorno a un asse verticale passante per S.

I due raggi luminosi hanno in comune i due tratti LS ed SC; i rispettivi percorsi si differenziano però perché il primo compie, avanti e indietro, il tratto SS_1 (di lunghezza l_1) mentre il secondo compie, avanti e indietro, il tratto SS_2 (di lunghezza l_2 pari circa a l_1). Nella versione più precisa dell'esperimento di Michelson (Michelson-Morley, 1887) il tratto $SS_1 \simeq SS_2$ era poco più di un metro; ma con un sistema di specchi multipli ciascun tratto veniva percorso avanti e indietro otto volte, cosicché agli effetti ottici era $l_1 \simeq l_2 \simeq 11$ m.

Ora supponiamo che valga l'ipotesi dell'etere, e che questo sia fermo rispetto al sistema solare. La velocità della luce sarebbe allora pari a c rispetto al sistema solare ma non rispetto a un sistema di riferimento terrestre: la Terra si muove infatti intorno al Sole in un moto praticamente circolare con velocità v (trascuriamo, a questo livello, la velocità di rotazione della Terra intorno al suo asse, che ha all'equatore il suo valor massimo di circa 0,5 Km/s, ed è dunque dell'ordine di un centesimo rispetto a v).

Supponiamo che inizialmente l'apparato sperimentale sia orientato in modo che il braccio SS_1 sia parallelo alla velocità $\vec{v}$ della Terra. Rispetto

all'apparato, il raggio r_1 si muove dunque (nell'ipotesi dell'etere) con velocità $c + \mathrm{v}$ mentre esso viaggia da S a S_1; e con velocità $c - \mathrm{v}$ mentre esso viaggia da S_1 a S. Il tempo t_1 impiegato da r_1 per compiere il tragitto di andata e ritorno è dunque:

$$t_1 = \frac{l_1}{c + \mathrm{v}} + \frac{l_1}{c - \mathrm{v}} = l_1 \left(\frac{2c}{c^2 - \mathrm{v}^2}\right) = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \mathrm{v}^2/c^2}$$

Il raggio r_2, invece, si muove in direzione ortogonale alla velocità $\vec{\mathrm{v}}$. Il tratto effettivamente percorso dalla luce non è dunque di lunghezza l_2, ma di lunghezza $\left[l_2^2 + \left(\mathrm{v}\frac{t_2}{2}\right)^2\right]^{1/2}$; dunque il tempo di percorrenza t_2 soddisfa la relazione

$$2\left[l_2^2 + \left(\mathrm{v}\frac{t_2}{2}\right)^2\right]^{1/2} = c t_2$$

da cui

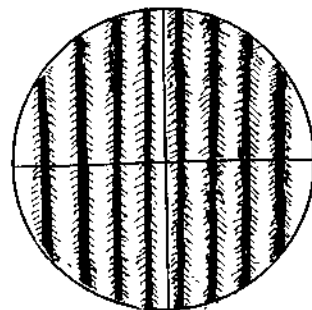
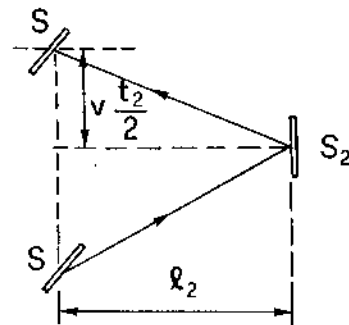
$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - \mathrm{v}^2}} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}}$$

Per differenza si ha:

$$\begin{aligned} \Delta t = t_2 - t_1 &= \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}} - \frac{l_1}{1 - \mathrm{v}^2/c^2}\right) \simeq \\ &\simeq \frac{2}{c}\left[l_2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) - l_1\left(1 + \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\right] \end{aligned} \qquad \text{[XI.58]}$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo usato lo sviluppo al primo ordine $(1 + \alpha)^K \simeq 1 + K\alpha$, eq. [IV.9.a] (ricordiamo che $\mathrm{v}/c \simeq 10^{-4}$, e dunque $\mathrm{v}^2/c^2 \simeq 10^{-8}$). La differenza di fase δ fra questi due raggi coerenti è legata a Δt dalla relazione $\frac{\delta}{2\pi} = \frac{c\Delta t}{\lambda}$. Fissata la lunghezza di un braccio e regolando, mediante una vite micrometrica, la lunghezza dell'altro braccio in modo che $c\Delta t$ sia dell'ordine della lunghezza d'onda λ della luce impiegata (nell'esperimento di Michelson-Morley era $\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ m), in uno schermo situato nel fuoco del cannocchiale si realizzerà un fenomeno di interferenza (vedi par. X.6). Nel piano focale si manifesterà una sequenza di luci e di ombre come quella indicata in figura.

Ruotiamo ora l'interferometro di Michelson di 90° senza modificarne in alcun altro modo la geometria. Il ruolo di l_1 ed l_2 si inverte allora nella [XI.58]: al posto della differenza di tempi Δt avremo dunque una differenza $\Delta t'$ data da:

$$\begin{aligned} \Delta t' = t_2' - t_1' &= \frac{2}{c}\left(\frac{l_1}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}} - \frac{l_2}{1 - \mathrm{v}^2/c^2}\right) \simeq \\ &\simeq \frac{2}{c}\left[l_1\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) - l_2\left(1 + \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\right] \end{aligned} \qquad \text{[XI.59]}$$

Facendo le differenze fra la [XI.58] e la [XI.59] si ha:

$$\frac{\Delta\delta}{2\pi} = \frac{\delta - \delta'}{2\pi} = \frac{c\Delta t - c\Delta t'}{\lambda} = \frac{l_1 + l_2}{\lambda}\frac{v^2}{c^2} \qquad [XI.60]$$

Inserendo i dati numerici caratteristici dell'esperimento di Michelson-Morley, si ha

$$\frac{\Delta\delta}{2\pi} = \frac{22\ \text{m}}{5{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} \cdot 10^{-8} \simeq 0{,}4$$

cioè le frange di interferenza dovrebbero spostarsi di un tratto pari a 0,4 volte la distanza fra due massimi successivi. In realtà non venne osservato alcuno spostamento, benché la sensibilità degli strumenti fosse tale da poter evidenziare un eventuale spostamento $\frac{\Delta\delta}{2\pi} = 0{,}01$.

Vento d'etere

Va osservato che nel nostro calcolo abbiamo ipotizzato che il sistema solare sia fermo rispetto all'etere; in linea di principio il risultato negativo dell'esperimento potrebbe essere spiegato, senza rinunciare all'ipotesi dell'etere, ipotizzando che il sistema solare si muova con opportuna velocità rispetto all'etere, di modo che la terra si trovasse casualmente ad aver velocità nulla rispetto all'etere nel momento in cui l'esperimento è stato eseguito. Tuttavia ripetendo (come in effetti fu fatto) l'esperimento in periodi diversi del giorno e dell'anno, questa ipotesi remota può essere esclusa.

L'esperimento di Michelson fu ripetuto più volte da diversi autori, con precisione talvolta maggiore rispetto all'esperimento originario. I risultati, sempre negativi, sono riassunti nella tabella.

Risultati dell'esperimento di Michelson e di successive ripetizioni

Autori	Anno	Luogo	Lunghezza ($l_1 + l_2$) metri	Spostamento $\frac{\Delta\delta}{2\pi}$ previsto	Limite superiore dello spostamento osservato
Michelson	1881	Potsdam	1,2	0,04	0,02
Michelson-Morley	1887	Cleveland	11,0	0,40	0,01
Morley-Miller	1904	Cleveland	32,3	1,13	0,015
Miller	1921	Monte Wilson	32,0	1,12	0,08
Miller	1924	Cleveland	32,0	1,12	0,030
Miller (con luce solare)	1924	Cleveland	32,0	1,12	0,014
Tomaschek (luce stellare)	1924	Heidelberg	8,6	0,3	0,02
Miller	1926	Monte Wilson	32,0	1,12	0,088
Kennedy	1926	Pasadena	2,0	0,07	0,002
Illigworth	1927	Pasadena	2,0	0,07	0,0004
Piccad e Stahel	1927	Monte Rigi	2,8	0,13	0,006
Michelson et al	1929	Monte Wilson	25,9	0,9	0,010
Joos	1930	Jena	21,0	0,75	0,002

Fonte: Shankland, Mc Curskey, Leone e Kuerti, Rev. Mod. Phys., *27*, 167 (1955).

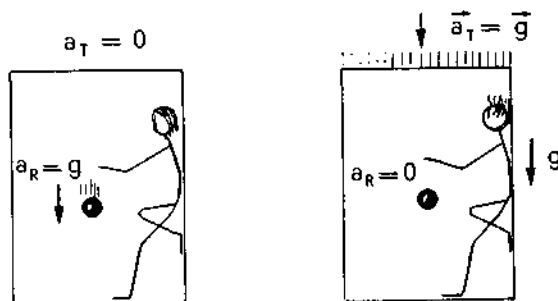
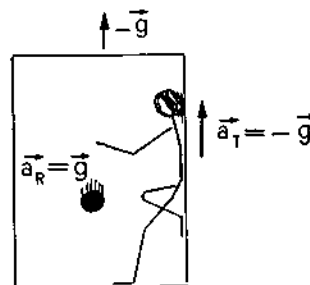
LA RELATIVITÀ GENERALE

La teoria della relatività ristretta, di cui ci siamo occupati fin qui, tratta sistemi di riferimento inerziali, cioè in moto relativo traslatorio rettilineo e uniforme: le leggi di trasformazione da un sistema di riferimento a un altro sono ricondotte a problemi di geometria dello spazio-tempo.

Nel 1916, cioè poco più di dieci anni dopo la pubblicazione della Teoria della Relatività Ristretta, Einstein pubblicò la sua Teoria della Relatività Generale: teoria che ingloba la trattazione di sistemi di riferimento non inerziali. In linea di principio, anche le leggi di trasformazione fra sistemi non inerziali sono riconducibili in maniera concettualmente semplice a problemi di geometria dello spazio-tempo, benché il relativo formalismo matematico sia assai complesso nel caso generale. Ma il grande interesse della relatività generale deriva dal fatto che nel suo ambito anche le leggi della gravitazione universale sono ricondotte a proprietà geometriche dello spazio-tempo: ciò è possibile in base a considerazioni che, benché si traducano in leggi matematiche complesse, sono però concettualmente semplici.

Principio di equivalenza e ascensore di Einstein

Il punto di partenza della relatività generale è il cosiddetto Principio di Equivalenza, che a sua volta si basa sulla proporzionalità (e dunque la sostanziale coincidenza) fra massa gravitazionale e massa inerziale.

Consideriamo un ascensore fermo in vicinanza della Terra, e dentro di esso uno sperimentatore. Se egli lascia libera a mezz'aria una biglia, in virtù della attrazione gravitazionale ad opera della Terra la vede cadere lungo la verticale con accelerazione a_R pari a $\vec{g}$. Ma supponiamo ora che il cavo che sorregge l'ascensore si spezzi, cosicché l'ascensore stesso con tutto ciò che esso contiene (incluso lo sperimentatore) cada liberamente (accelerazione di trascinamento $\vec{a}_T = \vec{g}$). Poiché in virtù della proporzionalità fra massa gravitazionale e massa inerziale tutte le cose cadono con la stessa accelerazione, se lo sperimentatore abbandona la biglia a mezz'aria, la vede restare ferma fluttuante a mezz'aria (l'accelerazione relativa a_R è nulla).

La conclusione di questo esperimento concettuale (ascensore di Einstein) è che un campo gravitazionale $\vec{g}$ risulta annullato all'interno di un sistema non inerziale dotato di accelerazione $\vec{g}$; e dunque vi è sostanziale *equivalenza fra campo gravitazionale e campo delle forze apparenti* nel sistema non inerziale. Questa equivalenza è confermata da un altro esperimento concettuale con l'ascensore di Einstein. Supponiamo che l'ascensore sia posto nello spazio, lontano da tutto, cosicché non vi sia in esso alcun campo gravitazionale. Se esso è fermo (non accelerato) la biglia abbandonata ferma resta ferma. Ma se esso viene accelerato verso l'alto con accelerazione $-\vec{g}$, l'osservatore vede cadere la biglia con accelerazione $\vec{a}_R = \vec{g}$: nell'ascensore è comparso l'equivalente di un campo gravitazionale $\vec{g}$.

Luce, gravitazione e curvatura dello spazio-tempo

Il principio di equivalenza fra campo gravitazionale e campo di forze apparenti in sistemi non inerziali ha importanti implicazioni teoriche e pratiche. Poiché infatti il campo delle forze apparenti è calcolabile in base a considerazioni cinematiche (che è come dire di geometria dello spazio-tempo), anche la gravitazione è ricondotta a un problema di geometria dello spazio-tempo. Le complicazioni matematiche, cui abbiamo accennato, derivano dalla necessità di introdurre una accelerazione di trascinamento diversa da punto a punto.

Una conseguenza importante di questo modo di vedere la gravitazione, è il fatto che secondo la relatività generale anche la luce subisce l'attrazione gravitazionale. È infatti facilmente intuibile che un raggio di luce che attraversi un sistema di riferimento non inerziale è visto compiere, dall'osservatore non inerziale, una traiettoria incurvata; per il principio di equivalenza lo stesso deve accadere a un raggio di luce che attraversi una porzione di spazio soggetta a campo gravitazionale. L'incurvamento di raggi luminosi ad opera del campo gravitazionale, come previsto dalla relatività generale, fu osservato già negli anni '20, misurando la configurazione assunta in cielo da costellazioni che si trovavano in posizione apparente prossima a quella del Sole durante una eclissi totale.

Secondo quanto stabilito dalla teoria della relatività, la luce rappresenta il più rapido segnale che può congiungere due posizioni A e B: il percorso spazio-temporale compiuto dalla luce per andare da A a B costituisce dunque un tratto di geodetica spazio-temporale (è questa infatti la definizione di geodetica). Poiché tale percorso, in presenza di campo gravitazionale, è curvo, possiamo dire che *il campo gravitazionale incurva lo spazio.*

La geometria sferica (necessaria per descrivere ad esempio il moto di un oggetto sulla superficie terrestre, su cui le geodetiche sono archi di cerchio) è una geometria non euclidea. Analogamente, in relatività generale è non euclidea la geometria dello spazio-tempo.

Gravitazione e tempo

In relativita generale, la presenza di un campo gravitazionale produce una dilatazione del tempo. Ciò è facilmente comprensibile considerando che in un orologio a luce, in presenza di campo gravitazionale, la luce compie un percorso curvo, e dunque più lungo che non in assenza del campo gravitazionale: poiché la sua velocità è comunque pari a c, l'orologio rallenta. Naturalmente lo stesso effetto deve presentarsi a un orologio disposto in un sistema di riferimento non inerziale. Su questa previsione teorica è basato il cosiddetto *paradosso dei gemelli.*

Consideriamo due gemelli, F e G. F sia fermo in un sistema di riferimento inerziale, e G si imbarchi su una navicella spaziale per compiere un lungo viaggio di andata e ritorno per una qualche meta nello spazio. Immaginiamo che, dal punto di vista di F, il viaggio sia durato un certo numero di anni. Poiché per G, che si trova in un riferimento non inerziale, il tempo scorre più lentamente, per esso il viaggio dura meno: quando G torna, trova F più vecchio di lui (per F è passato più tempo che non per G). Questo fenomeno è stato rivelato sperimentalmente. Un precisissimo orologio atomico, disposto su un aereo supersonico che ha compiuto il giro del mondo, è stato visto ritardare di circa 300 nanosecondi rispetto a un orologio disposto a terra: un ritardo minimo, ma coerente con le previsioni fatte dalla relatività generale in queste condizioni di velocità e accelerazione.

Sperimentando con particelle μ, fatte girare a velocità prossima a quella della luce in un anello circolare con raggio di pochi metri, si è riscontrato che la loro vita media aumentava di un fattore dieci e più rispetto a quella di particelle μ ferme nel laboratorio: ancora una volta la dilatazione del tempo così misurata è risultata coerente con le previsioni della relatività generale.

Buchi neri

Un fenomeno peculiare previsto dalla relatività generale è quello dei *buchi neri.* Come abbiamo visto nel par. V.2, una sorgente di campo gravitazionale (ad esempio un corpo celeste) è contraddistinto da una sua caratteristica velocità di fuga. La velocità di fuga è la velocità minima con cui da quel corpo celeste deve essere lanciato verso l'alto un oggetto qualunque affinché esso possa sfuggire al campo gravitazionale attrattivo generato da quel corpo. La velocità di fuga v_f è tanto maggiore quanto maggiore è la massa M di quel corpo, e tanto minore quanto minore il suo raggio R: in effetti è $v_f = \sqrt{G\,M/R}$ (vedi es. E.V.3). Si può immaginare un corpo celeste che abbia massa sufficientemente grande e raggio sufficientemente piccolo perché la velocità di fuga divenga pari (o maggiore) alla velocità della luce. Un corpo dotato di questa proprietà è detto un buco nero. Per una stella di massa pari a quella del sole, ciò accadrebbe se il raggio fosse all'incirca un chilometro. Poiché nessun oggetto e nessun segnale può viaggiare a velocità superiore a quella della luce, niente può sfuggire al campo gravitazionale di quella stella. Anche un raggio luminoso emesso verso l'alto, sarebbe attratto con forza sufficiente a farlo ricadere. All'aumentare della quota, l'energia di quel raggio luminoso andrebbe diminuendo via via. Come vedremo nel volume dedicato all'elettromagnetismo, l'energia di un raggio luminoso (o fotone) è proporzionale alla sua frequenza. Dunque un raggio luminoso, ad esempio violetto, lanciato verso l'alto da un buco nero avrebbe frequenza via via decrescente all'aumentare della quota. La sua frequenza sarebbe spostata verso il rosso, l'infrarosso, le microonde, le onde radio fino a che la sua energia venisse annullata; e da quel momento esso comincerebbe a ricadere verso il buco nero, con energia (e dunque frequenza) via via crescente.

Un buco nero, se esiste, non può venire rivelato osservando, come si fa per una stella qualunque, la luce che emette; perché la luce (così come qualunque altro oggetto o particella) non può sfuggire al suo campo di gravitazione. Al contrario, tutto ciò che passa in vicinanza di un buco nero sarebbe risucchiato verso di esso dalla sua enorme attrazione gravitazionale. In virtù della sua grande accelerazione, la materia risucchiata verso un buco nero potrebbe emettere intensa radiazione elettromagnetica; e in questo modo indiretto potremmo osservare un buco nero.

Fino ad oggi, nessun buco nero è stato individuato con certezza nello spazio cosmico. Se mai ciò avverrà in futuro, sarà da un lato un'altra prova della validità della teoria della relatività generale; e sarà d'altro lato un ulteriore passo avanti nella conoscenza della storia e del destino futuro dell'universo in cui viviamo.

Appendice A

Soluzione degli esercizi

Capitolo secondo

II.1. $x(t) = c\,t^2$ $\qquad \dfrac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} =$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c(t + \Delta t)^2 - c\,t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c(t^2 + 2\,t\,\Delta t + \Delta t^2 - t^2)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} c\,\frac{2\,t\,\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2\,c\,t + c\,\Delta t) = 2\,c\,t\,.$$

II.2. $x(t) = \alpha\,t^3$ $\qquad \dfrac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\alpha\,(t + \Delta t)^3 - \alpha\,t^3}{\Delta t} =$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha\,(t^3 + 3\,t^2\,\Delta t + 3\,t\,\Delta t^2 + \Delta t^3 - t^3)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3\,\alpha\,t^2\,\Delta t + 3\,\alpha\,t\,\Delta t^2 + \alpha\,\Delta t^3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (3\,\alpha\,t^2 + 3\,\alpha\,t\,\Delta t + \alpha\,\Delta t^2) = 3\,\alpha\,t^2\,.$$

II.3. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ $\qquad f'(x^*) = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x = x^*} = \lim_{\Delta x \to 0} \cdot \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

$$\Delta f = f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = \frac{(x^* + \Delta x) + 1}{(x^* + \Delta x) - 1} - \frac{x^* + 1}{x^* - 1} =$$

$$= \frac{3 + \Delta x + 1}{3 + \Delta x - 1} - \frac{3 + 1}{3 - 1} = \frac{4 + \Delta x}{2 + \Delta x} - \frac{4}{2} =$$

$$= \frac{4 + \Delta x - 4 - 2\,\Delta x}{2 + \Delta x} = -\frac{\Delta x}{2 + \Delta x}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x^*} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{1}{2 + \Delta x}\right] = -\frac{1}{2}$$

Allo stesso risultato si perviene considerando la $f(x)$ come un prodotto di funzioni:

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}[(x+1)(x-1)^{-1}] = \left[\frac{d}{dx}(x+1)\right]\cdot(x-1)^{-1} +$$

$$+ (x+1)\frac{d}{dx}(x-1)^{-1} = 1\cdot(x-1)^{-1} + (x+1)(-1)(x-1)^{-1-1} =$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

Per $x = x^* = 3$ si ha $f'(3) = -\dfrac{2}{(3-1)^2} = -\dfrac{1}{2}$.

II.4. La funzione $y(x) = \text{sen}\,(1+x^2)$ può essere considerata come funzione di funzione. Ponendo $z = 1 + x^2$, si ha $y = y[z(x)]$ e la derivata vale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{d}{dz}\,\text{sen}\,z = \cos z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(1+x^2) = 2x$$

Dunque: $\dfrac{dy}{dx} = (\cos z)(2x) = 2x\cos(1+x^2)$

II.5.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 3x^2 + 2\cdot 2x = 3x^2 + 4x$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = 3\cdot 2x + 4 = 6x + 4$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}f''(x) = 6$$

II.6. Si passa dall'accelerazione alla legge oraria con due successive operazioni di integrazione:

$$v(t) = \int a\,dt + c$$

dove c è una costante da determinarsi sulla base delle condizioni iniziali (partenza da fermo). Per definizione di primitiva la funzione $v(t)$ deve essere tale che la sua derivata rispetto al tempo valga a (costante); dunque deve essere una funzione lineare del tempo:

$$v(t) = at + c$$

Per $t = 0$ si ha $v(0) = 0$ (partenza da fermo) e quindi $c = 0$. Dunque

$v(t) = at$

La risposta al quesito a) è dunque:

$$v(5) = \left(2\frac{m}{s^2}\right)\cdot(5\ s) = 10\frac{m}{s}$$

La velocità media nell'intervallo di tempo $(0 - 5)$ è, per definizione:

$$v_m = \frac{x(5) - x(0)}{5} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Occorre calcolare l'equazione oraria $x = x(t)$ a partire dalla conoscenza della velocità istantanea $v(t)$. Si tratta di eseguire un'ulteriore operazione di integrazione:

$$x(t) = \int v(t)\, dt + \alpha\ ,$$

dove α è una costante ed $x = x(t)$ è tale che la sua derivata sia pari alla velocità.

$$x(t) = \int a\cdot t\cdot dt + \alpha = \frac{1}{2}\, at^2 + \alpha$$

α rappresenta il valore di x quando $t = 0$: $\left(x(0) = \frac{1}{2}\, a0^2 + \alpha\right)$.

Dunque:

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{2}\, at^2$$

Per $t = 5$ si ha

$$x(5) = x(0) + \frac{1}{2}\left(2\frac{m}{s^2}\right)(5^2\ s^2) = x(0) + 25$$

da cui:

$x(5) - x(0) = 25$ m (spostamento nell'intervallo $(0 - 5)$)

$$v_m = \frac{x(5) - x(0)}{5} = \frac{25}{5} = 5\, m/s\ .$$

II.7. Trattandosi di moto rettilineo uniformemente accelerato si ha:

$$v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\, at^2$$

Eliminando il tempo si ottiene:

$$t = \frac{v - v_o}{a}$$

$$x = x_o + \frac{v_o}{a}(v - v_o) + \frac{1}{2}a\frac{(v - v_o)^2}{a^2} = x_o + \frac{v^2 - v_o^2}{2a}$$

Con i dati del problema si ha:

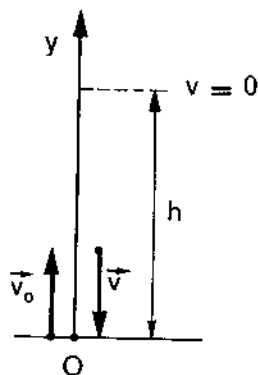
$$x = x_1, \ v = v_1 \qquad x_1 - x_o = \frac{v_1^2 - v_o^2}{2a}$$

$$x = x_2, \ v = v_2 \qquad x_2 - x_o = \frac{v_2^2 - v_o^2}{2a}$$

Sottraendo la prima relazione dalla seconda si ha:

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2a}(v_2^2 - v_o^2 - v_1^2 + v_o^2) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a},$$

da cui

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(x_2 - x_1)}.$$

II.8. Nella fase di salita il moto è ritardato perché accelerazione $\vec{g}$ e spostamento sono paralleli e discordi:

$$\text{SALITA:} \quad \begin{cases} v(t) = v_o - gt \\ y(t) = y_o + v_o t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Se il punto di lancio viene posto nell'origine ed il lancio è effettuato per $t = 0$, si ha $y_o = 0$.
La massima quota $y_{MAX} = h$ è caratterizzata dal fatto che vi si realizza un'inversione di marcia: la velocità, inizialmente diretta verso l'alto, diventa nulla, per poi iniziare la fase di discesa con direzione orientata verso il basso.
Dunque, detto t^* il tempo necessario a raggiungere la massima quota, si ha:

$$v(t^*) = 0 = v_o - gt^* \rightarrow t^* = v_o/g$$

$$y_{MAX} = h = v_o t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} = \frac{v_o^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{g} = \frac{v_o^2}{2g}$$

La fase di discesa è caratterizzata da una partenza a velocità iniziale nulla ($v_{IN} = 0$) da una quota h, con accelerazione concorde al verso di spostamento (moto accelerato).
Detto $t = 0$ l'istante di inizio della fase di discesa si ha:

$$\text{DISCESA:} \quad \begin{cases} v(t) = v_{IN} - gt = -gt & (v_{IN} = 0) \\ y(t) = h + v_{IN}t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2 & (\text{per } t = 0, y(0) = h) \end{cases}$$

L'arrivo al suolo avviene dopo un tempo $\bar{t}$ tale che $y(\bar{t}) = 0$:

$$y(\bar{t}) = 0 = h - \frac{1}{2} g\bar{t}^2 \rightarrow \bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

(osservare che $\bar{t} = t^*$, cioè il tempo di salita è uguale al tempo di discesa). La velocità di arrivo al suolo è:

$$\text{v} = \text{v}(\bar{t}) = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

Tenendo conto che $h = \text{v}_o^2/2g$ si ha:

$$\text{v} = -\sqrt{2g\frac{\text{v}_o^2}{2g}} = -\text{v}_o\,.$$

Il corpo arriva al suolo con una velocità pari, in modulo, a quella di lancio, ma con verso opposto.

II.9. Per calcolare l'angolo θ basta ricavare le componenti v_x e v_y della velocità nel punto di arrivo al suolo:

$$\text{v}_y = \text{v}_x \,\text{tg}\,\theta \rightarrow \text{tg}\,\theta = \text{v}_y/\text{v}_x$$

Le equazioni delle componenti della velocità sono:

$$\begin{cases} \text{v}_x = \text{v}_o & (\text{poiché } a_x = 0,\ \text{v}_x = \text{cost}) \\ \text{v}_y = -gt & (a_y = -g,\ \text{v}_y(0) = 0)\,. \end{cases}$$

Il tempo t^* impiegato ad arrivare al suolo si ricava dall'equazione per la coordinata y:

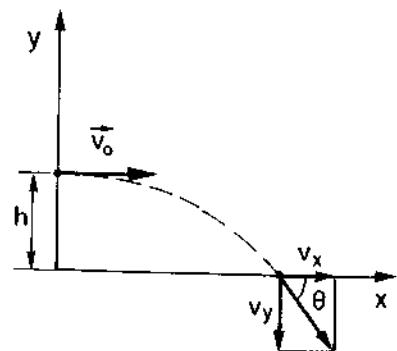
$$y(t) = h - \frac{1}{2} gt^2\,,$$

che diventa:

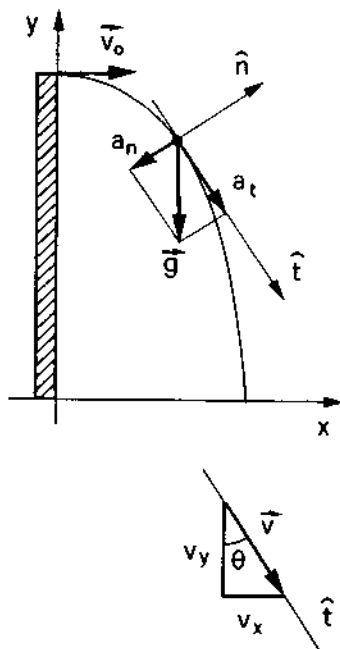
$$y(t^*) = 0 = h - \frac{1}{2} gt^{*2} \rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Dunque

$$\begin{cases} \text{v}_x(t^*) = \text{v}_o \\ \text{v}_y(t^*) = -g\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh} \end{cases}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{v}_y(t^*)}{\text{v}_x(t^*)} = \frac{\sqrt{2gh}}{\text{v}_o} = 0.885 \rightarrow \theta = 41{,}5°\,.$$

II.10. $\vec{a} = \vec{g} \begin{cases} a_n = g\,\text{sen}\,\theta \\ a_t = g\cos\theta \end{cases} \quad g = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$

Il calcolo dell'angolo θ può essere fatto a partire dalle componenti cartesiane della velocità:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{v}_x}{\text{v}_y}$$

dove

$$\begin{cases} v_x = v_o \\ v_y = -gt \end{cases} \rightarrow \text{tg}\theta = -\frac{v_o}{gt}$$

Può essere opportuno analizzare il risultato intermedio relativo al calcolo dell'angolo θ.
Si è trovato, dal punto di vista dimensionale, un numero puro:

$$[\text{tg}\,\theta] = \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\,\frac{1}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\text{s}}\right] = \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\,\frac{\text{s}}{\text{m}}\right] = [\text{numero puro}]$$

Questo è quanto ci si deve aspettare per una funzione trigonometrica. Si è anche trovato un valore negativo per tgθ: ciò implica che l'angolo, compreso in modulo tra 0 e π/2 per la natura del problema, giaccia nel quarto quadrante del cerchio trigonometrico, come è ovvio data l'orientazione degli assi x ed y.
È opportuno anche abituarsi a valutare, nelle formule ricavate, i casi estremi che, per loro natura, debbono essere facilmente prevedibili su basi fisiche. In questo caso, per esempio, un caso estremo è relativo all'istante t = 0.

$$t = 0 \quad tg\theta = -\infty \rightarrow \theta = \pi/2\,.$$

Analogamente, per t molto grande ($t \rightarrow \infty$), tg θ ≈ 0; questo è prevedibile, se si pensa che, nella caduta parabolica, la velocità tende a divenire verticale.
Nelle espressioni $a_n = g\,\text{sen}\,\theta$, $a_t = g\cos\theta$, occorre ora esprimere senθ e cosθ in funzione di tgθ:

$$\text{sen}\,\theta = \text{tg}\,\theta/\sqrt{1+\text{tg}^2\theta}$$

$$\cos\theta = 1\;/\sqrt{1+\text{tg}^2\theta}$$

$$\begin{cases} a_n = g\,\text{sen}\,\theta = g\dfrac{v_o}{gt}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{v_o^2}{g^2t^2}}} = \dfrac{gv_o}{\sqrt{v_o^2+g^2t^2}} \\[2ex] a_t = g\cos\theta = g\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{v_o^2}{g^2t^2}}} = \dfrac{g^2t}{\sqrt{v_o^2+g^2t^2}} \end{cases}$$

Caso limite:

$t = 0 \quad a_n = g \quad a_t = 0$ (in accordo con quanto aspettato).

II.11. Procedendo come nel problema II.10 si ha:

$$\begin{cases} v_x = v_o \\ v_y = -gt \end{cases} \rightarrow v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{v_o^2+g^2t^2}$$

ed inoltre

$$a_n = \frac{gv_o}{\sqrt{v_o^2+g^2t^2}}$$

Il raggio di curvatura è dato dalla relazione:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_o^2 + g^2 t^2)}{g\, v_o} \sqrt{v_o^2 + g^2 t^2} = \frac{(v_o^2 + g^2 t^2)^{3/2}}{g\, v_o}$$

Controllo dimensionale:

$$[R] = \left[\left(\frac{m^2}{s^2} \right)^{3/2} \frac{1}{\frac{m}{s^2} \cdot \frac{m}{s}} \right] = \left[\frac{m^3}{s^3} \cdot \frac{s^3}{m^2} \right] = m$$

Calcolo numerico:

$$R = \frac{[(30)^2 + (9{,}8 \cdot 2)^2]^{3/2}}{9{,}8 \cdot 30} = \frac{(9 \cdot 10^2 + 3{,}84 \cdot 10^2)^{3/2}}{2{,}94 \cdot 10^2}$$

$R = 156{,}5$ m

II.12. Indicando con $y_f(t)$ ed $y_s(t)$ le quote della freccia e della scimmia rispettivamente, si ha:

$$\begin{cases} y_f(t) = (v_o \operatorname{sen}\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \\ y_s(t) = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

La scimmia viene colpita se, al tempo t^* in cui freccia e scimmia hanno la stessa quota y, avviene anche che la ascissa x_f della freccia coincida con l'ascissa d (costante) della scimmia: questo significa l'arrivo simultaneo di freccia e scimmia nel punto S'. Dunque:

$$y_f(t^*) = y_s(t^*) \rightarrow (v_o \operatorname{sen}\theta)\, t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = H - \frac{1}{2} g t^{*2}$$

da cui

$$t^* = \frac{H}{v_o \operatorname{sen}\theta}$$

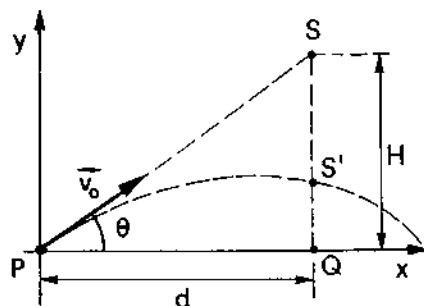
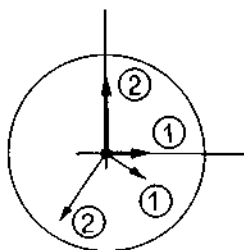
L'ascissa della freccia ha la legge oraria: $x_f(t) = (v_o \cos\theta)\, t$ per cui, al tempo t^*, si ha:

$$x_f(t^*) = v_o \cos\theta \frac{H}{v_o \operatorname{sen}\theta} = \frac{H}{\operatorname{tg}\theta}\,;$$

ma $H = d \cdot \operatorname{tg}\theta$ (nel triangolo rettangolo PSQ) per cui

$$x_f(t^*) = \frac{H}{\operatorname{tg}\theta} = d = x_s\,.$$

Dunque, al tempo t^*, freccia e scimmia hanno le stesse coordinate e la scimmia è colpita.

È da osservare che quanto sopra trovato non dipende dalla velocità della freccia (purché v_o sia tale che la gittata della freccia sia superiore alla distanza d).

II.13. In un moto circolare uniforme l'andamento temporale del parametro cinematico angolo θ è tale che la velocità angolare sia costante:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega = \text{cost}$$

Dunque $\Delta\theta = \theta - \theta_o = \omega\,\Delta t \rightarrow \theta(t) = \theta_o + \omega\,(t - t_o)$ dove θ_o è la posizione angolare quando $t = t_o$. Se per t_o si assume l'istante di inizio per il conteggio del tempo (origine del tempo), si ha:

$$\theta(t) = \theta_o + \omega t\,.$$

La legge ora scritta vale per entrambe le lancette (ore e minuti); nel caso della lancetta delle ore (indicata in figura con l'indice (1)) si ha

$\omega_1 = 2\pi/T_1 = 2\pi/12\text{ h}$ (un giro intero in 12 ore),

mentre per la lancetta dei minuti (indicata con l'indice (2)) si ha

$\omega_2 = 2\pi/T_2 = 2\pi/1\text{ h}\,.$

Prendendo come raggio di riferimento per gli angoli la linea verticale (corrispondente a $\theta = 0$) si ha:

lancetta ore: $\theta_1(t) = \theta_{10} + \omega_1 t$

dove $\theta_{10} = \pi/2$ (posizione iniziale sulle ore tre)

$$\theta_1(t) = \frac{\pi}{2} + \omega_1 t$$

lancetta minuti: $\theta_2(t) = \theta_{20} + \omega_2 t$

dove $\theta_{20} = 0$ (posizione iniziale verticale)

$$\theta_2(t) = \omega_2 t\,.$$

Si cerca il valore t^* di t, tale che $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$; dunque

$$\left.\begin{aligned} \theta_2(t^*) &= \omega_2 t^* \\ \theta_1(t^*) &= \frac{\pi}{2} + \omega_1 t^* \end{aligned}\right\} \theta_2 - \theta_1 = -\frac{\pi}{2} + (\omega_2 - \omega_1)\,t^* = \frac{\pi}{2}$$

Pertanto:

$$t^* = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

Numericamente:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{12\text{ h}} = 0{,}523\ \text{rad/h}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{1\text{ h}} = 6{,}28\ \text{rad/h}$$

$$t^* = \frac{3{,}14}{6{,}28 - 0{,}52} \simeq 0{,}55\text{ h} \simeq 33\text{ m} = \frac{6}{11}\text{ h}$$

II.14. a) Dalla relazione

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \text{cost}$$

si ha

$$\omega(t) = \int \dot{\omega}\, dt + \text{cost} = \dot{\omega}\, t + \text{cost}\,,$$

dove la costante rappresenta il valore iniziale ($t = 0$) della velocità angolare, ω_0.

$$\omega(t) = \dot{\omega}\, t + \omega_0$$

(analoga alla relazione $v(t) = at + v_0$ del moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione a).
Poiché la giostra parte da ferma: $\omega_0 = 0$ e dunque

$$\omega(t) = \dot{\omega}\, t$$

Per $t = 2\,\text{s}$ si ha:

$$\omega(2) = \left(0{,}2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)\cdot(2\ \text{s}) = 0{,}4\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) L'accelerazione vettoriale del punto è:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\,\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\,[v(t)\cdot \hat{t}(t)] = \frac{dv}{dt}\,\hat{t} + v\,\frac{d\hat{t}}{dt}$$

Il modulo della velocità vale $v = \omega r$, con r distanza del punto dall'asse di rotazione. Dunque

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\omega r) = r\,\dfrac{d\omega}{dt} = r\dot{\omega} \\ a_n = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r\,, \qquad \omega = \dot{\omega}\, t \end{cases}$$

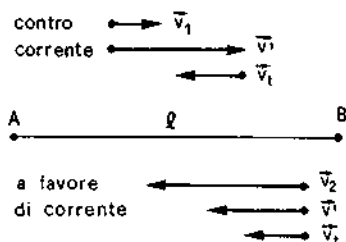
Osserviamo che, nel caso del problema, l'accelerazione tangenziale è costante nel tempo, mentre la componente normale cresce con il quadrato del tempo.
Il modulo dell'accelerazione ha dunque l'espressione:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{\omega}^2 r^2 + \dot{\omega}^4 r^2 t^4} = \dot{\omega}\, r\sqrt{1 + \dot{\omega}^2 t^4}\,.$$

Capitolo terzo

III.1. Detta v la velocità rispetto al sistema fisso, solidale con la riva, e detta v′ la velocità della canoa rispetto ad un sistema mobile solidale con la corrente, si ha:

$$v' = v - v_t \rightarrow v = v' + v_t$$

dove v_t è la velocità di trascinamento, cioè la velocità rispetto a riva di un punto solidale con il sistema mobile (dunque con le particelle di liquido

che costituiscono la corrente) che si trovi ad essere sovrapposto alla canoa (punto mobile). v_t è l'incognita del problema e può essere determinata scrivendo le equazioni orarie dei moti di andata e ritorno.

Andata (contro corrente) $\qquad v_1 = v' - v_t$

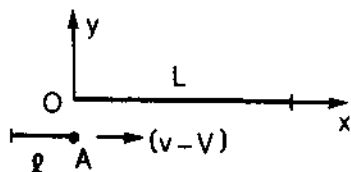
Ritorno (a favore di corrente) $\qquad v_2 = v' + v_t$

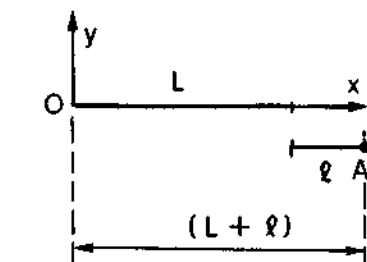
Sottraendo m.a.m. si elimina v' e si ottiene:

$$v_2 - v_1 = 2v_t .$$

D'altra parte $v_1 = l/t_1$ e $v_2 = l/t_2$, per cui

$$v_t = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{t_2} - \frac{l}{t_1}\right) = \frac{l}{2}\,\frac{t_2 - t_1}{t_1\,t_2} = \frac{1}{2}\,(10^3\ \text{m})\left(\frac{5}{300\ \text{min}}\right) =$$

$$= 8{,}33\,\frac{\text{m}}{\text{min}} \cong 0{,}14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

III.2. Scegliendo un sistema di riferimento fisso solidale con l'autotreno, perché il sorpasso sia completato, il fronte A dell'auto, che si muove con velocità $(v - V)$ rispetto all'autotreno, deve percorrere il tratto $(L + l)$. Trattandosi di moto rettilineo uniforme, il tempo necessario è:

$$\Delta t = \frac{L + l}{v - V} = \frac{19\ \text{m}}{40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{19\ \text{m}}{40\cdot\frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}}} = 1{,}7\ \text{s}\,.$$

III.3. Le grandezze date nel testo dell'esercizio si riferiscono ad un sistema di riferimento fisso solidale con la terra nel quale si ha la situazione di figura. Rispetto a questo sistema fisso, un sistema di riferimento mobile solidale con il primo aereo ha velocità di trascinamento costante $\vec{v}_t = \vec{v}_1$ (moto traslatorio, per cui la velocità di trascinamento ha lo stesso valore in tutti i punti dello spazio).
In questo sistema mobile, in cui l'aereo (1) è fermo, il secondo aereo ha velocità relativa

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_t = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

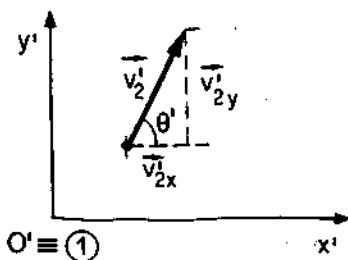
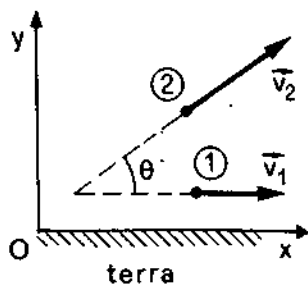
essendo $\vec{v}_2$ la velocità del secondo aereo rispetto al riferimento fisso. Proiettando sugli assi x' ed y' del sistema mobile (scelti paralleli ai corrispondenti assi x e y del sistema fisso) si ha:

$$\begin{cases} v_{2x}' = v_{2x} - v_1 = v_2\cos\theta - v_1 \\ v_{2y}' = v_{2y} = v_2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

L'angolo θ' è tale che:

$$\text{tg}\,\theta' = \frac{v_{2y}'}{v_{2x}'}$$

ed il modulo di $\vec{v}_2'$ è

$$v_2' = \sqrt{v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2}\,.$$

Numericamente:

$$v'_{2x} = \left(800\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\cdot 0{,}87 - 500\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cong 196 \text{ km/h}$$

$$v'_{2y} = \left(800\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\cdot 0{,}5 = 400 \text{ km/h}$$

$$\text{tg}\,\theta' = \frac{400}{196} = 2{,}04 \rightarrow \theta' \cong 64°$$

$$v'_2 = \sqrt{(196)^2 + (400)^2} = 444 \text{ km/h}\,.$$

III.4. Siano $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ le velocità del punto rispetto al sistema fisso Oxy ed a quello mobile $O'x'y'$, rispettivamente. Essendo $\vec{V}$ la velocità di trascinamento si ha:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}.$$

In modo analogo, per l'accelerazione si ha:

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (a_t = 0,\ \vec{a}_c = 0)$$

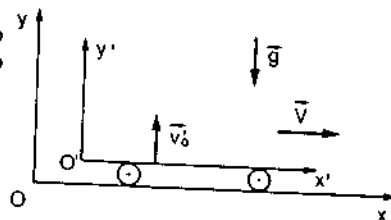
Nel riferimento mobile $O'x'y'$:

$$a'_x = 0, \begin{cases} v'_x = 0 \rightarrow x' = \text{cost} \\ v'_y = v'_0 - gt \end{cases} \quad \rightarrow \textit{traiettoria rettilinea verticale}$$

Nel riferimento fisso Oxy:

$$\vec{a} = -\vec{g}, \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \qquad (\vec{V} \text{ ha solo componente } x)$$

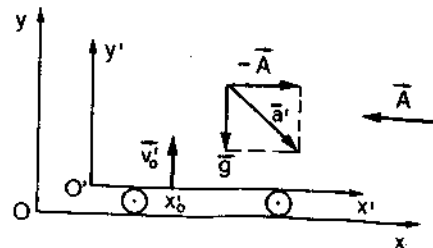
$$\begin{cases} v_x = V = \text{costante} \\ v_y = v'_y = v'_0 - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + Vt \\ y(t) = y_0 + v'_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \rightarrow \textit{traiettoria parabolica}$$

III.5. Nel sistema fisso (inerziale) Oxy si ha: $\vec{a} = -\vec{g}$ (corrispondente al fatto che è presente soltanto la forza reale dovuta al peso).
Nel sistema mobile $O'x'y'$ (non inerziale, nel quale oltre alla forza peso è presente la forza d'inerzia $-m\vec{A}$) si ha:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}$$

Dunque l'accelerazione relativa $\vec{a}'$ è uniforme nel riferimento mobile ed inclinata rispetto alla verticale.

Conviene risolvere il problema ponendoci nel sistema mobile:

$$\begin{cases} a'_x = -A \\ a'_y = -g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v'_x = -At \\ v'_y = v'_0 - gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'(t) = x'_0 - \frac{1}{2} A t^2 \\ y'(t) = v'_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

La quota

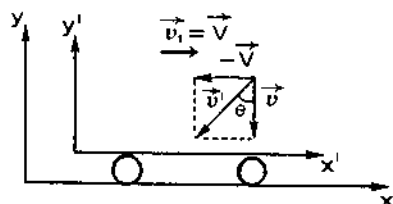
$$y' = 0 \quad \left(y' = v'_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0\right)$$

viene toccata per $t = 0$ (istante di lancio) e per

$$t = t^* = \frac{2 v'_0}{g}$$

(istante di ricaduta sul fondo del vagone). La distanza dal punto di lancio $(x' - x'_0)$ del punto di ricaduta sarà:

$$\Delta x' = x'(t^*) - x'_0 = -\frac{1}{2} A t^{*2} = -\frac{1}{2} A \frac{4 v'^2_0}{g^2} = -\frac{2 A v'^2_0}{g^2}$$

Osserviamo che, essendo $A < 0$ (rispetto all'orientazione, scelta come positiva per l'asse x', si tratta di frenamento) si ha $\Delta x' > 0$, cioè il corpo ricade in avanti.

III.6. $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_t = \vec{v} - \vec{V}$

$$V = v \operatorname{tg}\theta \rightarrow v = V/\operatorname{tg}\theta = \left(100 \cdot \frac{1000}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot \frac{1}{0{,}84} \cong 33 \text{ m/s}\,.$$

III.7. La mosca M, rispetto al sistema di riferimento fisso Oxy, si muove di moto circolare uniforme, su traiettoria di raggio r, con velocità angolare $(\omega + \omega')$. Per un osservatore solidale con il sistema fisso l'accelerazione sarà quella che compete ad un punto che si muove di moto circolare uniforme, e dunque un'accelerazione centripeta di modulo:

$$a = (\omega + \omega')^2 r = \omega^2 r + \omega'^2 r + 2\omega\omega' r$$

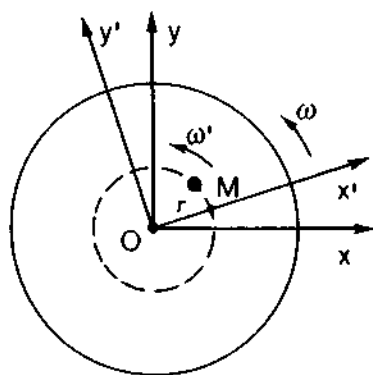
L'accelerazione rispetto al sistema fisso è dunque somma di tre termini, il cui significato è il seguente:

$\omega'^2 r$: è l'accelerazione relativa al sistema mobile (disco in rotazione); in questo sistema la mosca si muove di moto circolare uniforme con velocità angolare ω';

$\omega^2 r$: è l'accelerazione di trascinamento; infatti è proprio l'accelerazione che compete, rispetto al sistema fisso, ad un punto solidale con il sistema mobile (disco in rotazione con velocità angolare ω) che si trovi ad essere sovrapposto al punto (mosca) di cui si considera il moto. È da osservare che l'accelerazione di trascinamento, nei casi in cui il moto non sia traslatorio, ma implichi delle rotazioni, è diversa da punto a punto; per esempio, se la mosca transitasse nel punto O si troverebbe ad avere una accelerazione di trascinamento nulla;

$2\omega\omega' r$: è l'accelerazione complementare o di Coriolis; infatti $(\omega' r)$ rappresenta la velocità relativa v' (tangenziale alla circonferenza di raggio r) e dunque il prodotto $2\omega(\omega' r)$ è semplicemente il valore che assume il prodotto vettoriale:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

in questo caso, in cui i vettori $\vec{\omega}$ (perpendicolare al piano del foglio) e $\vec{v}'$ sono ortogonali tra loro ed orientati in modo tale da dare per $\vec{a}_c$ la direzione centripeta.

III.8. Preso un sistema di riferimento inerziale, solidale con le stelle fisse, la Terra è un sistema mobile che ruota con velocità angolare costante

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(24\ \text{h}) \cdot \left(3600\ \dfrac{\text{s}}{\text{h}}\right)} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \text{rad/s}\,.$$

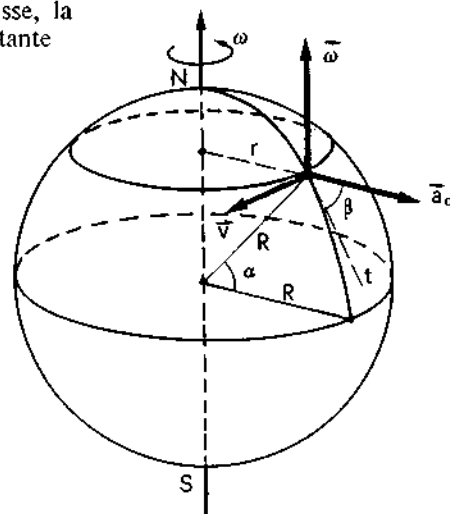
La direzione del vettore $\vec{\omega}$ è da Sud verso Nord.
L'accelerazione di Coriolis è:

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

La sua direzione è mostrata in figura ed il suo modulo è:

$$a_c = 2\,\omega v' = 2 \cdot \left(7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \cdot \left(10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 0{,}145\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(parecchio minore dell'accelerazione di gravità, in modulo).
La proiezione di $\vec{a}_c$ sulla tangente al meridiano vale:

$$a_{ct} = a_c \cos\beta = a_c \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = a_c \operatorname{sen}\alpha =$$
$$= 0{,}145 \cdot \operatorname{sen} 50° = 0{,}11\ \text{m/s}^2\,.$$

Capitolo quarto

IV.1. $F = m\,\dfrac{d\text{v}}{dt}\,;\quad \dfrac{d\text{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\,(a + b\,t) = b$

$$F = m\,b = (0{,}2\ \text{kg}) \cdot \left(0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 0{,}1\ \text{N}\,.$$

IV.2. $\vec{F} = m\,\vec{a} \;\rightarrow\; \begin{cases} a_x = F_x/m = \text{costante} \\ a_y = F_y/m = \text{costante} \end{cases}$

Le proiezioni del punto mobile sugli assi si muovono di moto rettilineo uniformemente accelerato per cui:

$$\text{v}_x = \text{v}_{ox} + a_x t\,;\quad \text{v}_y = \text{v}_{oy} + a_y t$$

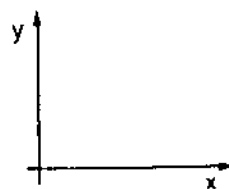
La condizione di quiete iniziale ($t = 0$) riduce la velocità a:

$$\text{v}_x = a_x t = \left(\frac{F_x}{m}\right) t\,;\quad \text{v}_y = \left(\frac{F_y}{m}\right) t$$

Integrando ancora ed imponendo la condizione iniziale di occupazione del punto origine per $t = 0$, si ha:

$$x(t) = \frac{1}{2}\,a_x t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{F_x}{m}\right) t^2\,;\quad y(t) = \frac{1}{2}\,a_y t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{F_y}{m}\right) t^2$$

Dalla prima equazione si ha:

$$m = \frac{F_x}{2\,x(t)}\,t^2 = \frac{(3\ \text{N})}{2 \cdot (125\ m)}\,(25\ \text{s}^2) = 0{,}3\ \text{kg}\,.$$

IV.3. Posto $t = 0$ per l'istante di inizio dell'azione frenante, il valore dell'impulso nell'intervallo di tempo compreso tra $t_1 = 0$ e $t_2 = 10$ s è:

$$I_{12} = \int_{t_1}^{t_2} f\,dt = q_2 - q_1 = m v_2 - m v_1 = -m v_0 \quad (v_2 = 0,\ v_1 = v_0)$$

$$I_{12} = -(10\ \text{kg})\left(3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = -30\ \text{N}\cdot\text{s}$$

Dall'impulso è immediato risalire alla forza costante

$$I_{12} = \int_{t_1}^{t_2} f\,dt = f(t_2 - t_1) \rightarrow f = \frac{I_{12}}{t_2 - t_1} = (-30\ \text{N}\cdot\text{s})\cdot\left(\frac{1}{10\ \text{s}}\right) = -3\ \text{N}$$

IV.4. La forza F, applicata alla massa totale $(m + M)$, le conferisce un'accelerazione a tale che:

$$F = (m + M)\,a \rightarrow a = \frac{F}{m + M} = \frac{10}{1,2} = 8,33\ \text{m/s}^2$$

Il carrello m, considerato come corpo singolo, si muove con accelerazione a, sotto l'azione della forza F_A. Dunque:

$$F_A = m\,a = (0,2\ \text{kg})\left(8,33\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 1,67\ \text{N}\,.$$

IV.5. Indicando con l la lunghezza del tratto di frenata e con F la forza frenante incognita, ed applicando il teorema dell'energia cinetica, si ha:

$$L = Fl = K_{\text{fin}} - K_{\text{in}} = -K_{\text{in}} = -\frac{1}{2}\,m v^2$$

($K_{\text{fin}} = 0$ perché la velocità finale è nulla).

Il lavoro risulta negativo perché forza frenante e spostamento hanno versi opposti:

$$|\vec{F}| = \frac{m v^2}{2l} = \frac{(10^3\ \text{kg})\,[(10^2/3,6)^2\ \text{m}^2/\text{s}^2]}{2\cdot(10^2\ \text{m})} = 3858\ \text{N}$$

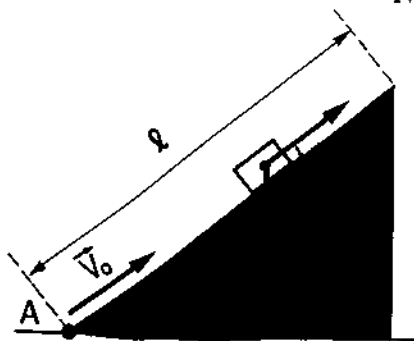
IV.6. Nella fase di salita, il teorema della energia cinetica si scrive:

$$L = K_{\text{fin}} - K_{\text{in}}$$

con $K_{\text{fin}} = 0\,,\quad K_{\text{in}} = \frac{1}{2}\,m v_0^2$

$$L = (m\vec{g})\cdot\vec{l} = mgl\cos\theta = -mgl\,\text{sen}\,\alpha$$

(essendo $\theta = \alpha + \pi/2$). Dunque:

$$L = -mgl\,\text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{2}\,m v_0^2 \rightarrow l = \frac{v_0^2}{2g\,\text{sen}\,\alpha} \simeq 10,2\ \text{m}\,.$$

Nella fase di discesa il corpo viene accelerato, partendo da fermo, ed il teorema dell'energia cinetica si scrive:

$$L = + mgl \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0 \rightarrow v_f = \sqrt{2gl \operatorname{sen}\alpha} = 10 \text{ m/s}$$

Al passaggio dal punto A, la velocità al ritorno è uguale in modulo alla velocità iniziale (campo di forze conservativo); è però cambiato il verso.

IV.7. Trattandosi di problema monodimensionale, il teorema dell'impulso si scrive:

$$I_{12} = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\, dt = q_2 - q_1 = m v$$

($q_1 = 0$ perché il corpo è inizialmente fermo).
Per il teorema della media si ha:

$$I_{12} = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\, dt = \bar{F}(t_2 - t_1) = \bar{F} \cdot \Delta t\,.$$

Dunque

$$\bar{F} = \frac{m v}{\Delta t}$$

dove $\bar{F}$ è il valor medio della forza e può essere considerata come una forza costante attiva per l'intervallo di tempo Δt.
Il teorema dell'energia cinetica si può scrivere, per il lavoro della forza $\bar{F}$:

$$L = \int_1^2 \bar{F} \cdot d\vec{s} \cong \bar{F} \cdot \Delta s = K_2 - K_1 = K_2 = \frac{1}{2} m v^2\,. \quad \text{Si ricava } \Delta s:$$

$$\Delta s = \frac{m v^2}{2\bar{F}} = \frac{m v^2}{2\, m v}\, \Delta t = \frac{v\, \Delta t}{2} = \frac{1}{2}\left(20\, \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(2 \cdot 10^{-3} \text{ s}) =$$

$$= 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2 \text{ cm}\,.$$

IV.8. Detta v la velocità del sasso appena uscito dalla fase di lancio, ed applicando il teorema dell'energia cinetica alla fase di salita fino a quota h, si ha:

$$L = -mgh = K_2 - K_1 = 0 - K_1 = -\frac{1}{2} m v^2$$

(il lavoro della forza peso è frenante)

$$v = \sqrt{2gh} = 14 \text{ m/s}\,.$$

Il teorema dell'impulso relativo alla fase di lancio si scrive:

$$\int_{t_1}^{t_2} (F - mg)\, dt \cong (F - mg)\, \Delta t = q_2 - q_1 = m v - 0 = m v$$

dove F è la forza impressa dalla mano al sasso ed è assunta costante.

$$F = mg + \frac{m v}{\Delta t} = 0{,}2 \cdot 9{,}8 + \frac{0{,}2 \cdot 14}{10^{-1}} = 1{,}96 + 28 \simeq 30 \text{ N}\,.$$

IV.9. Nei problemi di dinamica in cui intervengono fili di collegamento tra corpi, la forza di contatto che un filo esercita su un corpo può essere sostituita da una forza equivalente, detta *tensione*.
Nel caso in cui, in un sistema meccanico, varie parti materiali siano collegate tra loro (per esempio tramite fili o contatti diretti od altro) è conveniente considerare le varie parti come *corpi singoli*, sottoposti a forze che schematizzino le interazioni con le altre parti del sistema, e che includano le azioni esterne sul corpo stesso. Per questi corpi singoli si sviluppano le conseguenze delle leggi della dinamica.

Nel caso del problema, la schematizzazione di corpo singolo porta a considerare le masse m_1 ed m_2 separatamente: sulla massa m_1 agisce la tensione $\vec{\tau}_1$ orizzontale, dovuta al filo, mentre la forza peso è equilibrata, ad ogni istante, dalla reazione del piano e non ha effetto sul moto; sulla massa m_2 agisce la forza peso $m_2\vec{g}$, diretta verso il basso, e la tensione $\vec{\tau}_2$, dovuta al filo, diretta verso l'alto.

Il secondo principio della dinamica, applicato ai due corpi, si scrive, in forma generale:

corpo m_1: $\quad \tau_1 = m_1 a_x$

corpo m_2: $\quad \tau_2 - m_2 g = m_2 a_y$

Per quanto riguarda il modulo delle accelerazioni a_x ed a_y, l'inestensibilità del filo garantisce l'uguaglianza dei moduli: $|a_x| = |a_y| = a$. Data l'orientazione scelta per gli assi, si ha: $a_x = a$, $a_y = -a$.
Relativamente alle tensioni $\vec{\tau}_1$ e $\vec{\tau}_2$ si ha che:

– se non ci sono forze di attrito tangenziali sul piolo sul quale slitta il filo;
– e se il filo ha massa trascurabile; allora la tensione ha lo stesso modulo nei punti A e B. Nel sistema di riferimento scelto:

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau$$

Le due equazioni precedenti diventano allora:

$$\begin{cases} \tau = m_1 a \\ \tau - m_2 g = -m_2 a \end{cases}$$

$$a = \frac{\tau}{m_1} \rightarrow \tau - m_2 g = -\frac{m_2}{m_1}\tau$$

$$\tau\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = m_2 g \rightarrow \tau = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g$$

$$a = \frac{\tau}{m_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g\,.$$

Casi limite:

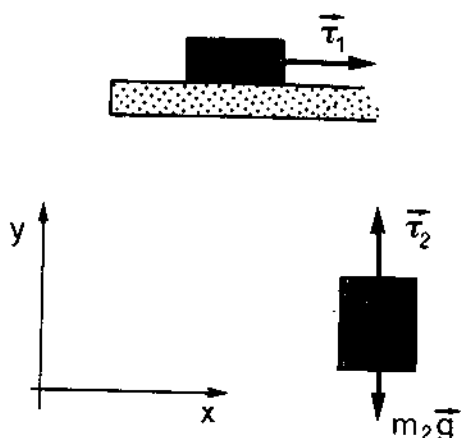
$m_2 >> m_1 \quad a \cong g$

(la massa m_1 procede, in pratica, con l'accelerazione di gravità)

$m_2 << m_1 \quad a \simeq 0$

Calcolo numerico:

$$\tau = \left(\frac{1 \cdot 0{,}5\ \text{kg}^2}{1{,}5\ \text{kg}}\right)\left(9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 3{,}27\ \text{N}$$

$$a = \frac{3{,}27\ \text{N}}{1\ \text{kg}} = 3{,}27\ \text{m/s}^2$$

IV.10. La tensione del filo sulla massa m_1 si esercita fino al momento di contatto con il suolo della massa m_2. In quel momento la velocità delle due masse, in modulo, si può ricavare dal teorema dell'energia cinetica. Il lavoro relativo alla massa m_2 è positivo (spostamento e forza peso concordi) e vale $L_2 = m_2 g h$; il lavoro per la massa m_1, che si sposta di h lungo il piano inclinato, vale $L_1 = - m_1 g h \operatorname{sen}\alpha$. Il lavoro totale vale dunque:

$$L = m_2 g h - m_1 g h \operatorname{sen}\alpha = K_{\text{fin}} - K_{\text{in}} = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 .$$

Si è tenuto conto del fatto che l'energia cinetica iniziale è nulla e che, finché il filo è in tensione, le due masse si muovono con la stessa velocità. La velocità v alla fine della fase di moto accelerato vale

$$v = \left[\frac{2gh}{m_1 + m_2}(m_2 - m_1 \operatorname{sen}\alpha)\right]^{1/2} .$$

A partire dal punto di arrivo al suolo di m_2, la massa m_1, che si trova ad avere velocità v, procede lungo il piano inclinato, di moto uniformemente ritardato, per un tratto di lunghezza l alla fine del quale si trova ad avere velocità nulla. Per il teorema dell'energia cinetica si ha:

$$L = - mgl \operatorname{sen}\alpha = K_{\text{fin}} - K_{\text{in}} = - K_{\text{in}} = - \frac{1}{2} m v^2 ,$$

da cui:

$$l = \frac{v^2}{2g \operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{2g \operatorname{sen}\alpha} \frac{2gh}{(m_1 + m_2)} (m_2 - m_1 \operatorname{sen}\alpha) =$$

$$= h \frac{(m_2 - m_1 \operatorname{sen}\alpha)}{(m_1 + m_2) \operatorname{sen}\alpha} = 2\,\text{m} .$$

IV.11. La forza agente su un corpo di massa m, in quiete nel sistema dell'ascensore, vale:

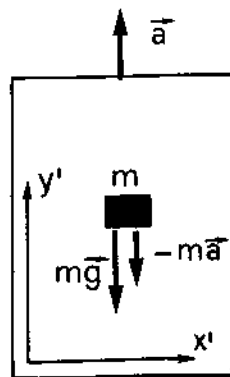
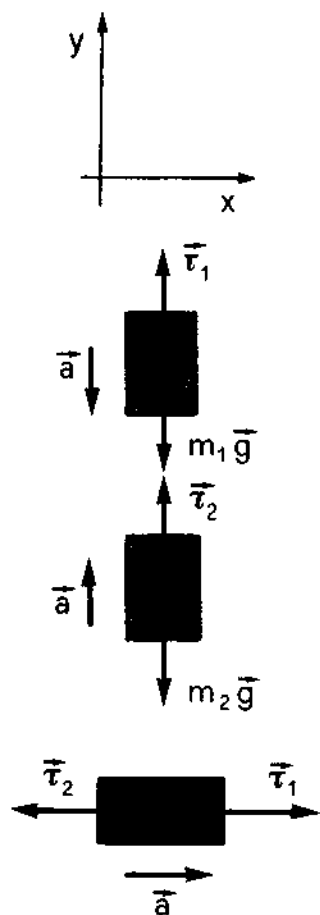
$$\vec{F}_{\text{reale}} + \vec{F}_{\text{fittizia}} + \vec{F}_{\text{Bilancia}} = 0$$

$$\vec{F}_{\text{reale}} = m\vec{g} ; \quad \vec{F}_{\text{fittizia}} = - m\vec{a}_t = - m\vec{a}$$

($\vec{a}$ rappresenta l'accelerazione di trascinamento del sistema mobile ed è uniforme, trattandosi di moto traslatorio).
Dunque forza peso e forza fittizia sono concordi e parallele e la forza che deve esercitare la bilancia sarà:

$$F_{\text{Bilancia}} = mg + ma \rightarrow m = \frac{F_{\text{Bilancia}}}{g + a} .$$

A terra, dove è attiva la sola forza reale mg, la bilancia indicherebbe:

$$F_{\text{Bilancia}} = mg = \left(\frac{g}{g+a}\right) F_{\text{Bilancia}} = \left(\frac{9{,}8}{9{,}8+2}\right) \cdot 100\,\text{kg}\,p = 83\,\text{kg}\,p \simeq 813\,\text{N} .$$

IV.12. Il secondo principio della dinamica, applicato alle singole masse m_1, m_2 ed m_3, tenendo conto del fatto che il filo è inestensibile e di massa trascurabile e che non ci sono attriti sui pioli *P*, si scrive:

m_1): $\tau_1 - m_1 g = - m_1 a \rightarrow \tau_1 = m_1 (g - a)$

m_2): $\tau_2 - m_2 g = + m_2 a \rightarrow \tau_2 = m_2 (g + a)$

m_3): $\tau_1 - \tau_2 = m_3 a$

Inserendo le espressioni di τ_1 e τ_2 nella terza equazione, si ha:

$$\tau_1 - \tau_2 = m_1 g - m_1 a - m_2 g - m_2 a = m_3 a \,,$$

da cui si ricava l'accelerazione a:

$$g\,(m_1 - m_2) = (m_1 + m_2 + m_3)\, a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2 + m_3)}\, g = \frac{(2 - 1)}{(2 + 1 + 3)}\, g = \frac{g}{6} = 1{,}63 \text{ m/s}^2$$

$$\tau_1 = m_1 (g - a) = 2 \cdot (9{,}8 - 1{,}63) = 16{,}3 \text{ N}$$

$$\tau_2 = m_2 (g + a) = 1 \cdot (9{,}8 + 1{,}63) = 11{,}4 \text{ N}$$

È da osservare che le tensioni relative ai due tratti di filo non sono uguali e sono tali che la loro differenza imprime alla massa m_3 l'accelerazione a che deve essere comune ai tre corpi m_1, m_2, m_3.

IV.13. La velocità di lancio v_o è legata all'impulso I dalla relazione:

$$I = q_{fin} - q_{in} = m v_o - 0 = m v_o \,.$$

Nella fase di salita il manicotto è sottoposto alla forza peso $m\vec{g}$ ed alla forza di attrito, entrambe dirette verso il basso. Tali forze, spostando il loro punto di applicazione della quantità h, riducono a zero l'energia cinetica iniziale del manicotto. Per il teorema dell'energia cinetica si ha:

$$L_s = - mgh - Ah = K_{fin} - K_{in} = - K_{in} = - \frac{1}{2} m v_o^2$$

dove A indica il modulo della forza di attrito (costante). Dunque

$$mgh + Ah = \frac{1}{2} m v_o^2$$

Nella fase di discesa, il manicotto è ancora sottoposto alla forza peso ed alla forza di attrito, che l'accompagnano per il tratto h considerato (prima che il manicotto tocchi il suolo). Il lavoro, questa volta, è positivo per la forza peso (forza e spostamento concordi), ma ancora negativo per la forza di attrito (sempre la forza di attrito ha verso contrario allo spostamento). Dunque

$$L_d = mgh - Ah = K_{fin} - K_{in} = K_{fin} = \frac{1}{2} m v^2$$

($K_{in} = 0$ perché la fase di discesa inizia con il manicotto fermo alla massima quota).

Le due espressioni del lavoro permettono di ricavare la velocità v_o in funzione della velocità di arrivo al suolo e della quota h. Infatti, dalle due relazioni:

$$\begin{cases} mgh + Ah = \frac{1}{2} m v_o^2 \\ mgh - Ah = \frac{1}{2} m v^2 , \end{cases}$$

eliminando, mediante somma m.a.m., la parte relativa all'attrito, si ha:

$$2mgh = \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$v_o^2 = 4gh - v^2 \rightarrow v_o = \sqrt{4gh - v^2} .$$

L'impulso richiesto è dunque:

$$I = m v_o = m\sqrt{4gh - v^2} = 2{,}89 \text{ N s} .$$

IV.14. $L = K_{fin} - K_{in} = K_{fin} = \frac{1}{2} m v^{*2}$

dove v^* rappresenta la velocità del punto al tempo $t = t^*$.
La velocità v^* si calcola, per esempio, tramite l'uso del teorema dell'impulso:

$$\int_0^{t^*} F(t)\, dt = q_{fin} - q_{in} = m v^*$$

$$\int_0^{t^*} F(t)\, dt = \int_0^{t^*} F_o \operatorname{sen}(\alpha t)\, dt = \frac{F_o}{\alpha} [-\cos\alpha t]_0^{t^*} = \frac{F_o}{\alpha} (1 - \cos\alpha t^*) .$$

Dunque

$$v^* = \frac{F_o}{m\alpha} (1 - \cos\alpha t^*) = \frac{(10 \text{ N})}{(1 \text{ kg})(\pi \text{ s}^{-1})} \left(1 - \cos\pi \frac{1}{6}\right) = 1{,}59 \text{ m/s}$$

$$L = \frac{1}{2} m v^{*2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1{,}59)^2 = 1{,}26 \text{ J} .$$

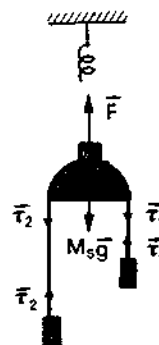
IV.15. Il supporto S è fermo, mentre le masse M_1 ed M_2 si muovono. Ciò implica che è nullo il risultante delle forze applicate al supporto stesso:

$$F - \tau_1 - \tau_2 - M_S g = 0 \rightarrow F = \tau_1 + \tau_2 + M_S g .$$

Per il fatto che manca l'attrito e la massa del filo è trascurabile si ha

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau .$$

La seconda legge della dinamica, applicata ai corpi singoli M_1 ed M_2, assume allora la forma:

$$\begin{cases} \tau - M_1 g = -M_1 a & \text{(il corpo } M_1 \text{ scende)} \\ \tau - M_2 g = +M_2 a & \text{(il corpo } M_2 \text{ sale)} \end{cases}$$

si ricava:

$$a = \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right) g \; ; \qquad \tau = 2 \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} g \, .$$

Da cui:

$$F = 2\tau + M_S g = \frac{4 M_1 M_2}{M_1 + M_2} g + M_S g \cong 157 \text{ N} \, .$$

Osservazione: Se lo scorrimento del filo di collegamento tra le masse M_1 ed M_2 fosse impedito da qualche freno il dinamometro misurerebbe una forza diversa.

IV.16. Dal teorema di conservazione dell'energia meccanica per campi conservativi $T + U = E$ si ha che, in corrispondenza del massimo di velocità, e quindi del massimo di energia cinetica, si deve avere il minimo dell'energia potenziale. La $U = U(x)$ presenta un minimo per $x = x_{MIN}$. Tale minimo si ha per

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}(Ax^{-2} - Bx^{-1}) = -2Ax^{-3} + Bx^{-2} = x^{-2}\left(B - \frac{2A}{x}\right) = 0$$

da cui segue

$$\frac{2A}{x_{MIN}} = B \rightarrow x_{MIN} = \frac{2A}{B} = 4 \text{ m}$$

$$U_{MIN} = U(x_{MIN}) = A\frac{B^2}{4A^2} - B\frac{B}{2A} = -\frac{1}{4}\frac{B^2}{A} = -0{,}63 \text{ J}$$

$$E = T_{MAX} + U_{MIN} = \frac{1}{2} m v_{MAX}^2 + U_{MIN} = 4{,}5 - 0{,}63 = 3{,}87 \text{ J} \, .$$

La forza, nel punto di minima energia potenziale, è nulla.

IV.17. L'equilibrio è caratterizzato dalla condizione $\frac{dU}{dx} = 0$. Dunque

$$\frac{dU}{dx} = 2Ax - 4Bx^3 = 2x(A - 2Bx^2) = 0$$

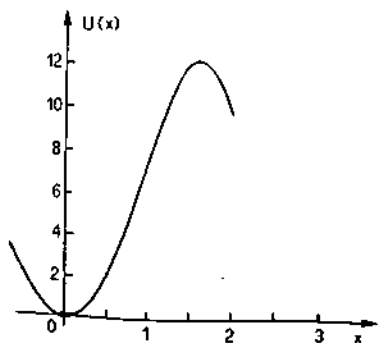
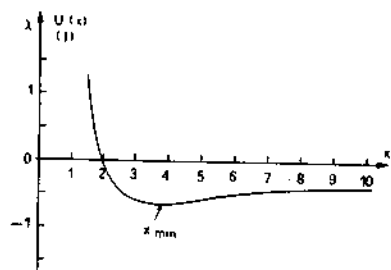
per cui:

$$x = 0 \quad \text{ed} \quad x = \pm\sqrt{A/2B} = \pm 1{,}58 \text{ m.}$$

Dal grafico si vede che $x = 0$ corrisponde ad un minimo e quindi ad una posizione di equilibrio stabile, mentre $x = 1{,}58$ m corrisponde ad un massimo e quindi ad una posizione di equilibrio instabile.
Alla stessa conclusione si perviene considerando i segni delle derivate seconde nei punti a derivata prima nulla:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 2A - 12Bx^2 \, .$$

Per $x = 0$, $\quad d^2U/dx^2 = 2A > 0 \quad$ (minimo)

per $x = \sqrt{\frac{A}{2B}}$, $\quad d^2U/dx^2 = -4\text{A} < 0 \quad$ (massimo)

IV.18. La forza è

$$F = \frac{dV}{dx} = -\frac{dU}{dx} = -2Ax,$$

ed è diretta verso l'origine dell'asse x. Nel caso del problema, con il punto lanciato verso le x crescenti, la forza è frenante, per cui si arriverà ad un punto di fermata $x = x^*$. Per il calcolo di x^* è conveniente usare il teorema di conservazione dell'energia meccanica:

$$T_o + U(x = 0) = 0 + U(x^*)$$

(per $x = x^*$ il corpo si ferma e $T = 0$). D'altra parte $U(x = 0) = 0$ e quindi:

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = A x^{*2} \rightarrow x^* = \sqrt{\frac{m v_o^2}{2A}} = 2 \text{ m}.$$

IV.19. Il punto è soggetto ad una forza diretta verso l'origine

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\alpha \qquad \text{(costante)}.$$

Il problema può essere risolto sia con la cinematica del moto rettilineo uniformemente accelerato, sia con l'uso del teorema di conservazione dell'energia meccanica. Con la conservazione dell'energia meccanica si ha:

$$T^* + U(x^*) = T_o + U(x = 0)$$

in cui

$T^* = 0$ (punto lasciato da fermo)

$U(x = 0) = 0$

Dunque:

$$\alpha x^* = \frac{1}{2} m v_o^2$$

dove v_o è la velocità con cui il punto passa per l'origine

$$v_o = \sqrt{\frac{2\alpha x^*}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{0{,}2}} = 4{,}47 \text{ m/s}.$$

IV.20. Si ha equilibrio per $F = 0$ e quindi $\dfrac{dU}{dr} = 0$

$$\frac{dU}{dr} = A\left[-12\frac{B^{12}}{r^{13}} - \left(-6\frac{B^6}{r^7}\right)\right] = \frac{6AB^6}{r^7}\left(1 - \frac{2B^6}{r^6}\right)$$

$$\frac{dU}{dr} = 0 \quad \text{per} \quad \left(1 - \frac{2B^6}{r_o^6}\right) = 0$$

da cui

$$r_o = (2B^6)^{1/6} = B \cdot 2^{1/6} = 3 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}12 \simeq 3{,}37 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

IV.21.
$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} = 2x + y; & F_x(1,0,0) = 2\ \text{N} \\ F_y = -\dfrac{\partial U}{dy} = x \quad ; & F_y(1,0,0) = 1\ \text{N} \\ F_z = -2z \quad ; & F_z(1,0,0) = 0\ \text{N} \end{cases}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{4+1+0} = 2{,}24\ \text{N}$$

$$F_x = F\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{F_x}{F} = \frac{2}{2{,}24} = 0{,}894 \rightarrow \theta = 26{,}6°$$

Capitolo quinto

V.1. Supponendo che l'unica forza gravitazionale non trascurabile sia dovuta alla Terra, la terza legge di Keplero si scrive:

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{cost} = \frac{T_L^2}{R_L^3} = \frac{T_S^2}{R_S^3}$$

avendo indicato con T_L e T_S i periodi di rivoluzione della Luna e del satellite, rispettivamente; e con R_L ed R_S i raggi delle orbite circolari della Luna e del satellite, rispettivamente.
Dunque

$$R_S = R_L\left(\frac{T_S^2}{T_L^2}\right)^{1/3}$$

Poiché $T_S = 24\ \text{h} = 1\ d$ e $T_L \cong 27\ d$ si ha

$$R_S = 3{,}8 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{27}\right)^{2/3} = 4{,}2 \cdot 10^4\ \text{km}\,.$$

V.2. Valgono le relazioni di conservazione:

Energia meccanica: $T + U = E = \frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{GMm}{r_P} = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{GMm}{r_A}$

Velocità areolare: $\frac{1}{2} r_P v_P = \frac{1}{2} r_A v_A$

dove m è la massa del satellite ed M quella della Terra.

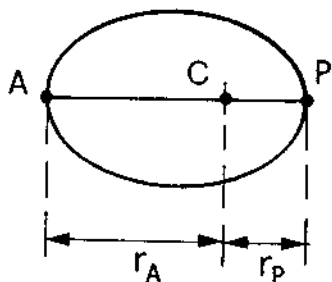
$v_A = v_P \frac{r_P}{r_A}$, che, sostituita nella $T + U = E$, dà:

$$\frac{1}{2} v_P^2 - \frac{GM}{r_P} = \frac{1}{2} v_P^2 \frac{r_P^2}{r_A^2} - \frac{GM}{r_A} \rightarrow v_P^2 = \frac{2GMr_A}{r_P(r_A + r_P)}$$

La quantità (GM) è ricavabile dalla legge di gravitazione universale applicata ad un qualsiasi corpo che cada con accelerazione g in prossimità della superficie della Terra:

$$\frac{GMm}{R_T^2} = mg \rightarrow GM = gR_T^2$$

Dunque:

$$v_P = \sqrt{\frac{2gR_T^2 r_A}{r_P(r_A + r_P)}}\,; \quad v_A = v_P \frac{r_P}{r_A}\,.$$

V.3. La seconda legge della dinamica, applicata al satellite di massa m, in moto circolare uniforme su traiettoria (radente) di raggio $r \simeq R_L$, con R_L raggio lunare, si scrive:

$$\frac{G M_L m}{R_L^2} = m a = m a_n = m \omega^2 R_L,$$

da cui

$$M_L = \frac{\omega^2 R_L^3}{G}.$$

Indicando con ρ_L la densità media della Luna, si ha:

$$M_L = \rho_L \frac{4}{3} \pi R_L^3 = \frac{4\pi^2 R_L^3}{G T^2}$$

da cui:

$$\rho_L = \frac{3\pi}{G T^2} = 3{,}24 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

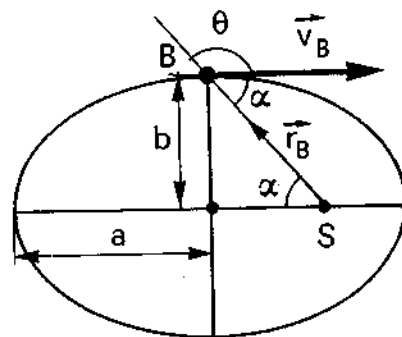
V.4. La velocità areolare costante vale:

$$\frac{\text{area ellisse}}{\text{periodo}} = \frac{\pi a b}{T}.$$

Nel punto B la velocità areolare si esprime come:

$$\frac{1}{2} r_B v_B \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} r_B v_B \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} b v_B$$

(essendo $b = r_B \operatorname{sen}\alpha$). Dunque:

$$\frac{1}{2} b v_B = \frac{\pi a b}{T} \rightarrow v_B = \frac{2\pi a}{T}.$$

V.5. Detto a_H il semiasse maggiore dell'ellisse della cometa di Halley, a causa del piccolo valore della distanza tra il suo perielio ed il Sole, potremo porre:

Distanza Afelio-Sole $\simeq 2 a_H$.

Applicando la terza legge di Keplero alla Terra ed alla cometa di Halley, si ha:

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{cost} = \frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{T_H^2}{a_H^3}$$

da cui:

$$a_H = a_T \left(\frac{T_H}{T_T}\right)^{2/3}$$

dove $T_H = 75$ anni, $T_T = 1$ anno

$$a_H = 150 \cdot 10^6 \left(\frac{75}{1}\right)^{2/3} = 2{,}67 \cdot 10^9 \text{ km}.$$

Perciò: distanza Afelio (Halley)-Sole $= 5{,}33 \cdot 10^9$ km.

V.6. $\Delta K = K_f - K_{in} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_{in}^2 .$

La seconda legge della dinamica si scrive:

$$\frac{GMm}{(R_T + z_{in})^2} = m \frac{v_{in}^2}{(R_T + z_{in})},$$

ed analogamente per la posizione finale. Da qui:

$$v_{in}^2 = \frac{GM}{R_T + z_{in}} \qquad v_f^2 = \frac{GM}{R_T + z_f}$$

e quindi:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_{in}^2) = \frac{1}{2} m\, GM \frac{(z_{in} - z_f)}{(R_T + z_f) \cdot (R_T + z_{in})} .$$

Sapendo che (vedi esercizio precedente): $GM = gR_T^2$ si ricava il valore numerico della variazione di energia cinetica: $\Delta K = 1{,}1 \cdot 10^{10}$ J.

V.7. Il moto è circolare uniforme e la seconda legge della dinamica si scrive:

$$F = \frac{\alpha}{r} = m a_c ,$$

essendo a_c l'accelerazione centripeta. Dunque:

$$\frac{\alpha}{r} = m a_c = m \omega^2 r = m \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

Dunque:

$$\frac{T^2}{r^2} = m \frac{4\pi^2}{\alpha} = \text{costante} \rightarrow \frac{T}{r} = \text{costante} .$$

Dunque: $T \propto r$ (periodo proporzionale al raggio)

mentre la terza legge di Keplero per il campo gravitazionale comporta $T^2 \propto r^3$.

V.8. L'elongazione statica α è tale da realizzare l'equilibrio tra forza elastica e forza peso:

$$mg - k\alpha = 0 .$$

La costante elastica k della molla vale

$$k = \frac{mg}{\alpha} .$$

Disposta la molla orizzontalmente, l'oscillatore armonico che così si realizza ha pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{\alpha m}} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} .$$

Il periodo di oscillazione vale:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{g}} = 0{,}63 \text{ s} .$$

V.9. Il secondo principio della dinamica applicato al corpo di massa m, relativamente al suo moto monodimensionale orizzontale, si scrive:

$$F = -k_1 x - k_2 x = m\,(d^2x/dt^2)$$

essendo x lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio. È da notare che, per ogni x, le forze elastiche delle due molle agiscono in modo concorde. L'equazione del moto è dunque:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right)x = 0\,,$$

la cui soluzione è del tipo:

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi) \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \text{ (pulsazione)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \cong 1\ \mathrm{s}\,.$$

V.10. Dette x_1 ed x_2 le elongazioni delle due molle rispetto alle relative lunghezze di riposo, ed L_1 ed L_2 le lunghezze nello stato finale, deve essere:

$$L = L_1 + L_2$$

$$L_1 = l_1 + x_1\,, \quad L_2 = l_2 + x_2\,.$$

La forza F, applicata al punto A, si trasmette inalterata all'estremo B della prima molla, per cui, all'equilibrio:

$F - k_1 x_1 = 0$ ed anche

$F - k_2 x_2 = 0$ per cui:

$$k_1 x_1 = k_2 x_2\,.$$

Dunque gli allungamenti x_1 ed x_2 debbono soddisfare le condizioni:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = L - l_1 - l_2 \\ x_1 = \dfrac{k_2}{k_1}\,x_2 \end{cases}$$

Risolvendo si ha:

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2}(L - l_1 - l_2) = 6{,}7\ \mathrm{cm}$$

$$x_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2}(L - l_1 - l_2) = 3{,}3\ \mathrm{cm}$$

da cui

$$L_1 = 10 + 6{,}7 = 16{,}7\ \mathrm{cm}$$

$$L_2 = 20 + 3{,}3 = 23{,}3\ \mathrm{cm}\,.$$

V.11. L'effetto dell'urto è di conferire energia cinetica $\frac{1}{2} m v^2$ al corpo che, trovandosi al massimo dell'oscillazione ($x = A_0$), aveva velocità nulla. Subito dopo l'urto, il corpo ha dunque energia meccanica

$$K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k A_0^2 .$$

Con questo contenuto energetico E costante, il corpo prosegue ad oscillare con ampiezza maggiore della precedente.
È possibile esprimere E in funzione dell'ampiezza di oscillazione finale. Infatti per $x = A$, $v = 0$ e quindi

$$E = \frac{1}{2} k A^2 .$$

Dunque

$$K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k A_0^2 = \frac{1}{2} k A^2 ,$$

da cui:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - A_0^2)} = \omega \sqrt{A^2 - A_0^2}$$

L'impulso vale $I = m v$ ($I = q_f - q_{in} = q_f$) e quindi:

$$I = m \omega \sqrt{A^2 - A_0^2} = m \frac{2\pi}{T} \sqrt{A^2 - A_0^2}$$

$$I = 1 \cdot \frac{2\pi}{6{,}28} \sqrt{(0{,}2) - (0{,}1)^2} = 0{,}17 \text{ N s} .$$

V.12. In assenza di attriti, si conserva l'energia meccanica totale:

$$K_{in} + U_{in} = K_f + U_f$$

dove $U = \frac{1}{2} k x^2$ è l'energia potenziale della molla. Si ha:

$U_{in} = 0$ (molla a riposo)

$K_{in} = \frac{1}{2} m v^2$ (energia cinetica iniziale)

$U_f = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2$ (molla completamente compressa)

$K_f = 0$ (massa arrivata alla quiete).

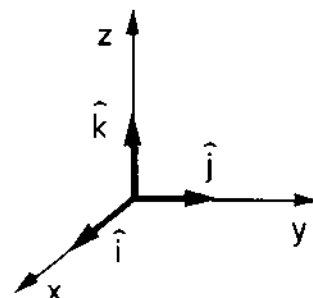
Dunque

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2$$

$$l = v \sqrt{\frac{m}{k}} \cong 16 \text{ cm}$$

V.13. Il campo di forze è centrale e la velocità areolare si conserva. Basta calcolare la velocità areolare all'istante iniziale:

$$\overrightarrow{\text{velocità areolare}} = \frac{1}{2}\,\vec{r}\times\vec{v} = \frac{1}{2}\,[0\cdot\hat{\imath}+0\cdot\hat{\jmath}+2\hat{k}] = \left(1\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)\hat{k}$$

$$\left(\vec{r}\times\vec{v} = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ x & y & z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\right).$$

V.14. Un corpo, sottoposto all'azione della forza di gravità e della resistenza del mezzo del tipo $F = -bv$, arriva ad avere una velocità di regime costante v_∞, dal momento che si realizza un equilibrio dinamico ($a = 0$) tra la forza mg diretta verso il basso e la forza resistente $-bv_\infty$. Dunque, a regime, $mg - bv_\infty = 0 \rightarrow v_\infty = mg/b$ (vedi anche formula [V.7]).
Nel caso del problema, la dipendenza del coefficiente b dalla geometria è del tipo di proporzionalità all'area della sezione della sfera: $b = \alpha\pi R^2$ con α costante.
Per le due sfere, aventi la stessa densità ρ, si ha:

$$v_{1\infty} = \frac{m_1 g}{b_1} = \frac{4}{3}\pi R_1^3\rho\,\frac{g}{\alpha\pi R_1^2} = \frac{4\rho g}{3\alpha}\,R_1$$

$$v_{2\infty} = \frac{m_2 g}{b_2} = \frac{4\rho g}{3\alpha}\,R_2$$

Dunque

$$\frac{v_{1\infty}}{v_{2\infty}} = \frac{R_1}{R_2} = r$$

V.15. Detta F_M la forza con cui il motore spinge, a regime, la macchina, si ha:

$$F_M - bv_\infty = 0 \rightarrow F_M = bv_\infty$$

la corrispondente potenza è:

$$P_\infty = F_M\cdot v_\infty = bv_\infty^2 = 27\ \text{kW} = 36\ \text{Hp}$$

(1 Hp $\cong$ 0,75 kW).

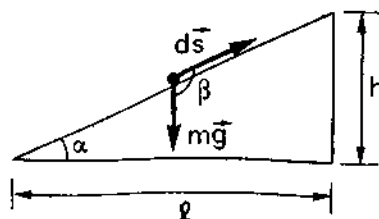
V.16. L'angolo α è legato alla pendenza percentuale (p%) dalla relazione:

$$(p\%) = \frac{h}{l} = \frac{l\,\text{tg}\,\alpha}{l} = \text{tg}\,\alpha$$

Per $p = 10\% = 0{,}1$ si ha $\text{tg}\,\alpha \simeq \text{sen}\,\alpha \simeq \alpha$.

Detto $d\vec{s}$ lo spostamento dell'auto nel tempo dt, il lavoro della forza peso è:

$$dL_P = mg\cos\beta\,ds = mg\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)ds =$$
$$= -mg\,\text{sen}\,\alpha\,ds = -mg\,\text{sen}\,\alpha\,v\,dt$$

essendo v la velocità con cui procede l'auto (in salita il lavoro della forza peso è negativo, frenante).

La potenza della resistenza del mezzo è

$$P_R = F_R \mathrm{v} = -b\mathrm{v}^2$$

e quindi il lavoro frenante sviluppato nel tempo dt vale:

$$dL_R = -b\mathrm{v}^2\,dt\,.$$

Nello stesso intervallo di tempo dt, il motore sviluppa un lavoro positivo Pdt che, a regime, non altera più l'energia cinetica dell'auto e che, quindi, deve uguagliare la somma dei lavori frenanti

$$P\,dt = mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{v}\,dt + b\mathrm{v}^2\,dt\,.$$

La velocità deve dunque soddisfare l'equazione:

$$b\mathrm{v}^2 + (mg\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\mathrm{v} - P = 0$$

$$\mathrm{v} = -\frac{mg\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2b} + \frac{1}{2b}\sqrt{(mg\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 + 4bP} =$$

$$= 24{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 88{,}4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

V.17. L'equazione del moto è:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

la cui soluzione è

$$x(t) = A\,e^{\alpha_1 t} + B\,e^{\alpha_2 t}$$

con

$$\alpha_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\,.$$

Il segno della quantità $\left(\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}\right)$ condiziona le caratteristiche del moto. Nel caso del problema si ha:

$$\left(\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}\right) = \frac{4}{4\cdot 1} - \frac{40}{1} = -39 < 0\,.$$

In questo caso la soluzione diventa:

$$x(t) = A_0\,e^{-\frac{b}{2m}t}\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

$$\text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{39} = 6{,}25\ \mathrm{s}^{-1}$$

Il periodo è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \cong 1\ \mathrm{s}\,.$$

L'ampiezza dopo 3 periodi vale:

$$A(t = 3T) = A_0\,e^{-\frac{b}{2m}\cdot(3T)} \cong A_0\,e^{-3} \simeq 1\ \mathrm{cm}.$$

V.18. Il sistema di riferimento non inerziale costituito dal carrello è sede, sulla massa m, di un campo di forze uniforme:

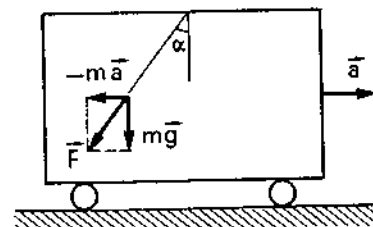
$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{reale}} + \vec{F}_{\text{fittizia}} = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a}) .$$

Nel carrello, per quanto riguarda il moto della massa m, tutto va come se l'accelerazione di gravità fosse diventata in modulo:

$$g_r = \frac{|\vec{F}|}{m} = \sqrt{g^2 + a^2} = 11 \text{ m/s}^2$$

(e con direzione non verticale).

Con procedimento del tutto simile a quello usato per ricavare il periodo di oscillazione del pendolo in presenza della sola forza peso, si ha:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_r}} = 6{,}28 \cdot \sqrt{\frac{1}{11}} = 1{,}9 \text{ s} .$$

V.19. Il secondo principio della dinamica si scrive:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} .$$

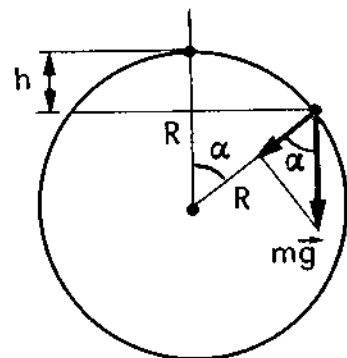
Proiettando sulla normale alla traiettoria orientata positivamente verso l'esterno si ha

$$-\, mg \cos\alpha + N = -\, m a_n .$$

L'accelerazione centripeta a_n vale v^2/R.
Applicando il teorema dell'energia cinetica si ricava la velocità v:

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v^2 = 2gh = 2gR(1 - \cos\alpha) .$$

Dunque:

$$N = mg\cos\alpha - mv^2/R = mg\cos\alpha - 2mg(1 - \cos\alpha) = mg(3\cos\alpha - 2) .$$

V.20. La reazione normale $N(\alpha) = mg(3\cos\alpha - 2)$ assume il suo massimo valore alla sommità del profilo cilindrico (dove, essendo $\alpha = 0$, $N(0) = mg$) e va gradualmente diminuendo al crescere di α. Nel momento in cui $N = 0$, cessa il contatto tra corpo e cilindro ed il corpo procede in caduta libera. L'angolo per cui $N = 0$ è tale che:

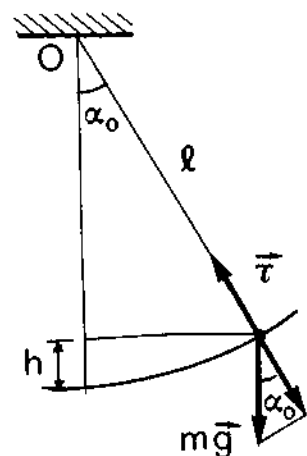
$$3\cos\alpha - 2 = 0 \rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3}$$

e dunque $\alpha = 48{,}2°$.

V.21. In un punto qualsiasi dell'oscillazione del pendolo, la seconda legge della dinamica si scrive:

$$m\vec{g} + \vec{\tau} = m\vec{a} .$$

Proiettando sulla normale alla traiettoria, orientata verso l'esterno rispetto al punto O, si ha:

$$mg\cos\alpha - \tau = -\, m a_n = -\, m\frac{v^2}{l}$$

per cui la tensione del filo vale:

$$\tau = mg\cos\alpha + m\frac{v^2}{l}.$$

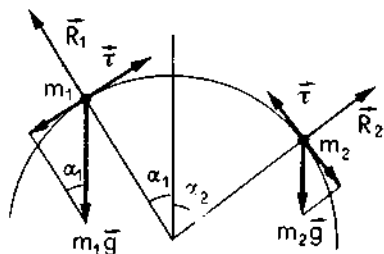
Il valor massimo della tensione τ_{MAX}, ad ampiezza di oscillazione α_o fissa, si ottiene nel punto di massima quota, in cui:

$$\cos\alpha = 1, \quad v = v_{MAX} \text{ con } \quad \frac{1}{2}mv_{MAX}^2 = mgl(1-\cos\alpha_o).$$

Dunque:

$$\tau_{MAX} = \tau(\alpha_o) = mg + m\frac{v_{MAX}^2}{l} = mg + \frac{m}{l}2gl(1-\cos\alpha_o) =$$
$$= 3mg - 2mg\cos\alpha_o = mg(3-2\cos\alpha_o).$$

La rottura del filo si produrrà nel punto di minima quota, quando il carico di rottura uguaglierà τ_{MAX}:

$$\text{carico di rottura} = \tau_{MAX} = 1\cdot 9{,}8\cdot\left(3-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 15{,}5\ \text{N}.$$

V.22 Per l'equilibrio, considerando le due masse come corpi singoli:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{\tau} = 0 \\ m_2\vec{g} + \vec{R}_2 + \vec{\tau} = 0 \end{cases}$$

È da tenere conto che la tensione $\vec{\tau}$ ha lo stesso modulo ovunque nel filo e la direzione della tangente al filo.
Proiettando sulla tangente si ha:

$$\begin{matrix} m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 = \tau \\ m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2 = \tau \end{matrix} \rightarrow \operatorname{sen}\alpha_2 = \frac{m_1}{m_2}\operatorname{sen}\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 = 43{,}2°.$$

V.23. Per il teorema dell'energia cinetica, la variazione di energia cinetica tra i punti di massima e minima quota, è pari al lavoro della forza peso, che sposta il suo punto di applicazione di un dislivello pari a $2l$. La reazione vincolare, puramente normale alla traiettoria, non compie lavoro. Dunque

$$-mg2l = K_f - K_{in}.$$

Il lavoro della forza peso è negativo (spostamento verso l'alto). Pertanto:

$$K_f = K_{in} - 2mgl = \frac{q_{in}^2}{2m} - 2mgl.$$

Applicando il secondo principio della dinamica nel punto di massima quota, una volta scelto come riferimento un sistema inerziale solidale con il punto fisso di sospensione del pendolo, si ha:

$$mg + \tau = ma_n = m\frac{v^2}{l}$$

(è da osservare che, nel punto di massima quota, peso e tensione sono paralleli e concordi e l'accelerazione è puramente centripeta).

Essendo $v^2 = \frac{2K_f}{m}$, si ottiene:

$$\tau = m\frac{v^2}{l} - mg = 2\frac{K_f}{l} - mg = \frac{2}{l}\left(\frac{q_{in}^2}{2m} - 2mgl\right) - mg =$$

$$= \frac{q_{in}^2}{ml} - 4mg - mg = \frac{q_{in}^2}{ml} - 5mg = 308{,}8 \text{ N}.$$

Osserviamo che, se si fosse scelto un sistema di riferimento non inerziale solidale con la massa m del pendolo, si sarebbe scritto:

$$\bar{F}_{reale} + \bar{F}_{fittizia} = m\bar{a}_r$$

$\left(F_{fittizia} = \text{forza centrifuga} = -m\frac{v^2}{l}\right)$, con $a_r = 0$, dal momento che la massa è fissa nel sistema di riferimento scelto. Da qui:

$$mg + \tau - m\frac{v^2}{l} = 0$$

che, ovviamente, a parte l'interpretazione fisica dei termini, coincide con la relazione precedente.

V.24. La forza di attrito $f_t = \mu_c N$ con $N = mg$ compie un lavoro negativo

$$L = -\mu_c mgl,$$

in corrispondenza del quale c'è una variazione di energia cinetica

$$L = -\mu_c mgl = K_f - K_o = -K_o = -\frac{1}{2}mv_o^2.$$

Si ricava il coefficiente di attrito dinamico:

$$\mu_c = \frac{v_o^2}{2gl} = 0{,}16.$$

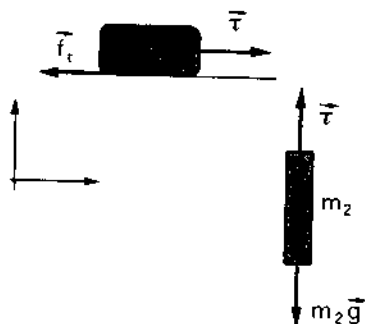
Il secondo principio della dinamica consente di ricavare l'andamento della velocità in funzione del tempo:

$$f_t = ma \rightarrow -\mu_c mg = m\frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = -\mu_c g.$$

Integrando si ha:

$$v(t) = v_o - \mu_c gt.$$

Il tempo t^* di dimezzamento della velocità si ricava dalla relazione:

$$v(t^*) = \frac{v_o}{2} = v_o - \mu_c gt^* \rightarrow t^* = \frac{v_o}{2\mu_c g} = 1{,}6 \text{ s}.$$

V.25. Supponendo il filo di massa trascurabile ed il piolo P privo di attrito, la tensione è la stessa (in modulo) lungo tutto il filo.

$$\tau - \mu_c m_1 g = m_1 a \qquad (1$$
$$\tau - m_2 g = -m_2 a \qquad (2$$

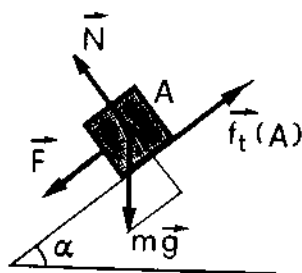
Sottraendo 2) da 1) si ha:

$$m_2 g - \mu_c m_1 g = (m_1 + m_2)\, a\,,$$

da cui:

$$a = \left(\frac{m_2 - \mu_c m_1}{m_1 + m_2}\right) g = 5{,}55 \text{ m/s}^2\,.$$

Dalla 2) si ha:

$$\tau = m_2 (g - a) = 8{,}5 \text{ N}\,.$$

V.26. A) $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{f}_t^{(A)} = m\vec{a}\,,$

con $f_t^{(A)} = \mu_A N = \mu_A mg\cos\alpha$ che, proiettata nella direzione del piano inclinato (orientato verso il basso), dà:

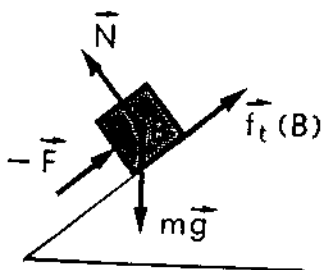
$$mg\,\mathrm{sen}\,\alpha + F - \mu_A mg\cos\alpha = ma$$

B) $mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - F - \mu_B mg\cos\alpha = ma\,.$

Sottraendo m.a.m. si ha:

$$F = \frac{mg\cos\alpha}{2}(\mu_A - \mu_B) = 0{,}63 \text{ N}\,.$$

Sommando m.a.m. si trova il valore dell'accelerazione con cui scendono le due masse:

$$a = g\left[\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}(\mu_A + \mu_B)\cos\alpha\right].$$

V.27. Conviene decomporre il moto nelle due fasi di salita e discesa. Detta l la lunghezza del tratto di piano inclinato percorso prima di fermarsi, il teorema dell'energia cinetica, applicato per la salita e la discesa separatamente, si scrive:

Salita) $L_{TOT}^{(S)} = -(mg\,\mathrm{sen}\,\alpha)\, l - (\mu_c\, mg\cos\alpha)\, l = K_f - K_1 = -K_1$

Discesa) $L_{TOT}^{(D)} = +(mg\,\mathrm{sen}\,\alpha)\, l - (\mu_c\, mg\cos\alpha)\, l = K_2 - K_f = K_2$

$$\begin{cases} mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\; l + \mu_c\, mg\cos\alpha\; l = K_1 \\ mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\; l - \mu_c\, mg\cos\alpha\; l = K_2 \end{cases}$$

Sommando e sottraendo m.a.m. si ha:

$$2mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\; l = K_1 + K_2 \rightarrow l = \frac{K_1 + K_2}{2mg\,\mathrm{sen}\,\alpha}$$

$$2\mu_c mg\cos\alpha\; l = K_1 - K_2 \rightarrow \mu_c = \frac{K_1 - K_2}{2mg\cos\alpha\; l}$$

$$\mu_c = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{(v_1^2 - v_2^2)}{(v_1^2 + v_2^2)}\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}38\,.$$

V.28. La tensione del filo raggiunge il suo massimo valore nel punto di minima quota dell'oscillazione della massa m. In corrispondenza di un'oscillazione di massima ampiezza α_o la massima tensione vale:

$$\tau_{MAX} = mg\,(3 - 2\cos\alpha_o)$$

come già ricavato nell'esercizio V.21. Quando τ_{MAX} supera il valore

$$f_t = \mu\, Mg$$

il corpo M prende a muoversi. Dunque il massimo di tensione sarà:

$$mg\,(3 - 2\cos\alpha_o) = \mu\, Mg$$

da cui

$$\cos\alpha_o = \frac{3m - \mu M}{2m} = \frac{2}{3} \rightarrow \alpha_o = 48{,}2° \,.$$

V.29. Nel sistema di riferimento non inerziale (x', y'), solidale con il carrello, il secondo principio della dinamica si scrive:

$$\vec{F}_{\text{reale}} + \vec{F}_{\text{fittizia}} = m\,\vec{a}_r$$

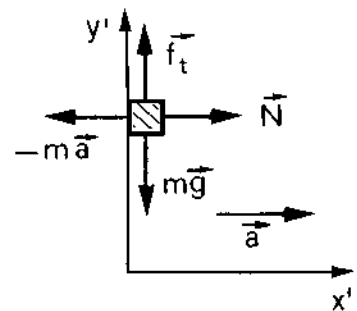
$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_t - m\vec{a} = m\vec{a}_r \,.$$

Proiettando sugli assi x' ed y', rispettivamente, si ha:

$x')$ $N - ma = 0 \rightarrow N = ma$

$y')$ $f_t - mg = m a_{y'}$, con $f_t = \mu N = \mu m a$

$a_{y'} = \mu a - g = -7{,}8 \text{ m/s}^2$.

Il moto è uniformemente accelerato con accelerazione diretta verso il basso e pari a $7{,}8 \text{ m/s}^2$.

V.30. Nel sistema non inerziale solidale con la piattaforma ruotante si manifesta la forza centrifuga

$$F_c = m\omega^2 d$$

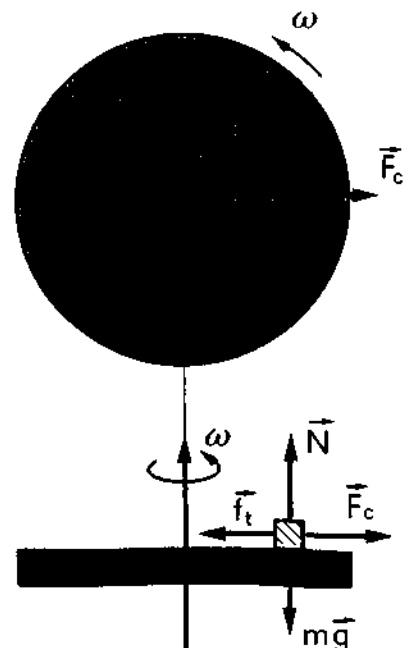
che, al momento dell'inizio del moto, diviene uguale alla forza tangenziale di attrito f_t:

$$f_t = \mu_c N = \mu_c mg$$

Dunque

$$m\omega^2 d = \mu_c mg \,,$$

da cui

$$\mu_c = \frac{\omega^2 d}{g} = 0{,}16 \,.$$

Capitolo sesto

VI.1. Il c.d.m. ha coordinate

$$\begin{cases} x_c(t) = \dfrac{1}{m_A + m_B}\,[m_A x_A(t) + m_B x_B(t)] \\ y_c(t) = \dfrac{1}{m_A + m_B}\,[m_A y_A(t) + m_B y_B(t)] \end{cases}$$

Le equazioni parametriche dei punti A e B sono:

$$\begin{cases} x_A(t) = R_A \cos(\omega t + \alpha) \\ y_A(t) = R_A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x_B(t) = R_B \cos(\omega t + \beta) \\ y_B(t) = R_B \operatorname{sen}(\omega t + \beta) \end{cases}$$

Le condizioni iniziali determinano le fasi α e β: Per $t = 0$:

$$\begin{cases} x_A(0) = 0 = R_A \cos\alpha \\ y_A(0) = R_A = R_A \operatorname{sen}\alpha \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x_B(0) = -R_B = R_B \cos\beta \\ y_B(0) = 0 = R_B \operatorname{sen}\beta \end{cases} \rightarrow \beta = -\pi$$

Pertanto le equazioni orarie dei punti A e B diventano:

$$\begin{cases} x_A(t) = R_A \cos(\omega t + \pi/2) \\ y_A(t) = R_A \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2) \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x_B(t) = R_B \cos(\omega t - \pi) \\ y_B(t) = R_B \operatorname{sen}(\omega t - \pi) \end{cases}$$

Per il c.d.m. si ha:

$$\begin{cases} x_c(t) = \dfrac{1}{(m_A + m_B)} \cdot [m_A R_A \cos(\omega t + \pi/2) + m_B R_B \cos(\omega t - \pi)] \\ y_c(t) = \dfrac{1}{(m_A + m_B)} \cdot [m_A R_A \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2) + m_B R_B \operatorname{sen}(\omega t - \pi)] \end{cases}$$

La traiettoria del c.d.m. si ottiene eliminando il tempo dalle precedenti equazioni mediante, per esempio, quadratura e somma. Si ottiene:

$$x_c^2 + y_c^2 = \frac{1}{(m_A + m_B)^2} \left\{ m_A^2 R_A^2 + m_B^2 R_B^2 + \right.$$

$$\left. + 2\, m_A m_B R_A R_B \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \omega t + \pi\right)\right] =$$

$$= \frac{(m_A^2 R_A^2 + m_B^2 R_B^2)}{(m_A + m_B)^2} = R_c^2 .$$

Dunque la distanza $R_c = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$ del c.d.m. dall'origine del riferimento non dipende dal tempo. Si tratta di traiettoria circolare di raggio $R_c = 10,7$[illegible] cm. Il moto del c.d.m. è dunque un moto circolare uniforme di velocità angolare $\omega = 2$ rad/s e quindi la sua accelerazione sarà centripeta e di modulo $\omega^2 R_c$:

$$a_c = \omega^2 R_c = 0,43 \text{ m/s}^2 .$$

VI.2. Per il fatto che la fune è inestensibile, ogni sua parte si muove con la stessa accelerazione. Così, la schematizzazione di corpo singolo ai due tratti in cui il punto P suddivide la fune si può esprimere nel modo seguente:

$$\tau(x) - F_A = (\lambda x)\, a$$

$$-\tau(x) + F_B = [\lambda(L - x)]\, a$$

Sommando m.a.m. si ha:

$$F_B - F_A = \lambda L a \rightarrow a = \frac{F_B - F_A}{\lambda L}$$

e quindi:

$$\tau(x) = F_A + \lambda x a = F_A + \frac{x}{L}(F_B - F_A)\,.$$

Osserviamo che la tensione varia in modo lineare da un estremo all'altro della fune.

VI.3.

$$\begin{cases} (\lambda y)\, g - \tau = (\lambda y)\, a \\ [\lambda (L - y)\, g] - \tau = -[\lambda (L - y)\, a \end{cases}$$

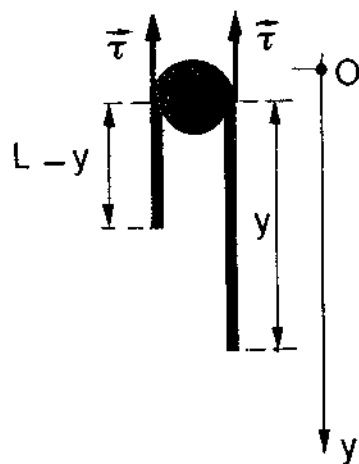
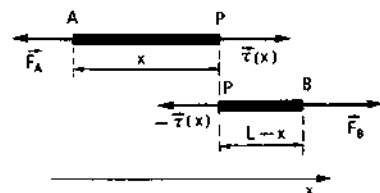
Sottraendo m.a.m. si ha:

$$a = g\left(2\frac{y}{L} - 1\right)$$

Per $y = \frac{3}{4}L$ si ha: $a = g\left(2 \cdot \frac{3}{4}\frac{L}{L} - 1\right) = 0{,}5 \cdot g = 4{,}9\ \text{m/s}^2$.

Casi estremi:

$y = \frac{L}{2} \rightarrow a = g\left(2 \cdot \frac{L}{2L} - 1\right) = 0$ (situazione di equilibrio)

$y = L \rightarrow a = g\left(2\frac{L}{L} - 1\right) = g$ (caduta libera di tutta la cinghia).

VI.4. Per ragioni di simmetria, il c.d.m. C del disco forato si trova sulla congiungente OO'.
Conviene considerare un disco di raggio R e centro O, non forato, e di massa M; il suo c.d.m. coincide con O (origine dell'asse di riferimento x). Tale disco intero è un sistema materiale costituito da un disco di raggio r, massa m, centro e c.d.m. in O' e dal disco forato, di massa $(M - m)$, il cui c.d.m. è situato nel punto C incognito. Dunque, per la simmetria del sistema rispetto all'asse x, siamo ricondotti a considerare un sistema equivalente di due masse puntiformi m ed $(M\text{-}m)$ il cui c.d.m. è in posizione $x_0 = 0$ nota. Pertanto:

$$x_0 = \frac{1}{(M - m) + m}\,[m d + (M - m)\, x_c] = 0$$

da cui:

$$x_c = -\left(\frac{m}{M - m}\right) d$$

Tenendo conto del fatto che il disco è omogeneo, ed indicando con σ la sua densità superficiale, si ha:

$$m = \sigma \pi r^2 \qquad M = \sigma \pi R^2$$

e quindi

$$x_c = -\left(\frac{r^2}{R^2 - r^2}\right) d = -0{,}67 \text{ cm} .$$

Osserviamo che i casi estremi di questa formula danno risultati già noti:

$d = 0$ (foro concentrico) $\rightarrow x_c = 0$ (centro di simmetria del sistema)

$r = 0$ disco privo di foro) $\rightarrow x_c = 0$ (C coincide con O)

VI.5. $$y_c(t) = \frac{1}{(m_1 + m_2)} [m_1 y_1(t) + m_2 y_2(t)]$$

da cui:

$$a_c = \frac{1}{(m_1 + m_2)} (m_1 a_1 + m_2 a_2) .$$

Come già visto in esercizi precedenti, per l'inestensibilità del filo, le due masse si muovono di conserva e quindi con accelerazioni di ugual modulo e direzione, ma verso opposto:

$$a_1 = a , \qquad a_2 = -a .$$

Le equazioni della dinamica per i due corpi singoli, nell'ipotesi di filo senza apprezzabile massa, diventano:

$$\begin{cases} m_1 g - \tau = m_1 a \\ m_2 g - \tau = -m_2 a , \end{cases}$$

da cui, sottraendo m.a.m. si ricava:

$$a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g .$$

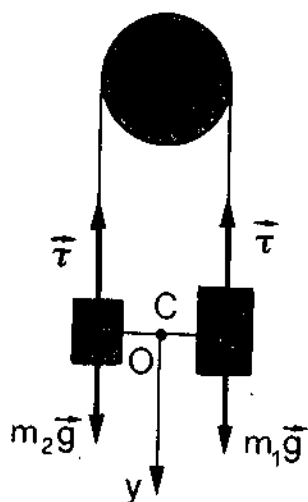
L'accelerazione del c.d.m. vale dunque:

$$a_c = \frac{1}{(m_1 + m_2)} [m_1 a + m_2(-a)] = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) a =$$
$$= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 g = \frac{1}{9} g \simeq 1{,}1 \text{ m/s}^2 .$$

VI.6. Per la conservazione della quantità di moto si ha:

$$M_1 V_1 + M_2 V_2 = 0$$

La conservazione dell'energia meccanica nella fase di decompressione della molla implica la seguente relazione:

$$U + K = U_{in} + O = O + K_{fin} = \frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{2} M_2 V_2^2 .$$

Poiché, dalla prima relazione, $V_2 = -V_1 \dfrac{M_1}{M_2}$

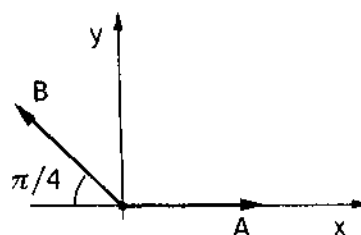
$$U_{in} = \frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \frac{M_1^2}{M_2^2} V_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M_1 V_1^2 \left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right) = \frac{1}{2} \frac{M_1}{M_2} (M_1 + M_2) V_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2 + 3) \cdot 0{,}25 \simeq 0{,}42 \text{ J} .$$

VI.7. Per la conservazione della quantità di moto si ha:

$$\bar{Q}^{(f)} = \bar{Q}^{(in)} = 0$$

$$\bar{Q}^{(f)} = \bar{q}_A + \bar{q}_B + \bar{q}_C = 0 \quad \begin{cases} Q_x^{(f)} = 0 \\ Q_y^{(f)} = 0 \\ Q_z^{(f)} = 0 \end{cases}$$

Consideriamo come piano di riferimento (xy) il piano individuato dalle direzioni di volo di due qualsiasi frammenti (per esempio A e B). Questa scelta implica $q_{Az} = q_{Bz} = 0$. Poiché $Q_z^{(f)} = q_{Az} + q_{Bz} + q_{Cz} = 0$, se ne deduce che $q_{Cz} = 0$ e dunque anche la direzione di volo del frammento C giace nel piano (xy).
Nel piano (xy) la conservazione della quantità di moto implica:

$$\begin{matrix} x) \\ y) \end{matrix} \begin{cases} Q_x^{(f)} = q_{Ax} + q_{Bx} + q_{Cx} = 0 \\ Q_y^{(f)} = q_{By} + q_{Cy} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x) \\ y) \end{matrix} \begin{cases} m\text{v}_A + m\text{v}_B \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) + m\text{v}_C \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ m\text{v}_B \,\text{sen}\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) + m\text{v}_C \,\text{sen}\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

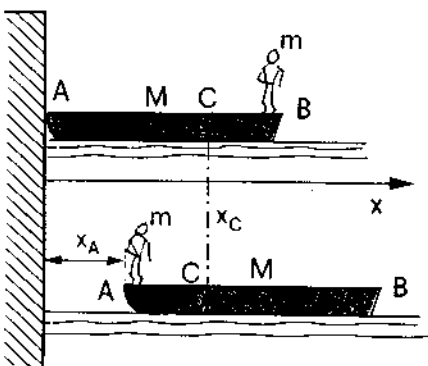
$$\begin{matrix} x) \\ y) \end{matrix} \begin{cases} \text{v}_A - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{v}_B - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{v}_C = 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{v}_B - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{v}_C = 0 \rightarrow \text{v}_B = \text{v}_C \end{cases}$$

$$\text{v}_A = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{v}_B \rightarrow \text{v}_B = \frac{\text{v}_A}{\sqrt{2}} .$$

La conoscenza dell'energia cinetica totale dei frammenti permette di ricavare le velocità:

$$K = \frac{1}{2} m (\text{v}_A^2 + \text{v}_B^2 + \text{v}_C^2) \rightarrow \frac{2K}{m} = \text{v}_A^2 + \frac{\text{v}_A^2}{2} + \frac{\text{v}_A^2}{2} = 2\text{v}_A^2 .$$

Dunque:

$$\text{v}_A = \sqrt{\frac{K}{m}} , \qquad \text{v}_B = \text{v}_C = \sqrt{\frac{K}{2m}} .$$

VI.8. Il sistema chiatta + uomo non è soggetto a forze orizzontali esterne (asse x). Dunque

$$F_x^{(e)} = 0 = \frac{dQ_x}{dt} \rightarrow Q_x = \text{cost} = 0$$

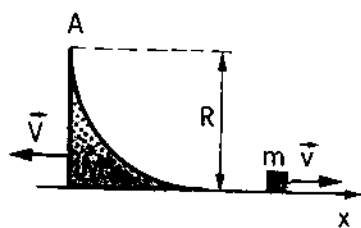
(perché all'inizio è tutto fermo) e quindi, essendo $Q_x = (M+m)\,v_{Cx}$, si ha $v_{Cx} = 0$. Dunque il c.d.m. non si muove mentre l'uomo si sposta dall'estremo B all'estremo A della chiatta. La posizione del c.d.m. C è:

$$x_C = \frac{1}{(M+m)}\left(M\frac{L}{2} + mL\right) = \frac{L}{2}\left(\frac{M+2m}{M+m}\right).$$

La situazione finale, in cui la zattera si è spostata della quantità incognita x_A, è caratterizzata dalla massa m (uomo) a distanza x_A dal molo e dal c.d.m. della chiatta in posizione $\left(\frac{L}{2} + x_A\right)$. Il c.d.m. dell'intero sistema resta nella posizione iniziale.

$$x_C = \frac{L}{2}\frac{(M+2m)}{(M+m)} = \frac{1}{(M+m)}\left[M\left(\frac{L}{2} + x_A\right) + m x_A\right].$$

Risolvendo nell'incognita x_A, si ha:

$$x_A = \frac{m}{M+m}L = 1{,}67 \text{ m}.$$

VI.9. Si conserva la componente x della quantità di moto (inizialmente nulla), perché le forze esterne al sistema cuneo + corpo A hanno componente x nulla:

$$0 = MV + mv = Q_x.$$

Il teorema dell'energia cinetica si scrive tenendo conto che non ci sono attriti e che il lavoro della reazione tra cuneo e corpo è nullo perché si tratta di reazione puramente normale. Dunque:

$$L = L_{\text{peso}} = mgR = K_f - K_{in} = K_f = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Dalla conservazione della Q_x si ha:

$$v = -\frac{M}{m}V$$

per cui:

$$mgR = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{M^2V^2}{m^2}\right) = \frac{1}{2}MV^2\left(\frac{M+m}{m}\right).$$

$$V = \sqrt{\frac{2m^2gR}{M(M+m)}} = 0{,}7 \text{ m/s}.$$

VI.10. Come nel problema VI.9, si conserva la componente x della quantità di moto. D'altra parte la velocità minima richiesta è quella per cui il corpo raggiunge la massima quota $R/2$ a velocità nulla rispetto al cuneo.

Dunque:

$$Q_x^{(in)} = Q_x^{(fin)}$$

con

$$Q_x^{(in)} = m\mathrm{v} \quad \text{e} \quad Q_x^{(fin)} = (M+m)\,V$$

dove V è la velocità del cuneo (ed anche della massa m che è ferma rispetto al cuneo) nel momento in cui il corpo raggiunge la massima quota. Il teorema dell'energia cinetica, in cui il lavoro (negativo) è solo quello della forza peso relativa al corpo che sale di quota di $R/2$, si scrive:

$$\overset{\bullet}{L}_{peso} = -\,mg\frac{R}{2} = K_{fin} - K_{in} = \frac{1}{2}(M+m)\,V^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2\,.$$

Poiché $V = -\dfrac{m}{M+m}\mathrm{v}$, si ha:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{(M+m)\,gR}{M}} = 2{,}47 \text{ m/s}\,.$$

VI.11. Il proiettile m è espulso dal pezzo con velocità orizzontale v. La gittata è $D = \mathrm{v}t^*$, dove t^* è l'intervallo di tempo necessario alla massa m per raggiungere, per effetto della forza peso, il suolo. Lungo la verticale, il moto del proiettile è uniformemente accelerato con accelerazione g verso il basso e velocità iniziale nulla:

$$y(t) = y_0 + \mathrm{v}_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Viene toccato il suolo ($y = 0$) per $t = t^*$:

$$h = \frac{1}{2}gt^{*2} \rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Dunque la velocità iniziale del proiettile ha l'espressione:

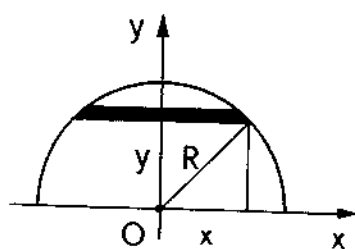
$$\mathrm{v} = \frac{D}{t^*} = D\sqrt{\frac{g}{2h}}\,.$$

L'esplosione della carica nel cannone si può pensare corrispondere ad una intensa forza interna che si esercita tra due masse (cannone di massa M e proiettile di massa m) inizialmente ferme. È da osservare che, come si vedrà meglio nel capitolo dedicato agli urti ed alle forze impulsive, nel brevissimo intervallo di tempo in cui sono attive le forze esplosive (interne), le forze esterne (per esempio quelle esercitate dagli ammortizzatori) sono del tutto trascurabili. In questo senso il sistema, tra un istante immediatamente precedente ed uno immediatamente seguente l'esplosione, si può considerare isolato. Subito dopo l'esplosione, la dinamica va sviluppata tenendo conto delle forze esterne. Quindi, per effetto dell'esplosione, la quantità di moto si conserva e pertanto immediatamente dopo l'esplosione del proiettile, si avrà:

$$MV + m\mathrm{v} = 0\,,$$

avendo indicato con V la velocità iniziale del cannone $V = -\frac{m\text{v}}{M}$. La forza F costante e frenante deve essere tale da ridurre in quiete il cannone in un tratto d. Per il teorema dell'energia cinetica dovrà essere:

$$L_{\text{frenante}} = -F \cdot d = K_f - K_{\text{in}} = 0 - \frac{1}{2} M V^2$$

$$F = \frac{M V^2}{2d} = \frac{M}{2d} \frac{m^2}{M^2} \text{v}^2 = \frac{m^2 D^2 g}{4 d M h}.$$

VI.12. Per la simmetria del sistema, il c.d.m. è situato sull'asse $y (x_c = 0)$. L'ordinata del c.d.m. è

$$y_c = \frac{1}{M} \int_M y \, dm,$$

dove M è la massa totale della lamina.
L'elemento dm, che ha ordinata y, è una striscia di altezza dy parallela all'asse x, la cui area è $dS = 2x\,dy$ e la cui massa è

$$dm = \sigma\, dS = \sigma\, 2x\, dy \quad (\sigma = dm/dS).$$

Dunque

$$y_c = \frac{1}{M} \int y\, \sigma\, 2x\, dy, \quad \text{dove } x = x(y);$$

x si esprime in funzione di y in base alla relazione $x^2 + y^2 = R^2$, per cui $x = (R^2 - y^2)^{1/2}$.

$$y_c = \frac{2\sigma}{M} \int_0^R y (R^2 - y^2)^{1/2}\, dy = \frac{2\sigma}{M} \left(-\frac{1}{2}\right) \int (R^2 - y^2)^{1/2}\, d(R^2 - y^2) =$$

$$= -\frac{\sigma}{M} \int_{R^2}^{0} z^{1/2}\, dz,$$

avendo introdotto la variabile $z = R^2 - y^2$ ed avendo, di conseguenza, variato gli estremi di integrazione (per $y = 0$ si ha $z = R^2$, e per $y = R$ si ha $z = 0$). Ricordando che

$$\int z^\alpha\, dz = \frac{1}{\alpha + 1} z^{\alpha+1},$$

si ha:

$$y_c = -\frac{\sigma}{M} \left[\frac{1}{3/2} \cdot z^{3/2} \right]_{R^2}^{0} = +\frac{\sigma}{M} \frac{2}{3} (R^2)^{3/2} = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{M} R^3.$$

Ricordando che

$$M = \sigma \frac{1}{2} \pi R^2,$$

si ha infine:

$$y_c = \frac{4R}{3\pi}.$$

VI.13. Indichiamo con un asterisco le grandezze cinematiche relative ad un sistema di riferimento solidale con il c.d.m. In tale sistema la velocità del c.d.m. v_c^* è nulla. Poiché, in generale, la q.d.m. totale di un sistema di punti materiali si può esprimere come prodotto della massa totale per la velocità del c.d.m., in questo caso si avrà:

$$Q^*_{TOT} = M v_c^* = (m_1 + m_2)\, v_c^* = 0\,.$$

Per calcolare l'energia cinetica totale, esprimiamo le velocità dei corpi m_1 ed m_2 nel sistema del c.d.m., tenendo conto che, nei moti relativi, la velocità assoluta (rispetto al piano orizzontale fisso) è uguale alla somma della velocità di trascinamento (pari alla velocità v_c del c.d.m. rispetto al piano orizzontale) e della velocità relativa (rispetto al c.d.m., indicata con asterisco):

$$\begin{cases} v_1 = v_c + v_1^* \\ v_2 = v_c + v_2^* \end{cases}$$

da cui:

$$v_1^* = v_1 - v_c\,, \quad v_2^* = v_2 - v_c\,.$$

L'energia cinetica totale rispetto al c.d.m. vale:

$$K^*_{TOT} = K_1^* + K_2^* = \frac{1}{2}\, m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2}\, m_2 v_2^{*2} =$$

$$= \frac{1}{2}\, m_1 (v_1 - v_c)^2 + \frac{1}{2}\, m_2 (v_2 - v_c)^2$$

La velocità v_c del c.d.m. è tale che:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v_c$$

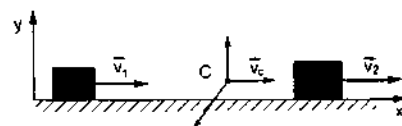
da cui:

$$v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Dunque:

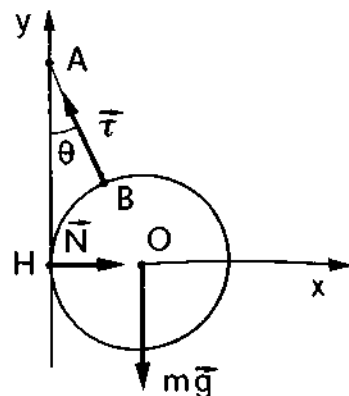
$$K^*_{TOT} = \frac{1}{2}\, m_1 \left[v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right]^2 + \frac{1}{2}\, m_2 \left[v_2 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\, m_1 \frac{m_2^2 (v_1 - v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{1}{2}\, m_2 \frac{m_1^2 (v_2 - v_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} =$$

$$= \frac{m_2 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1 \cdot 2}{2\,(1 + 2)}\, (1 - 2)^2 = \frac{1}{3}\, \mathrm{J}\,.$$

VI.14. L'equilibrio si ha per

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = 0 \\ \vec{M}^{(e)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x^{(e)} = N - \tau \operatorname{sen}\theta = 0 \\ F_y^{(e)} = \tau \cos\theta - mg = 0 \\ M_0^{(e)} = \vec{OH} \times \vec{N} + \vec{OO} \times m\vec{g} + \vec{OB} \times \vec{\tau} = \\ \quad = 0 + 0 + \vec{OB} \times \vec{\tau} = 0 \end{cases}$$

(da cui si ricava che $\vec{\tau}$ ha retta di applicazione che passa per O oltre che per A).

Nel triangolo AOH si ha:

$a = (l + a) \operatorname{sen}\theta$.

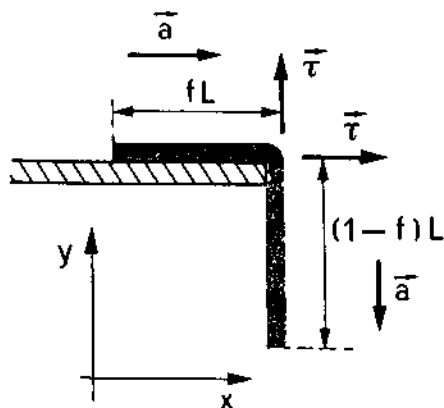
Dunque

$$\tau = \frac{mg}{\cos\theta} \quad \text{e} \quad N = \tau \operatorname{sen}\theta = mg \operatorname{tg}\theta \, .$$

Esprimendo $\cos\theta$ e $\operatorname{tg}\theta$ in funzione di $\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{l + a}$, si ha:

$$\tau = mg \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{(l+a)^2}}} = mg \frac{(l+a)}{\sqrt{l(l+2a)}}$$

$$N = mg \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}} = mg \frac{a}{\sqrt{l(l+2a)}} \, .$$

VI.15. Schematizzando per corpi singoli, consideriamo separatamente i tratti di nastro orizzontale e verticale. Indicando con L la lunghezza totale del nastro, con $\lambda = m/L$ la sua densità lineare e con τ la tensione nel punto di curvatura, si ha:

tratto orizzontale: $\tau = (\lambda f L)\, a = (fm)\, a$

tratto verticale : $\tau - [\lambda (1 - f) L]\, g = [(1 - f)\, m]\, (-a)$

Eliminando la tensione τ, si ha:

$f m a - (1 - f)\, m g = -(1 - f)\, m a$

$a\,(f + 1 - f) = (1 - f)\, g \rightarrow a = (1 - f)\, g$.

(Casi limite):

$f = 0$ (nastro tutto fuori piano) $\rightarrow a = g$ (caduta libera)

$f = 1$ (nastro tutto sul piano) $\rightarrow a = 0$ (nastro fermo).

VI.16. La velocità con cui cade ogni tratto di fune è quella che compete ad un corpo che parte da fermo e che cade con accelerazione g per un tratto y: $v = \sqrt{2gy}$.
La porzione della fune che arriva sul piano nel tempo dt, di massa dm, lo urta e resta ferma (urto anelastico, come si vedrà in seguito). La corrispondente variazione di q.d.m. sarà $dq = q_{\text{fin}} - q_{\text{in}} = 0 - q_{\text{in}} = -dm \cdot v$. Questa variazione di q.d.m. è dovuta alla reazione $-F_1$ del piano sulla fune, diretta verso l'alto. Una forza $+F_1$ (diretta verso il basso) è subita dal piano. Per il teorema dell'impulso sarà:

$$F_1\, dt = dm\, v = (\lambda\, v\, dt)\, v \rightarrow F_1 = \lambda v^2 = \lambda\, (2gy) \, .$$

Nello stesso istante, la massa che si è giá accumulata sul piano, pari a (λy), esercita la sua forza peso $F_2 = \lambda g y$.
In totale, la forza che si esercita sul piano è:

$$F = F_1 + F_2 = \lambda\, 2gy + \lambda g y = 3\lambda g y \, .$$

Capitolo settimo

VII.1. Per l'equilibrio deve essere $\vec{F}^{(e)} = 0$, $\vec{M}^{(e)} = 0$.

$$\begin{cases} F_x^{(e)} = N_B - f_t^{(A)} = 0 \\ F_y^{(e)} = N_A - Mg - mg = 0 \\ M_{Az}^{(e)} = \frac{L}{2} Mg \operatorname{sen}\alpha + \frac{3}{4} L\, mg \operatorname{sen}\alpha - L\, N_B \operatorname{sen}\beta = \end{cases}$$

$$= \frac{L}{2} Mg \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \frac{3}{4} L\, mg \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - L N_B \operatorname{sen}(\pi - \theta) =$$

$$= \left(\frac{L}{2} Mg + \frac{3}{4} L\, mg\right) \cos\theta - L N_B \operatorname{sen}\theta = 0 .$$

La scelta del segno dei momenti è fatta in base alla considerazione che le forze $M\vec{g}$ ed $m\vec{g}$ tendono a far ruotare l'asta in senso antiorario e l'opposto accade per la forza $\vec{N}_B$, rispetto all'asse z, che è orientato nel verso uscente dal foglio. Dalla terza equazione si ricava N_B:

$$N_B = \left(\frac{1}{2} M + \frac{3}{4} m\right) g \operatorname{cotg}\theta ,$$

che, dalla prima equazione, è uguale ad $f_t^{(A)}$.

VII.2. Rispetto al polo O occorre che sia $M = M_{peso}$. Si può calcolare il momento della forza peso della sbarretta come somma dei momenti delle forze peso elementari attive sui singoli tratti dl di sbarretta. È chiaro che, data l'omogeneità del disco, la forza peso relativa al disco ha momento nullo rispetto ad O.

$$M_{peso} = \int l\, dm\, g \operatorname{sen}\theta = \int_0^R l\, \lambda g \operatorname{sen}\theta\, dl = \lambda g \operatorname{sen}\theta \frac{R^2}{2} = \frac{R}{2} mg \operatorname{sen}\theta$$

(essendo $\lambda = m/R$ la densità lineare).
Allo stesso risultato si arriva, più semplicemente, immaginando concentrata nel c.d.m. della sbarretta, a distanza $R/2$ dal polo O, tutta la massa m della sbarretta.

VII.3. Dette m_1 ed m_2 le masse delle due lastre quadrate, per l'equilibrio si ha:

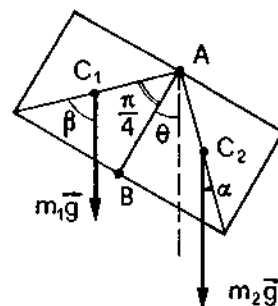
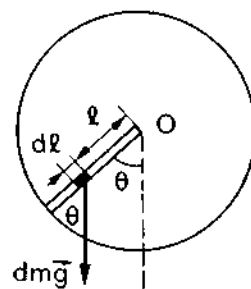
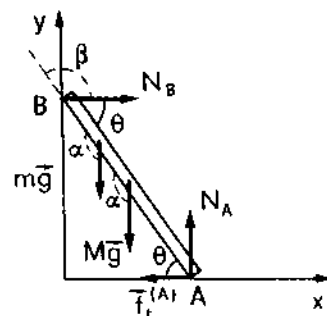
$$M_A^{(e)} = O = M_1 + M_2 = d\, m_1 g \operatorname{sen}\beta - d\, m_2 g \operatorname{sen}\alpha$$

dove:

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \theta \quad \text{ed} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} - \theta ,$$

da cui:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

$$M_A^{(e)} = 0 \rightarrow m_1 \operatorname{sen}\beta - m_2 \operatorname{sen}\alpha = 0$$

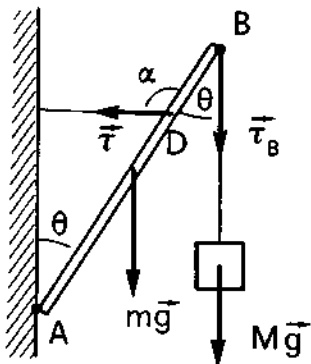
con $m_1 = \sigma_1 a^2$ ed $m_2 = \sigma_2 a^2$, per cui:

$$\sigma_1 \operatorname{sen}\beta - \sigma_2 \operatorname{sen}\alpha = 0$$

da cui:

$$\sigma_1 (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) - \sigma_2 (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) = 0$$

da cui

$$\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}\right).$$

VII.4. Detta τ la tensione del filo ancorato al punto D e con la convenzione di prendere come positivi i momenti che tendono a far ruotare la sbarra in senso antiorario la seconda equazione cardinale della statica dei corpi rigidi si scrive:

$$M_A^{(e)} = -L\tau_B \operatorname{sen}(\pi - \theta) - \frac{L}{2} mg \operatorname{sen}(\pi - \theta) + d\tau \operatorname{sen}\alpha = 0$$

Essendo $\tau_B = Mg$ si ha anche:

$$M_A^{(e)} = -L\,Mg \operatorname{sen}\theta - \frac{L}{2} mg \operatorname{sen}\theta + d\tau \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) =$$

$$= -L\,Mg \operatorname{sen}\theta - \frac{L}{2} mg \operatorname{sen}\theta + d\tau \cos\theta = 0\,.$$

Il massimo valore M_{MAX} della massa M si ha per $\tau = \tau_R$ da cui:

$$M_{\text{MAX}} = \frac{\tau_R d}{Lg} \operatorname{cotg}\theta - \frac{m}{2}$$

VII.5. $I_x = \int_M h^2\, dm = \int y^2 \sigma\, dS$

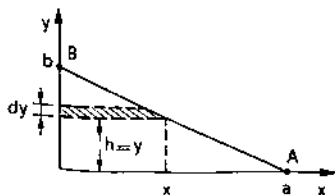
con dS = areola a distanza y dall'asse $x = x \cdot dy$

$$I_x = \int y^2 \sigma\, x\, dy\,.$$

Esprimiamo x in funzione di y, ricordando che la retta passante per i punti A e B ha equazione:

$$y = -\frac{b}{a} x + b\,.$$

Pertanto:

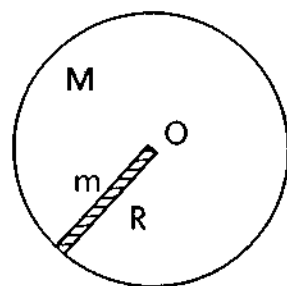
$$x = \frac{a\,(b - y)}{b}$$

e quindi

$$I_x = \sigma \int_0^b y^2 \frac{a}{b}(b-y)\,dy = \frac{\sigma a}{3}[y^3]_0^b - \frac{\sigma a}{4b}[y^4]_0^b =$$

$$= \frac{\sigma a b^3}{12} = \left(\frac{1}{2}\sigma a b\right)\frac{b^2}{6} = \frac{Mb^2}{6}.$$

VI.6. Il momento d'inerzia totale è la somma dei momenti d'inerzia, rispetto ad O, del disco di massa M e della sbarretta di massa m. Infatti

$$I_o = \int_{\substack{\text{MASSA}\\\text{TOTALE}}} h^2\,dm = \int_{\text{DISCO}} h^2\,dm + \int_{\text{SBARRETTA}} h^2\,dm =$$

$$= \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}mR^2 = R^2\left(\frac{M}{2}+\frac{m}{3}\right) = \left(\frac{3M+2m}{6}\right)R^2.$$

VII.7. $I = \int_M h^2\,dm$

in cui dm è l'elemento di massa di lunghezza dl, posto a distanza l dal c.d.m. C. Detta λ la densità lineare della sbarra, si ha:

$$dm = \lambda\,dl = \frac{M}{L}\,dl.$$

La massa dm dista dall'asse $\hat{a}$ della quantità $h = l\,\text{sen}\,\theta$. Dunque:

$$I_a = \int_{-L/2}^{+L/2} l^2\,\text{sen}^2\theta\,\frac{M}{L}\,dl = \frac{M}{L}\,\text{sen}^2\theta\,\frac{1}{3}\left[\frac{L^3}{8} - \left(-\frac{L^3}{8}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{12}ML^2\,\text{sen}^2\theta.$$

Allo stesso risultato si arriva con la relazione [VII.14]:

$$I = I_u\cos^2\varphi + I_v\cos^2\chi + I_w\cos^2\psi$$

$$I_u = 0$$

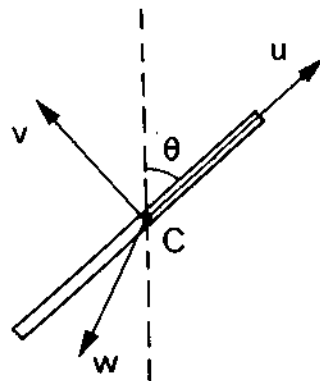
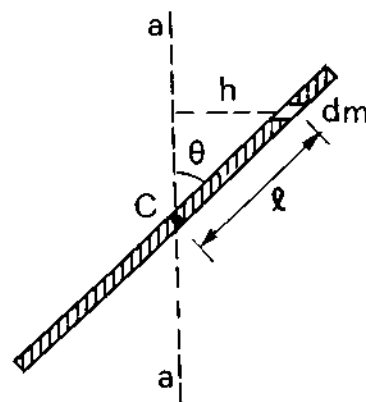
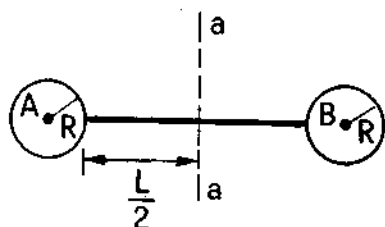
perché la sbarra è filiforme e, praticamente, la massa è a distanza nulla dall'asse $\hat{u}$

$$I_v = I_w = \frac{1}{12}ML^2$$

($\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono assi baricentrali ortogonali tra loro ed alla sbarra)

$$\varphi = \theta, \quad \chi = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \psi = \frac{\pi}{2}$$

(perché l'asse $\hat{a}$ sta sul piano di $\hat{u}$ e $\hat{v}$)

$$I_a = I_v\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + I_w\cos^2\frac{\pi}{2} = I_v\,\text{sen}^2\theta = \frac{1}{12}ML^2\,\text{sen}^2\theta.$$

VII.8. Il momento d'inerzia I_a può essere decomposto nella somma di tre contributi

$$I_a = I_a^{(A)} + I_a^{(B)} + I_a^{(\mathrm{SBARRA})}$$

$I_a^{(A)}$ ed $I_a^{(B)}$ rappresentano i momenti di inerzia delle sfere A e B, rispetto all'asse a, e si calcolano facendo uso del teorema di Huygens-Steiner e ricordando che il momento d'inerzia di una sfera rispetto ad un suo asse baricentrale vale $I_c = \frac{2}{5} MR^2$. Dunque

$$I_a^{(A)} = I_c^{(A)} + M\left(\frac{L}{2} + R\right)^2 = \frac{2}{5} MR^2 + M\left(\frac{L}{2} + R\right)^2 = I_a^{(B)}$$

$$I_a^{(\mathrm{SBARRA})} = I_c^{(\mathrm{SBARRA})} = \frac{1}{12} mL^2 .$$

Dunque:

$$I_a = 2 \cdot \left[\frac{2}{5} MR^2 + M\left(\frac{L}{2} + R\right)^2\right] + \frac{1}{12} mL^2 .$$

VII.9. La proiezione della seconda equazione cardinale della meccanica dei sistemi:

$$\vec{M}^{(e)} = d\vec{P}/dt$$

sull'asse $\hat{a}$, si scrive:

$$M_a = dP_a/dt = \frac{d}{dt}(I_a \omega) = I_a \dot{\omega}$$

$$M_a = r\tau$$

$$\tau - m'g = -m'a = -m'\dot{\omega} r$$

($a = \dot{\omega} r$ perché il filo non può slittare sull'albero)

$$\tau = m'g - m'\dot{\omega} r .$$

Dunque:

$$r\tau = r(m'g - m'\dot{\omega} r) = I_a \dot{\omega}$$

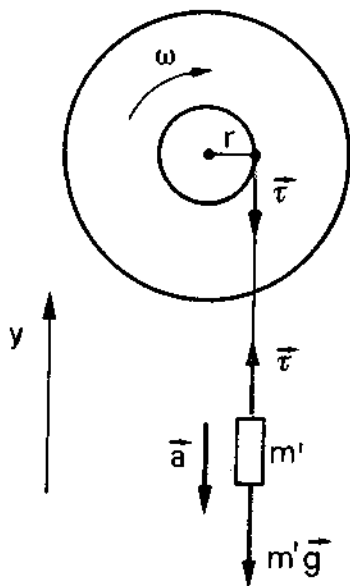
da cui:

$$\dot{\omega} = \frac{m'gr}{I_a + m'r^2} .$$

D'altra parte si ha:

$$I_a = \frac{1}{2} MR^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} mr^2 = \frac{MR^2 + 2mr^2}{2}$$

per cui:

$$\dot{\omega} = \frac{2m'gr}{MR^2 + 2mr^2 + 2m'r^2} = \frac{2m'gr}{MR^2 + 2(m + m')r^2} .$$

VII.10. $M^{(e)} = 0 \to P =$ costante

$$P^{(\text{in})} = I_{\text{TUBO}}\omega_0 + P^{(\text{in})}_{\text{CIL}} = P^{(\text{fin})} = I_{\text{TUBO}}\omega + \frac{L}{2}\, m\left(\omega\frac{L}{2}\right),$$

dove avendo indicato con L la lunghezza del tubo:

$$I_{\text{TUBO}} = \frac{1}{12} ML^2 , \quad P^{(\text{in})}_{\text{CIL}} \simeq 0$$

(data la piccola altezza del cilindretto il suo momento d'inerzia è trascurabile);

$\omega \dfrac{L}{2}$ è la velocità tangenziale del cilindretto nel momento in cui raggiunge l'estremità del tubo (fuoriuscita).
Dunque:

$$\frac{1}{12} ML^2\omega_0 \simeq \frac{1}{12} ML^2\omega + m\omega\frac{L^2}{4}$$

da cui:

$$\omega = \left(\frac{M}{M+3m}\right)\omega_0 .$$

VII.11. Detto h il dislivello verticale tra le posizioni dei c.d.m. di cilindro e sfera alla partenza ed al fondo del piano inclinato, il teorema dell'energia cinetica si scrive:

cilindro) $\quad M_c g h = K_c^{(\text{fin})} - K_c^{(\text{in})} = K_c^{(\text{fin})}$

sfera) $\quad M_s g h = K_s^{(\text{fin})} - K_s^{(\text{in})} = K_s^{(\text{fin})}$.

Indicando con v_c e v_s le velocità dei c.d.m. del cilindro e della sfera rispettivamente, il teorema di König si scrive:

$$K_c = \frac{1}{2} M_c v_c^2 + \frac{1}{2} I_c\omega_c^2 = \frac{1}{2} M_c v_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M_c R^2\right)\frac{v_c^2}{R^2} = \frac{3}{4} M_c v_c^2$$

$$K_s = \frac{1}{2} M_s v_s^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} M_s R^2\right)\frac{v_s^2}{R^2} = \frac{7}{10} M_s v_s^2 .$$

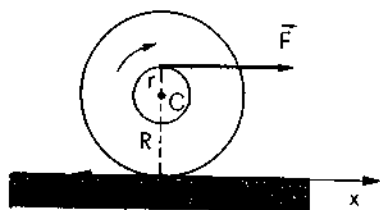
Dunque:

$$M_c g h = \frac{3}{4} M_c v_c^2 \to v_c = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

$$M_s g h = \frac{7}{10} M_s v_s^2 \to v_s = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

Per il rapporto tra le velocità si ha:

$$\frac{v_c}{v_s} = \sqrt{\frac{4}{3}\,\frac{7}{10}} = \sqrt{\frac{14}{15}} = 0{,}97 .$$

Arriva prima la sfera.

VII.12. Le equazioni cardinali della meccanica dei sistemi danno:

$$\begin{cases} F_x^{(e)} = F - f_t = M a_c \\ M_c^{(e)} = rF + Rf_t = I\dot{\omega} = I\dfrac{a_c}{R} \end{cases}$$

dove f_t è la forza di attrito che garantisce il puro rotolamento. Dalla prima equazione si ha:

$$f_t = F - M a_c,$$

per cui la seconda equazione diventa:

$$rF + RF - RMa_c = I\frac{a_c}{R}$$

da cui:

$$a_c = \frac{R(R+r)}{I + MR^2} F.$$

Il problema può essere risolto anche facendo uso del teorema dell'energia cinetica. Detto x_A lo spostamento del punto di applicazione A della forza F, a partire da una situazione in cui il sistema sia fermo, il teorema dell'energia cinetica si scrive:

$$Fx_A = K^{(\text{fin})} - K^{(\text{in})} = K^{(\text{fin})} = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_c^2}{R^2}.$$

Derivando rispetto al tempo entrambi i membri dell'equazione, si ha:

$$Fv_A = \left(\frac{1}{2} M + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}\right) 2 v_c a_c.$$

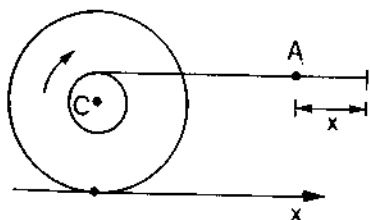
È da osservare che la velocità v_A è diversa dalla velocità v_c. Infatti, nel tempo Δt si ha una rotazione $\Delta\theta$ del rocchetto, in corrispondenza della quale si svolge un tratto di filo di lunghezza $r\Delta\theta$ rispetto al rocchetto e C si sposta in avanti di $x_c = R\Delta\theta$. Dunque il tratto x_A di cui si sposta A è la somma dei tratti $r\Delta\theta$ ed $R\Delta\theta$:

$$x_A = x_c + r\Delta\theta = x_c + r\frac{x_c}{R} = x_c\left(\frac{R+r}{R}\right),$$

Derivando rispetto al tempo si ha:

$$v_a = v_c\left(\frac{R+r}{R}\right).$$

Pertanto dalla:

$$Fv_A = Fv_c\left(\frac{R+r}{R}\right) = \left(\frac{1}{2} M + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}\right)\cdot 2 v_c a_c,$$

si ha:

$$F \cdot \frac{R+r}{R} = \left(M + \frac{I}{R^2}\right) a_c$$

da cui:

$$a_c = \frac{R\,(R+r)}{I + MR^2}\, F\,.$$

VII.13. In presenza delle sole forze di attrito sull'asse di rotazione, essendo la forza peso equilibrata dalla reazione vincolare dell'asse, l'equazione cardinale della meccanica dei sistemi utile per descrivere il moto del cilindro (un grado di libertà) è la proiezione sull'asse baricentrale della $\bar{M}^{(e)} = d\bar{P}/dt$:

$$M_f = \frac{dP_c}{dt} = I_c \frac{d\omega}{dt} = I_c \dot{\omega}\,,$$

dove I_c è il momento d'inerzia dell'intera scatola cilindrica, costruita da due dischi di base e dal mantello tubiforme laterale:

$$I_c = 2 \cdot \frac{1}{2}\, m_{\mathrm{BASE}} R^2 + m_{\mathrm{MANTELLO}} R^2 = \sigma \pi R^2 R^2 + \sigma \cdot 2\,\pi\, R h R^2 =$$

$$= \sigma \pi\, R^3\, (R + 2h)\,.$$

Poiché la coppia frenante M_f è costante, anche l'accelerazione angolare $\dot{\omega} = -M_f/I_c$ è costante e negativa, per cui il moto è circolare uniformemente ritardato. Dunque

$$\omega(t) = \omega_0 - \dot{\omega}\, t = \omega_0 - \frac{M_f}{I_c}\, t$$

da cui:

$$\omega(\Delta t) = 0 = \omega_0 - \frac{M_f}{I_c}\, \Delta t\,.$$

Il momento della coppia frenante è dunque:

$$M_f = I_c \frac{\omega_0}{\Delta t}\,.$$

VII.14. Il teorema dell'energia cinetica si scrive:

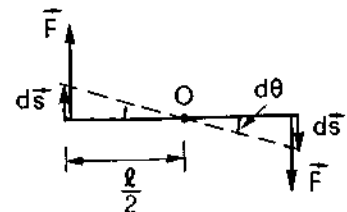
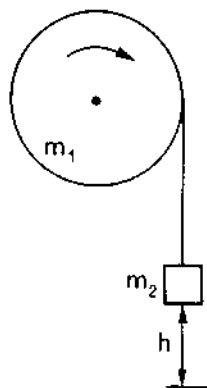
$$L_{\mathrm{ATTRITO}} = K^{(\mathrm{fin})} - K^{(\mathrm{in})} = 0 - K^{(\mathrm{in})}$$

(il lavoro delle forze di attrito è negativo)

$$L_{\mathrm{ATTRITO}} = -\int_{n\,\mathrm{giri}} M_A\, d\theta = -\, M_A\, n\, 2\pi\,.$$

Dunque

$$-\, M_A\, n\, 2\pi = -\frac{1}{2}\, I_c \omega_0^2$$

$$M_A = \frac{1}{4\pi n}\, \frac{2}{5}\, m r^2 \omega_0^2 = \frac{m r^2 \omega_0^2}{10 \pi n}\,.$$

VII.15. Per la fase di moto in cui il peso è attaccato e si sposta di h lungo la verticale, il teorema dell'energia cinetica si scrive:

$$m_2 g h - M_A \Delta\theta = \frac{1}{2} I \omega_o^2 + \frac{1}{2} m_2 v_o^2$$

dove $\Delta\theta$ è l'angolo di cui ruota il cilindro in corrispondenza allo spostamento h di m_2:

$$R\Delta\theta = h \rightarrow \Delta\theta = h/R\,;$$

$M_A \Delta\theta$ è il lavoro della coppia frenante (come visto nell'esercizio VII.14);

$$I = \frac{1}{2} m_1 R^2 \quad \text{(momento d'inerzia del cilindro);}$$

v_o è la velocità della massa m_2, quando viene tagliato il filo: $v_o = \omega_o R$. Dunque:

$$m_2 g h - M_A \frac{h}{R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_1 R^2 \omega_o^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_o^2 R^2$$

da cui

$$M_A = m_2 g R - \frac{\omega_o^2 R^3}{4h} (m_1 + 2 m_2)\,.$$

La fase di frenamento, seguente al distacco di m_2, avviene con accelerazione angolare costante (vedi esercizio VII.13):

$$\dot{\omega} = -\frac{M_A}{I} \rightarrow \omega(t) = \omega_o - \frac{M_A}{I} t$$

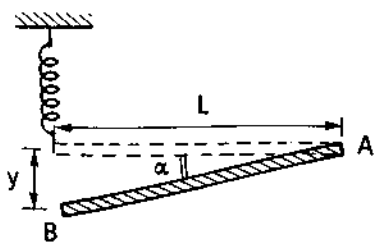
avendo preso, come origine dei tempi ($t = 0$), l'istante in cui viene tagliato il filo.
Dunque, il tempo Δt necessario a ridurre a zero la velocità angolare è tale che:

$$0 = \omega_o - \frac{M_A}{I} \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{\omega_o I}{M_A} = \frac{\omega_o m_1 R^2}{2 M_A}$$

VII.16. All'equilibrio (asse orizzontale) il momento risultante delle forze esterne agenti sulla sbarra, rispetto al polo A, è nullo; per cui, detta L la lunghezza dell'asta, si ha:

$$M_A^{(e)} = \frac{L}{2} mg - L k y_o = 0 \rightarrow \frac{L}{2} mg = L k y_o$$

dove y_o è lo spostamento dell'estremo B dell'asta e della molla rispetto alla posizione di riposo della molla stessa.
Per un piccolo spostamento angolare positivo (antiorario), cui corrisponde uno spostamento $y \simeq L\alpha$ dell'estremo B rispetto alla posizione di equilibrio, si ha:

$$M_A^{(e)} = \frac{L}{2} mg - L k (y + y_o) = I_A \frac{d\omega}{dt} = I_A \frac{d^2\alpha}{dt^2}\,.$$

Poiché

$$\frac{L}{2}\,mg = L\,ky_0\,,$$

si ha:

$$-L\,ky = -L\,k\,L\alpha = -L^2\,k\,\alpha = I_A\,\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

da cui:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{L^2\,k}{I_A}\right)\alpha = 0 \qquad \text{con } I_A = \frac{1}{3}\,mL^2\,.$$

Questa equazione differenziale ha come soluzione l'equazione oraria dei moti armonici con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{L^2\,k}{I_A}} = \sqrt{\frac{3\,k}{m}}$$

e periodo

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{3\,k}}\,.$$

VII.17. La mancanza di attrito nel contatto tra manicotto e filo orizzontale implica che le forze esterne al sistema sbarra-manicotto siano verticali (peso e reazione vincolare normale $\vec{N}$). Dunque:

$$F_x^{(e)} = 0 = \frac{dQ_x}{dt} \to Q_x = \text{cost} = Q^{(\text{in})} = 0\,.$$

Dunque:

$$Q_x = m\text{v}_{cx} = 0 \to \text{v}_{cx} = 0\,.$$

Il c.d.m. C non varia la sua ascissa x_c, che resta pari al suo valore iniziale $x_c = L/2$.
Dunque la traiettoria del c.d.m. è rettilinea verticale.
Determiniamo la componente verticale della velocità del c.d.m.

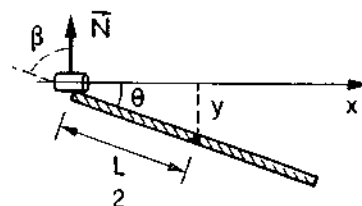
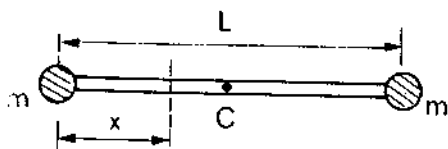
$$y_c = \frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\text{v}_{cy} = \text{v}_c = \frac{L}{2}\,\dot{\theta}\cos\theta \to \dot{\theta} = \omega = \frac{2\,\text{v}_c}{L\cos\theta}\,.$$

Il teorema dell'energia cinetica si scrive

$$mgy_c = \frac{1}{2}\,m\text{v}_c^2 + \frac{1}{2}\,I_c\omega^2 = \frac{1}{2}\,m\text{v}_c^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{12}\,mL^2\left(\frac{2\,\text{v}_c}{L\cos\theta}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,m\text{v}_c^2\left(1 + \frac{1}{3\cos^2\theta}\right) = mg\,\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\text{v}_c^2 = \frac{3\,g\,L\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta}{3\cos^2\theta + 1}\,.$$

VII.18. Dalla seconda equazione cardinale della meccanica dei sistemi si ha:

$$M = -I_0 \frac{d\omega}{dt}$$

da cui:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{M}{I_0} t \qquad \text{(moto uniformemente ritardato)}$$

$$\omega(t_f) = 0 = \omega_0 - \frac{M}{I_0} t_f \rightarrow t_f = \frac{\omega_0}{M} I_0$$

$$I_0 = mx^2 + m(L-x)^2 + I_0^{(\text{SBARRA})} =$$

$$= mx^2 + m(L-x)^2 + \left[I_c + m\left(\frac{L}{2} - x\right)^2\right] =$$

$$= mx^2 + m(L-x)^2 + \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 .$$

Il tempo di frenata t_f vale:

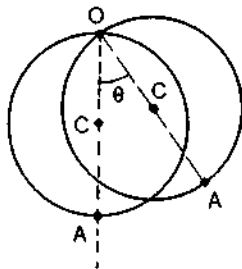
$$t_f = \frac{\omega_0}{M}\left[mx^2 + m(L-x)^2 + \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{2} - x\right)^2\right].$$

La condizione di minimo per t_f implica

$$\frac{dt_f}{dx} = 0 = \frac{\omega_0 m}{M}\left[2x - 2(L-x) - 2\left(\frac{L}{2} - x\right)\right] = \frac{\omega_0 m}{M}(6x - 3L)$$

da cui $x = \frac{L}{2} = x_c$ (c.d.m. del sistema).

Che si tratti di un minimo per t_f si verifica osservando che la derivata seconda di t_f rispetto ad x è positiva:

$$\frac{d^2 t_f}{dx^2} = \frac{\omega_0 m}{M} \cdot 6 > 0 .$$

VII.19. Procedendo come nell'esempio E.VII.10, si ha:

$$-mgR \operatorname{sen}\theta = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{mgR}{I_0}\right)\theta \simeq 0 \qquad (\operatorname{sen}\theta \simeq \theta)$$

$\theta(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$, in cui la pulsazione ω vale:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I_0}}, \quad \text{da cui} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgR}} .$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse non baricentrale passante per O si calcola tramite il teorema di Huygens-Steiner

$$I_0 = I_c + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$$

Dunque:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} = 6{,}28 \text{ s} .$$

VII.20. Per applicare il teorema dell'energia cinetica occorre calcolare il lavoro della forza peso. Il c.d.m. C del sistema giace sulla congiungente i c.d.m. C_1 e C_2 dei semicilindri e passa dalla quota iniziale $y_c^{(IN)}$ alla quota finale $y_c^{(FIN)} = 0$ (quando il piano AB è verticale, il c.d.m. C si porta sull'asse x).

$$y_c^{(IN)} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

dove y_1 ed y_2 rappresentano le quote iniziali dei c.d.m. dei semicilindri di massa m_1 ed m_2 rispettivamente. È da osservare che, per l'omogeneità dei semicilindri, $y_1 = -y_2$. Dunque:

$$y_c^{(IN)} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) y_1 = \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right) y_1 .$$

Per il calcolo di y_1 basta ricordare il problema VI.12 già svolto sul c.d.m. di una lamina semicircolare omogenea, per cui:

$$y_1 = \frac{1}{M}\int y\, dm = \frac{1}{M}\int_0^R y\, \sigma\, 2x\, dy$$

con $x = \sqrt{R^2 - y^2}$, da cui, integrando,

$$y_1 = \frac{4R}{3\pi} .$$

La stessa quota avrà il c.d.m. di un semicilindro omogeneo, rispetto al centro: $y_1 = 4R/3\pi$. Dunque:

$$y_c^{(IN)} = \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right) y_1 = \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right) \frac{4R}{3\pi} .$$

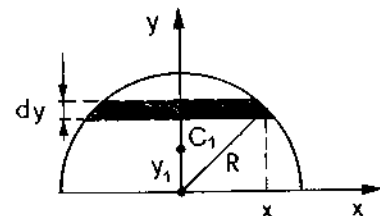
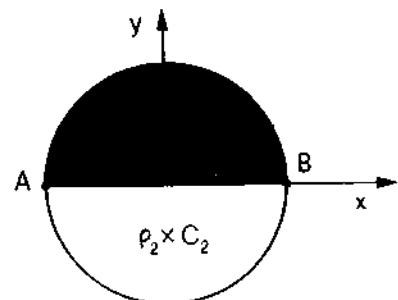
Per il teorema dell'energia cinetica si ha:

$$L_{peso} = (m_1 + m_2)\, g\, (y_c^{(IN)} - y_c^{(FIN)}) = \frac{4\,(m_1 + m_2)\, g\, (\rho_1 - \rho_2)\, R}{3\pi\, (\rho_1 + \rho_2)} = K^{(FIN)} .$$

Poiché

$$m_1 = \frac{1}{2}\pi R^3 \rho_1 \quad \text{ed} \quad m_2 = \frac{1}{2}\pi R^3 \rho_2 ,$$

sostituendo si ha:

$$K^{(FIN)} = \frac{2}{3}\, g\, R^4\, (\rho_1 - \rho_2) .$$

VII.21. Supponendo, per esempio, che il sistema parta da fermo all'istante iniziale, scriviamo il teorema dell'energia cinetica. Ad un certo istante t, la variazione di quota sarà $y(t)$ ed il corrispondente lavoro (positivo) della forza peso sarà:

$$L_{peso} = (m_1 + m_2)\, g\, y(t)$$

Per il teorema dell'energia cinetica si avrà:

$$L_{peso} = (m_1 + m_2)\, g\, y(t) = K - K_0 = K$$

dove K_0 è l'energia cinetica iniziale (nulla) e

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 = \frac{1}{2}\left[(m_1 + m_2) + \frac{I_c}{r^2}\right] v_c^2(t)$$

(essendo $v_c = \omega r$).
Derivando rispetto al tempo ambo i membri della relazione precedente, si ha:

$$(m_1 + m_2)\, g\, v_c = \frac{1}{2}\left[m_1 + m_2 + \frac{I_c}{r^2}\right] 2\, v_c\, a_c$$

da cui:

$$a_c = \frac{(m_1 + m_2)}{\left(m_1 + m_2 + \frac{I_c}{r^2}\right)}\, g$$

dove

$$I_c = \frac{1}{2} m_1 R^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{m_2}{2} r^2 = \frac{1}{2} m_1 R^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 .$$

VII.22. Entrambi i vettori momenti della q.d.m. hanno la stessa direzione e verso, perpendicolare all'asta, poiché le velocità sono parallele e di verso opposto. Il loro modulo comune, trattandosi di traiettorie circolari di raggio h percorse con velocità angolare ω, è

$$v = \omega h = \omega a \operatorname{sen}\theta .$$

Dunque

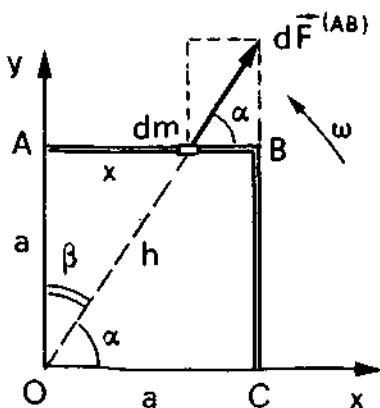
$$P = 2\, a\, m v = 2\, a\, m \omega a \operatorname{sen}\theta = 2\, a^2\, m \omega \operatorname{sen}\theta .$$

VII.24. La forza peso è sempre equilibrata dal tavolo. Per calcolare la reazione vincolare totale si può scegliere un sistema di riferimento solidale con la cornice, e quindi non inerziale, in cui la risultante delle forze fittizie (centrifughe) deve essere equilibrata dalla reazione vincolare cercata, dal momento che, nel sistema scelto, la cornice è in quiete.

Calcoliamo la forza centrifuga complessiva.
Indicando con $dm = \lambda\, dl$ ($\lambda = m/4a$) un elemento di massa a distanza h dall'asse di rotazione O e con α e β gli angoli formati dalla direzione h con gli assi x ed y rispettivamente, valutiamo separatamente i contributi alla forza centrifuga complessiva da parte dei lati OA, AB, BC e CO.

Lato OA:

$$dF_y^{(OA)} = dm\, \omega^2 h^2 = dm\, \omega^2 y = \lambda\, \omega^2 y\, dy \quad \text{da cui}$$

$$F_x^{(OA)} = 0 \qquad F_y^{(OA)} = \int_0^a dF_y^{(OA)} = \frac{1}{2} \lambda\, \omega^2 a^2$$

Lato CO:

$$dF_x^{(CO)} = dm\,\omega^2 x\,dx$$

$$F_x^{(CO)} = \int_0^a dF_x^{(CO)} = \frac{1}{2}\lambda\omega^2 a^2 \qquad F_y^{(CO)} = 0$$

I lati AB e BC danno contributi con entrambe le componenti x ed y diverse da zero.

LATO AB:

$$|d\vec{F}^{(AB)}| = dm\,\omega^2 h = \lambda\omega^2 h\,dx = dF^{(AB)}$$

$$dF_x^{(AB)} = dF^{(AB)} \cdot \cos\alpha = dF^{(AB)} \operatorname{sen}\beta = dF^{(AB)}\frac{x}{h} = \lambda\omega^2 x\,dx$$

$$F_x^{(AB)} = \int_0^a \lambda\omega^2 x\,dx = \frac{1}{2}\lambda\omega^2 a^2$$

$$dF_y^{(AB)} = dF^{(AB)} \cdot \cos\beta = dF^{(AB)}\frac{a}{h} = \lambda\omega^2 a\,dx$$

$$F_y^{(AB)} = \int_0^a \lambda\omega^2 a\,dx = \lambda\omega^2 a^2$$

Lato BC:

$$|d\vec{F}^{(BC)}| = dF^{(BC)} = dm\,\omega^2 h = \lambda\omega^2 h\,dy$$

$$dF_x^{(BC)} = dF^{(BC)} \cdot \cos\alpha = dF^{(BC)}\frac{a}{h} = \lambda\omega^2 a\,dy$$

$$F_x^{(BC)} = \int_0^a \lambda\omega^2 a\,dy = \lambda\omega^2 a^2$$

$$dF_y^{(BC)} = dF^{(BC)} \cdot \operatorname{sen}\alpha = dF^{(BC)}\frac{y}{h} = \lambda\omega^2 y\,dy$$

$$F_y^{(BC)} = \int_0^a \lambda\omega^2 y\,dy = \frac{1}{2}\lambda\omega^2 a^2 .$$

Sommando i contributi dovuti ai 4 lati del quadrato, si ha:

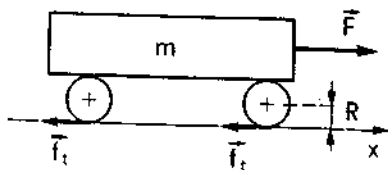
$$\begin{cases} F_x = F_x^{(CO)} + F_x^{(BC)} + F_x^{(AB)} = \frac{1}{2}\lambda\omega^2 a^2 + \lambda\omega^2 a^2 + \frac{1}{2}\lambda\omega^2 a^2 = 2\lambda\omega^2 a^2 \\ F_y = F_y^{(OA)} + F_y^{(BC)} + F_y^{(AB)} = \frac{1}{2}\lambda\omega^2 a^2 + \frac{1}{2}\lambda\omega^2 a^2 + \lambda\omega^2 a^2 = 2\lambda\omega^2 a^2 \end{cases}$$

La forza centrifuga risultante, e dunque la reazione vincolare dell'asse, è diretta secondo la diagonale OB del quadrato. Il suo modulo vale

$$F = R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{8\lambda^2\omega^4 a^4} = 2\lambda\omega^2 a^2\sqrt{2} .$$

Osserviamo che questa forza coincide con la forza centrifuga che si avrebbe se tutta la massa $m = 4\lambda a$ fosse concentrata nel c.d.m. e quindi si muovesse di moto circolare uniforme su un cerchio di raggio $a/\sqrt{2}$. In questo caso, infatti, si avrebbe

$$F_{\text{centrifuga}} = m\omega^2\frac{a}{\sqrt{2}} = 4\lambda a\omega^2\frac{a}{\sqrt{2}} = 2\lambda\omega^2 a^2\sqrt{2} ,$$

che coindice con l'espressione trovata in modo diretto.

VII.24. Applichiamo il teorema dell'energia cinetica supponendo, per esempio, di partire da fermo, e relativamente ad uno spostamento x del carrello:

$$L = Fx = K^{(\text{fin})}.$$

L'energia cinetica $K^{(\text{fin})}$ consta di tre contributi:

- traslazione del corpo del carrello : $\frac{1}{2} m_{\text{corpo}} v^2$
- traslazione ruote (2 sistemi) : $2 \cdot \frac{1}{2} m_{\text{ruote}} v^2$
- rotazione ruote intorno al loro c.d.m.: $2 \cdot \frac{1}{2} I\omega^2 = I \frac{v^2}{R^2}$.

Dunque

$$Fx = \frac{1}{2} m_{\text{corpo}} v^2 + 2 \frac{1}{2} m_{\text{ruote}} v^2 + I \frac{v^2}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{2} (m_{\text{corpo}} + 2 m_{\text{ruote}}) v^2 + I \frac{v^2}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + I \frac{v^2}{R^2} = \left(\frac{mR^2 + 2I}{2R^2} \right) v^2 .$$

Derivando ambo i membri rispetto al tempo si ha:

$$Fv = \left(\frac{mR^2 + 2I}{2R^2} \right) 2va \rightarrow a = \frac{FR^2}{mR^2 + 2I}.$$

Allo stesso risultato si arriva applicando le equazioni cardinali della meccanica dei sistemi:

$$F - 2f_t = ma$$

dove f_t è la forza di attrito totale su ciascun sistema ruotante (f_t non compie lavoro perché, nel suo puro rotolamento, l'asse istantaneo di rotazione è, istante per istante, fermo).
Per ogni coppia di ruote, il cui asse si muove con accelerazione a, si ha:

$$f_t R = I\dot{\omega} = I \frac{a}{R} \rightarrow f_t = I \frac{a}{R^2}.$$

Dunque:

$$F - 2f_t = F - 2 \frac{Ia}{R^2} = ma$$

$$a \left(m + \frac{2I}{R^2} \right) = F \rightarrow a = \frac{R^2 F}{mR^2 + 2I}.$$

VII.25. In un sistema di riferimento fisso si ha, indicando con il suffisso a la componente assiale:

$$M_a^{(e)} = 0 = \frac{dP_a}{dt} \rightarrow P_a = \text{costante} \rightarrow P_a^{(\text{in})} = P_a^{(\text{fin})}$$

$$P_a^{(\text{in})} = I\omega_0 + Rm\text{v}_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega_0 + Rm\omega_0 R =$$

$$= \omega_0 R^2\left(\frac{M}{2} + m\right) = \frac{1}{2}(M + 2m)\,\omega_0 R^2 .$$

Per quanto riguarda $P_a^{(\text{fin})}$, trascurando il momento della q.d.m. dell'uomo che ruota su se stesso quando si trova al centro della piattaforma, si ha:

$$P_a^{(\text{fin})} = I\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega .$$

La conservazione del momento della q.d.m. (componente assiale) implica:

$$\frac{1}{2}MR^2\omega = \frac{1}{2}(M + 2m)\,\omega_0 R^2 \rightarrow \omega = \left(\frac{M + 2m}{M}\right)\omega_0 .$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica, si ha:

$$K^{(\text{fin})} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{M + 2m}{M}\right)^2\omega_0^2 = \frac{1}{4}\frac{(M + 2m)^2}{M}\omega_0^2 R^2$$

$$K^{(\text{in})} = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}m\text{v}^2 = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 R^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\omega_0^2 R^2\left(\frac{M}{2} + m\right) = \frac{1}{4}(M + 2m)\,\omega_0^2 R^2$$

$$\frac{K^{(\text{fin})}}{K^{(\text{in})}} = \frac{M + 2m}{M} = 1 + \frac{2m}{M} > 1 .$$

La variazione di energia cinetica è dovuta al lavoro delle forze interne.

VII.26. L'equilibrio si ha per un'elongazione y_0 della molla rispetto alla posizione di riposo tale che:

$$mg = ky_0 .$$

Per il corpo m si ha:

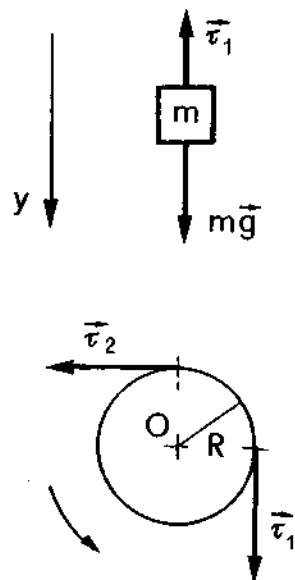
$$-\tau_1 + mg = ma$$

$$\tau_1 = mg - ma$$

Per la carrucola cilindrica si ha:

$$M^{(e)} = R(\tau_2 - \tau_1) = -I\dot{\omega} = -I\frac{a}{R}$$

$R\tau_2$ è preso positivo perché tende a far ruotare in senso antiorario. Il segno negativo al termine $I\dot{\omega}$ tiene conto dell'effetto di richiamo della molla.
Per uno spostamento y rispetto alla posizione di equilibrio y_0 si ha:

$$\tau_2 = k(y + y_0)$$

e dunque:

$$R(\tau_2 - \tau_1) = R[k(y_0 + y) - mg + ma] = -I\frac{a}{R},$$

da cui:

$$ky + ma = -\frac{I}{R^2}a \rightarrow a\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = -ky$$

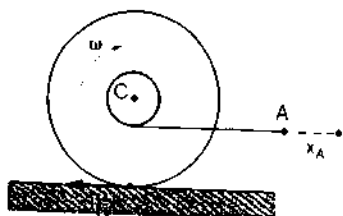
$$a = -\left(\frac{2k}{M + 2m}\right)y \rightarrow \ddot{y} = -\omega^2 y$$

da cui

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M + 2m}{2k}}$$

avendo utilizzato la relazione: $I = \frac{1}{2}MR^2$.

VII.27. Il lavoro è dovuto soltanto alla forza peso (non si ha strisciamento sul piano) e vale $L = mgh$.
L'energia cinetica vale:

$$K = K_{\text{rocchetto}} + K_m = \left(\frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) + \frac{1}{2}mv^2 =$$
$$= \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_c^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv^2.$$

È da osservare che, nel caso di questo esercizio, il filo è sistemato in modo da essere tirato dal basso, e non dall'alto come nell'esercizio VII.12. Ciò implica che, mentre viene tirato il filo, il rocchetto procede in modo non da svolgersi, ma da avvolgersi ulteriormente.
Per una rotazione $\Delta\theta$ del rocchetto, il punto C si sposta di $x_c = R\Delta\theta$, ma riavvolge un tratto di filo di lunghezza $r\Delta\theta$.
Pertanto lo spostamento x_A del punto A sarà:

$$x_A = x_c - r\Delta\theta = x_c - r\frac{x_c}{R} = x_c\left(\frac{R - r}{R}\right).$$

In termini di velocità si ha:

$$v = v_A = \left(\frac{R - r}{R}\right)v_c \rightarrow v_c = \left(\frac{R}{R - r}\right)v.$$

Il teorema dell'energia cinetica si scrive:

$$mgh = \frac{1}{2}M\left(\frac{R}{R - r}\right)^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}\left(\frac{R}{R - r}\right)^2 v^2 + \frac{1}{2}mv^2 =$$
$$= \frac{1}{2}v^2\left[\frac{MR^2}{(R - r)^2} + \frac{I}{(R - r)^2} + m\right] = \frac{1}{2}v^2\left[\frac{MR^2 + I + m(R - r)^2}{(R - r)^2}\right]$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh(R - r)^2}{MR^2 + I + m(R - r)^2}}.$$

VII.28. Si ha una fase impulsiva iniziale conseguente al contatto tra sfera e gradino. In questa fase - che costituisce un *urto*, come vedremo nel prossimo capitolo - il punto O della sfera, che viene in contatto con il gradino, resta bloccato dopo l'urto. Vediamo che, con buona approssimazione, resta costante il momento della q.d.m. rispetto ad O, fra un istante immediatamete precedente ed uno immediatamente seguente l'urto. Infatti dalla relazione:

$$\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{segue} \quad \vec{M}^{(e)}\,dt = d\vec{P},$$

che può essere integrata tra un istante iniziale t_1 immediatamente precedente il contatto con O ed un istante t_2 immediatamente seguente tale contatto. L'intervallo di integrazione è piccolissimo. Le forze attive in questo intervallo di tempo sono la reazione vincolare, in genere molto intensa nel brevissimo intervallo di tempo in cui si manifesta, e la forza peso. La reazione vincolare, che è applicata in O, ha momento nullo rispetto ad O; mentre il momento della forza peso integrato su un intervallo di tempo piccolissimo diventa praticamente trascurabile. Dunque

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}^{(e)}\,dt \simeq 0 = \Delta\vec{P} = \vec{P}^{(\text{fin})} - \vec{P}^{(\text{in})} \rightarrow P \simeq \text{costante},$$

cioè si conserva il momento della q.d.m. tra subito prima e subito dopo l'urto.
Calcoliamo $P_o^{(\text{in})}$ ricordando la relazione [VII.24]:

$$\vec{P}_o = \vec{OC} \times m\vec{v}_c + I_c\vec{\omega}$$

da cui:

$$P^{(\text{in})} = a m v_o \,\text{sen}\,\beta + I_c\omega_o = a m v_o \,\text{sen}\,\alpha + I_c\frac{v_o}{a} =$$

$$= a m v_o \frac{(a-h)}{a} + I_c\frac{v_o}{a} = v_o\left[m(a-h) + \frac{I_c}{a}\right].$$

Il momento angolare $P^{(\text{fin})}$ subito dopo l'impatto, cioè prima che la sfera sia salita di quota in modo apprezzabile, vale:

$$P^{(\text{fin})} = I_o\omega = (I_c + m a^2)\,\omega\,.$$

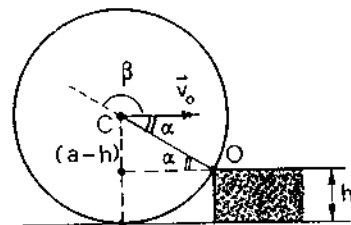
La relazione $P^{(\text{in})} = P^{(\text{fin})}$ si esplicita allora:

$$v_o\left[m(a-h) + \frac{I_c}{a}\right] = \frac{v_o}{a}\,[m a(a-h) + I_c] = (I_c + m a^2)\,\omega$$

da cui:

$$v_o = \frac{a(I_c + m a^2)}{[m a(a-h) + I_c]}\,\omega\,.$$

La sfera dispone dunque di una velocità angolare ω ed ha il suo c.d.m. a quota a, quando inizia a ruotare intorno al punto bloccato O.
Si vuole conoscere il valore minimo ω_{MIN} di ω che consente di arrivare, ferma, sopra il blocco, cioè con il suo c.d.m. a quota $(a+h)$. Per il teorema dell'energia cinetica applicato alla situazione descritta si ha:

$$L_{\text{peso}} = -mgh = K^{(f)} - K^{(\text{in})} = -K^{(\text{in})} = -\frac{1}{2}I_o\omega_{MIN}^2$$

da cui

$$\omega_{MIN} = \sqrt{\frac{2\,mgh}{I_c + m a^2}}\,.$$

Pertanto la minima velocità di traslazione v_o^{MIN} che consente alla sfera di salire sul gradino è:

$$v_o^{MIN} = \frac{a(I_c + m a^2)}{[m a(a-h) + I_c]}\sqrt{\frac{2\,mgh}{I_c + m a^2}} =$$

$$= \frac{a}{m a(a-h) + I_c}\sqrt{2\,mgh\,(I_c + m a^2)}\,.$$

Essendo $I_c = \frac{2}{5}\,m a^2$, si trova immediatamente

$$v_o^{MIN} = \frac{a}{7a - 5h}\sqrt{70\,gh}\,.$$

Capitolo ottavo

VIII.1. Applicando la conservazione dell'energia al moto di P_1 prima dell'urto, si ricava la sua velocità v_{o1} prima dell'urto: $v_{o1} = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_o)}$. Nell'urto frontale elastico si ha (vedi esempio E.VIII.4):

$$\begin{cases} v_1 = v_{o1}\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -v_{o1}\dfrac{m}{3m} = -\dfrac{v_{o1}}{3} = -\dfrac{1}{3}\sqrt{2gl(1-\cos\theta_o)} \\ v_2 = v_{o1}\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} = v_{o1}\dfrac{2m}{3m} = \dfrac{2}{3}v_{o1} = \dfrac{2}{3}\sqrt{2gl(1-\cos\theta_o)}\,. \end{cases}$$

Dopo l'urto, applicando la conservazione dell'energia al moto dei due pendoli si ha:

$$2gl(1-\cos\theta_1) = v_1^2 = \frac{2gl(1-\cos\theta_o)}{9}\,;$$

da cui $\cos\theta_1 \simeq 0{,}97$; $\theta_1 \simeq 15{,}5°$.

$$2gl(1-\cos\theta_2) = v_2^2 = \frac{4}{9}\cdot 2gl\,(1-\cos\theta_o)\,;$$

da cui $\cos\theta_2 \simeq 0{,}87$; $\theta_2 \simeq 30°$.

VIII.2. Poiché $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ (vedi esempio E.VIII.3), si ha $\theta_p = 70°$. Usando le [VIII.15] (con $m_1 = m_2 = m$) si ha poi:

$$v_{1x} = \frac{v_o}{2}(1 + \cos 2\alpha) \qquad v_{2x} = \frac{v_o}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$v_{1y} = \frac{v_o}{2}\,\mathrm{sen}\,2\alpha \qquad v_{2y} = \frac{v_o}{2}\,\mathrm{sen}\,2\alpha$$

da cui:

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{\mathrm{sen}\,2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \mathrm{tg}\,\theta_B = \mathrm{tg}\,20° = 0{,}364\,.$$

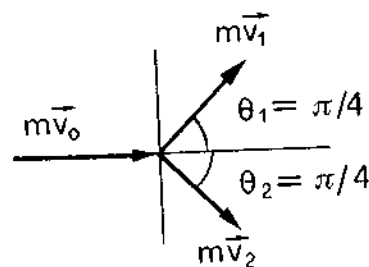
Sostituendo $\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2 2\alpha}$ e risolvendo rispetto a sen 2α si ha sen $2\alpha \simeq 0{,}64$; cioè $2\alpha \simeq 40°$, e dunque $\alpha = 20°$. Poiché $\cos\alpha = \dfrac{b}{R_1 + R_2}$, si ha

$$b = (R_1 + R_2)\cos\alpha = 6 \text{ cm} \cdot \cos 20° = 6 \text{ cm} \cdot 0{,}94 = 5{,}65 \text{ cm} .$$

VIII.3. Poiché le due masse sono fra di loro uguali, l'angolo $\theta_1 + \theta_2$ che esse formano nel laboratorio vale $\pi/2$; da cui segue $\theta_2 = -\pi/4 = -45°$. Proiettando la equazione di conservazione della quantità di moto nelle direzioni trasversale e longitudinale rispetto a $\vec{v}_o$ si ha:

$$\begin{cases} m v_1 \,\text{sen}\,\theta_1 + m v_1 \,\text{sen}\,\theta_2 = 0 \\ m v_1 \cos\theta_1 + m v_2 \cos\theta_2 = m v_o . \end{cases}$$

Dalla prima (ponendo $\theta_2 = -\theta_1$) segue $v_1 = v_2$ (chiamiamo v il loro valore comune). Dalla seconda, ponendo $v_1 = v_2 = v$ e $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, segue

$$v = \frac{v_o}{\sqrt{2}} \simeq 1{,}41 \text{ m/s} .$$

VIII.4. Il problema può essere risolto usando le [VIII.15].
Si ha $\cos\alpha = b/(R_1 + R_2) = 1{,}5/3 = 0{,}5$; da cui $\alpha = 60°$, e dunque $2\alpha = 120°$.
Nelle [VIII.15] va dunque posto

$$\text{sen}\, 2\alpha = 0{,}866; \quad \cos 2\alpha = -0{,}5; \quad m_2 = 1{,}5\, m_1 ;$$

esse divengono pertanto:

$$v_{1x} = \frac{v_o}{2{,}5}(1 - 1{,}5 \cdot 0{,}5) = 0{,}2 \text{ m/s} \qquad v_{2x} = \frac{v_o}{2{,}5}(1 + 0{,}5) = 1{,}2 \text{ m/s}$$

$$v_{1y} = v_o \cdot \frac{1{,}5}{2{,}5} \cdot 0{,}866 = 1{,}04 \text{ /s} \qquad v_{2y} = -\frac{v_o}{2{,}5} \cdot 0{,}866 \simeq -0{,}70 \text{ m/s}$$

$$\text{tg}\,\theta_1 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = 5{,}2; \;\; \theta_1 = 79° \qquad \text{tg}\,\theta_2 = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = -0{,}58 \;\; \theta_2 \simeq -30°$$

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = 1{,}06 \text{ m/s} \qquad v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = 1{,}39 \text{ m/s}$$

VIII.5. Usando le [VIII.23] (e ponendo in esse $v_{o1} = 4$ m/s; $v_{o2} = 0$; $m_1 = 0{,}1$ kg; $m_2 = 0{,}15$ kg) si ha:

$$0 = v_1 = v_{1x} = \frac{-\varepsilon \cdot 0{,}15 \cdot 4 + 4 \cdot 0{,}1}{0{,}25}; \quad v_2 = v_{2x} = \frac{\varepsilon \cdot 0{,}1 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot 4}{0{,}25} .$$

Dalla prima si ricava $\varepsilon = 0{,}67$; e ponendo questo valore di ε nella seconda si ha $v_2 = 2{,}67$ m/s.
Si ha poi

$$\Delta K = K_o - K = \frac{1}{2} m_1 v_o^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 0{,}26 \text{ J} .$$

VIII.6. Prima dell'urto la particella P_1 ha velocità

$$v_o = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_{o1})} = \sqrt{2gl\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

e la particella 2 è ferma. Usando le [VIII.23] (con $v_{o1} = v_o$; $v_{o2} = 0$; $m_2 = 2m_1 = 2m$) si ha:

$$v_1 = v_{1x} = \frac{-\varepsilon \cdot 2 \cdot v_o + v_o}{3} = \frac{1-2\varepsilon}{3} v_o = \frac{1-2\varepsilon}{3}\sqrt{2gl\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$v_2 = v_{2x} = \frac{\varepsilon v_o + v_o}{3} = \frac{1+\varepsilon}{3} v_o = \frac{1+\varepsilon}{3}\sqrt{2gl\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

D'altra parte, sappiamo che $\theta_1 = 8°(\cos\theta_1 = 0{,}990)$ per cui

$$v_1 = -\sqrt{2gl(1-0{,}990)}\,;$$

sostituendo questa espressione al primo membro delle precedenti relazioni si ricava

$$\frac{1-2\varepsilon}{3} = -\frac{\sqrt{1-0{,}990}}{\sqrt{1-\sqrt{2}/2}}\,;$$

da cui $\varepsilon = 0{,}76$. Sostituendo questo valore di ε al secondo membro della relazione che fornisce v_2, e ponendo al primo membro $v_2 = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_2)}$ si ricava $\cos\theta_2 = 0{,}896$; da cui $\theta_2 = 26{,}5°$.

VIII.7. La velocità v_o di P_1 prima dell'urto si ricava dal teorema di conservazione dell'energia:

$$mgl = \frac{1}{2} m v_o^2;\; v_o^2 = 2gl\,.$$

Nell'urto si conserva la quantità di moto totale ($\vec{Q} = \vec{Q}_o$); infatti la reazione vincolare $\vec{\tau}$ è ortogonale a $\vec{Q}$:

$$\vec{Q}_o = m\vec{v}_o = \vec{Q} = 2m\vec{v}; \quad \text{da cui } \vec{v} = \vec{v}_o/2\,.$$

Dopo l'urto si ha (teorema di conservazione dell'energia):

$$(2m)gl(1-\cos\theta_f) = \frac{1}{2}(2m)v^2 = \frac{1}{2}(2m)\frac{v_o^2}{4} = \frac{1}{2}(2m)\frac{2gl}{4}$$

da cui:

$$(1-\cos\theta_f) = \frac{1}{4} = 0{,}25\,; \quad \cos\theta_f = 0{,}75\,; \quad \theta_f \simeq 41{,}5°.$$

VIII.8. Il teorema di conservazione dell'energia ci consente di calcolare la velocità angolare ω_o della sbarretta prima dell'urto.

$$mgl/2 = \frac{1}{2} I\omega_o^2 \quad \text{dove} \quad I = \frac{ml^2}{3}. \quad \text{Da cui} \quad \omega_o^2 = \frac{3g}{l}\,.$$

Nell'urto si conserva il momento angolare totale (non la quantità di moto totale: infatti in O si esplica una reazione impulsiva; vedi es. E.VIII.10):

$$I\omega_o = (I + ml^2)\,\omega = \frac{4}{3}\,ml^2\omega$$

da cui

$$\omega = \frac{I\omega_o}{I + ml^2} = \frac{ml^2}{3}\,\frac{\omega_o}{\frac{4}{3}\,ml^2} = \frac{\omega_o}{4}\,.$$

Dopo l'urto si conserva l'energia:

$$\frac{1}{2}\,(I + ml^2)\,\omega^2 = \left(mg\frac{l}{2} + mgl\right)(1 - \cos\theta_f) = mgl\frac{3}{2}\,(1 - \cos\theta_f)$$

da cui

$$(1 - \cos\theta_f) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\,ml^2\right)\cdot\frac{\omega_o^2}{16}\,\frac{1}{\frac{3}{2}\,mgl} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\,ml^2\right)\frac{3g}{l\cdot 16}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}\,mgl} = \frac{1}{12} = 0{,}083$$

$$\cos\theta_f = (1 - 0{,}083) = 0{,}917 \quad \theta_f = 23{,}6^\circ\,.$$

VIII.9. Si ha:

$$K_o = \frac{1}{2}\,Mv_o^2 = Mgh_o$$

$$K = \frac{1}{2}[I\omega^2 + Mv^2 + mv^2] = \frac{1}{2}\,v^2\,[I/(l/2)^2 + M + m] =$$

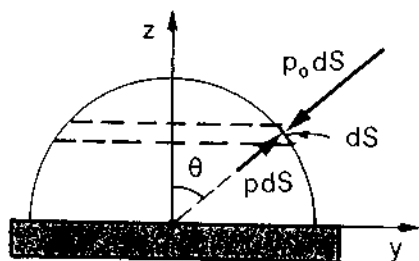
$$= \frac{1}{2}\,v^2\left(m + \frac{4}{3}\,M\right) = \frac{1}{2}\,\frac{M^2\,2gh_o}{\left(m + \frac{4}{3}\,M\right)} = Mgh_o\frac{M}{\left(m + \frac{4}{3}\,M\right)}$$

Dunque

$$K_o - K = Mgh_o\left(\frac{m + \frac{1}{3}\,M}{m + \frac{4}{3}\,M}\right) = 0{,}75\ \mathrm{J}\,.$$

Capitolo nono

IX.1. Sull'elemento di superficie dS si esercita una forza radiale verso l'interno pari a:

$$dF = (p_o - p)\,dS = \frac{2}{3}\,p_o\,dS$$

la cui proiezione lungo la verticale è:

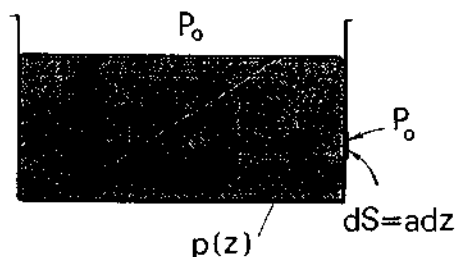
$$dF_z = dF \cdot \cos\theta = \frac{2}{3}\, p_0 \cos\theta \, dS .$$

Tenendo conto che $dS\cos\theta = dS_{xy}$ = proiezione di dS sul cerchio equatoriale (piano xy), si ha:

$$F_z = \int dF_z = \int_{\text{semisfera}} \left(\frac{2}{3}\, p_0\right) \cos\theta \, dS = \int_{\substack{\text{cerchio}\\ \text{equatoriale}}} \frac{2}{3}\, p_0 \, dS_{xy} = \frac{2}{3}\, p_0 \, \pi R^2$$

Allo stesso risultato si arriva esprimendo dS in coordinate sferiche: $dS = 2\pi R \operatorname{sen}\theta \, R \, d\theta$ ed integrando su θ da 0 a $\pi/2$.
Numericamente

$$F_z = \frac{2}{3} \cdot \left(1{,}01 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right) \cdot (\pi \cdot (0{,}3)^2 \text{ m}^2) = 1{,}9 \cdot 10^4 \text{ N} ,$$

equivalente a 1,95 tonnellate-peso per cui è effettivamente lecito trascurare la forza peso della semisfera metallica.

IX.2. Sull'elemento di superficie $dS = a\,dz$, posto a profondità z rispetto alla superficie libera, la pressione dall'interno è:

$$p(z) = p_0 + \rho g z$$

mentre la pressione dalla parte esterna è p_0.
La forza dF su dS è normale a dS ed è diretta verso l'esterno:

$$dF = (p_0 + \rho g z)\, dS - p_0\, dS = \rho g z \, dS = \rho g z a \, dz$$

Per avere il modulo della forza risultante, trattandosi di un sistema di forze parallele e concordi, basterà sommare i vari contributi elementari dF (con z che varia da zero ad h).

$$F = \int dF = \int_0^h \rho g z a \, dz = \rho g a \frac{h^2}{2} .$$

IX.3. Sul corpo immerso il liquido esercita una spinta di Archimede, diretta verso l'alto e di modulo

$$A = \rho_L V g .$$

Per il principio di azione e reazione, il liquido riceve una spinta di ugual modulo e diretta verso il basso, che viene trasmessa al piatto della bilancia. Dunque la massa del contrappeso deve essere aumentata di

$$\Delta m = \rho_L V = \left(0{,}9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) \cdot (30 \text{ cm}^3) = 27 \text{ g} .$$

Di fatto è come se si aggiungesse un volume di liquido pari al volume del corpo immerso.

IX.4. Indicando con V_1 e V_2 le porzioni di volume V del corpo ($V = V_1 + V_2$) immerse nel liquido 1 e nel liquido 2 rispettivamente, la spinta di Archimede vale:

$$A = (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2)\, g\,.$$

Tale spinta, per l'equilibrio, deve essere uguale ed opposta alla forza peso agente sul corpo:

$$\rho V g = (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2)\, g\,, \text{ da cui } \rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}\,.$$

Poiché $V_2 = f_2 V$, e quindi $V_1 = (1 - f_2) V$, si ha $V_2/V_1 = f_2/(1 - f_2)$. Dunque:

$$\rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2 (V_2/V_1)}{1 + (V_2/V_1)} = \frac{\rho_1 + \rho_2 \dfrac{f_2}{1 - f_2}}{1 + \dfrac{f_2}{1 - f_2}} =$$

$$= \rho_1 - \rho_1 f_2 + \rho_2 f_2$$

da cui:

$$\rho = \rho_1 + f_2 (\rho_2 - \rho_1)\,.$$

Poiché $0 < f_2 < 1$, è evidente che $\rho_1 < \rho < \rho_2$. I casi estremi sono: $f_2 = 0$, cioè corpo tutto immerso nel liquido 1, che corrisponde al caso $\rho = \rho_1$ (basta la spinta di Archimede del liquido meno denso); $f_2 = 1$, cioè corpo tutto immerso nel liquido 2, che corrisponde al caso $\rho = \rho_2$.

IX.5. A causa della massa trascurabile, il pallone inizialmente galleggia fuoriuscendo dall'acqua in modo praticamente completo. L'immersione totale del pallone implica uno spostamento di una massa d'acqua $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, dalla quota iniziale del suo baricentro, che era a profondità R, alla superficie del lago (la cui quota non cresce apprezzabilmente). Il lavoro necessario è dunque:

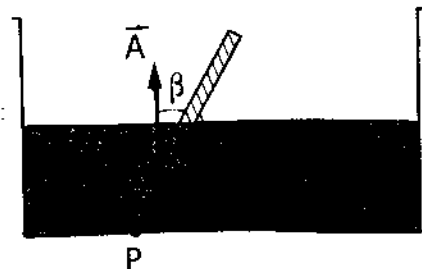
$$L = mgR = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g R \cong 20{,}8 \text{ J}\,.$$

IX.6. Tenendo conto che la forza peso è applicata al c.d.m. della sbarra (punto centrale) e che a spinta di Archimede $\vec{A}$ è applicata a metà del tratto immerso, per cui

$$x \operatorname{sen} \alpha = h/2$$

si ha, uguagliando a zero (equilibrio) il momento risultante rispetto al polo P:

$$M_P^{(E)} = x A \operatorname{sen} \beta - \frac{L}{2}\, mg \operatorname{sen} \gamma =$$

$$= x A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{L}{2}\, mg \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= x A \cos \alpha - \frac{L}{2}\, mg \cos \alpha = 0$$

da cui

$$xA = \frac{L}{2} mg .$$

Essendo

$$x = \frac{h}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{L}{4 \operatorname{sen} \alpha}$$

si ha:

$$\frac{A}{2 \operatorname{sen} \alpha} = mg .$$

Indicando con S l'area della sezione della sbarra e con ρ_s la sua densità, essendo $2x$ la lunghezza della parte di sbarra immersa, si ha:

$$A = \rho_{H_2O} S\, 2x\, g = \rho_{H_2O} S \frac{L}{2 \operatorname{sen} \alpha} g, \quad \text{ed anche } m = \rho_s S L$$

per cui:

$$\frac{A}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \rho_{H_2O} S \frac{Lg}{2 \operatorname{sen} \alpha} \frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \rho_s S L g .$$

Dunque:

$$\rho_s = \rho_{H_2O} \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \alpha} = \left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \frac{1}{4 \cdot 0{,}67} \simeq 373 \text{ kg/m}^3 .$$

IX.7. Il corpo, di volume $V = 4/3 \pi R^3$ e massa $m = \rho_L V$, è in equilibrio per effetto di varie forze. Orientiamo l'asse verticale positivamente verso l'alto ed indichiamo con A la spinta di Archimede.

a) Nel sistema inerziale (ascensore fermo) si ha:

$$A - mg - \tau = 0$$

$$\tau = A - mg = \rho_A V g - \rho_L V g = (\rho_A - \rho_L) V g =$$
$$= \left[(10^3 - 0{,}4 \cdot 10^3) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right] \frac{4}{3} \pi \left[(5 \cdot 10^{-2})^3 \text{ m}^3\right] \cdot \left(9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 3{,}08 \text{ N}$$

b) Nel sistema non inerziale in discesa con accelerazione a, si ha:

$$A' - mg + ma - \tau' = 0$$

con $A' = \rho_A V (g - a)$ per cui:

$$\tau' = \rho_A V (g - a) - \rho_L V (g - a) =$$
$$= (\rho_A - \rho_L) V (g - a) = (\rho_A - \rho_L) V g \left(1 - \frac{a}{g}\right) =$$
$$= \tau \left(1 - \frac{a}{g}\right) = \tau \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \tau \simeq 2 \text{ N} .$$

IX.8. Nel sistema di riferimento non inerziale solidale con il tubo ruotante, il liquido è in equilibrio in un campo di forze di volume conservative, dovute alla sovrapposizione della forza peso e della forza centrifuga:

$$d\vec{F}^{(V)} = \vec{G}\, dm$$

con

$$G_x = \omega^2 x, \quad G_y = \omega^2 y, \quad G_z = -g$$

avendo orientato l'asse z verso l'alto.
L'energia potenziale U associata al campo è tale che:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x; \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y; \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = -g$$

e quindi:

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + gz + \text{cost}\,.$$

Le sezioni A e B del liquido, che sono alla stessa pressione p_0 dell'ambiente esterno, debbono essere equipotenziali e quindi:

$$U(A) = U(B)$$

cioè:

$$gz_A + \text{cost} = -\frac{1}{2}\omega^2 L^2 + gz_B + \text{cost}\,,$$

da cui

$$g(z_B - z_A) = gh = \frac{1}{2}\omega^2 L^2 \rightarrow h = \frac{\omega^2 L^2}{2g} = 0{,}46 \text{ m}\,.$$

IX.9. Trattandosi di liquido omogeneo in equilibrio nel campo delle forze di volume della gravità (conservative), punti di ugual quota (equipotenziali) debbono avere ugual pressione (isobari).
Deve dunque essere $p_A = p_C$ e quindi, detta p_0 la pressione atmosferica esterna ed $S = \pi R^2$ l'area della sezione del tubo:

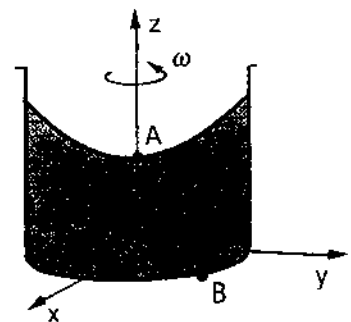
$$p_A = p_0 + \frac{m_A g}{S} = p_C = p_0 + \frac{m_B g}{S} + \rho g h$$

da cui:

$$(m_A - m_B) = \Delta m = \rho S h = 0{,}13 \text{ kg}\,.$$

IX.10. Utilizzando la relazione $dp = -\rho dU$, equivalente alla:

$$p + \rho U = \text{costante},$$

con $U = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + gz$,

e prendendo in considerazione il punto A, in cui la pressione è p_A, ed il punto B, in cui il manometro misura la pressione p_B, si ha:

$$p_A + \rho g h_A = p_B - \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 \; (z_B = 0)$$

Dunque:

$$h_A = \frac{1}{\rho g} \left[(p_B - p_A) - \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{0{,}9 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8} \cdot \left[0{,}1 \cdot 1{,}012 \cdot 10^5 - \frac{1}{2} 0{,}9 \cdot 10^3 \cdot (12)^2 \cdot (0{,}3)^2 \right] =$$

$$= 0{,}48 \text{ m} .$$

IX.11. La massa che passa nell'unità di tempo è ρQ, dove Q è la portata del condotto: $Q = vS$ = costante.
Dal teorema di Bernoulli per condotti orizzontali si ha:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

da cui:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) .$$

Esprimendo le velocità in funzione della portata si ha:

$v_1 = Q/S_1$, $v_2 = Q/S_2$ e quindi:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho Q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)$$

da cui si ricava la massa che fluisce nell'unità di tempo:

$$\rho Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2 \rho \Delta p}{(S_1^2 - S_2^2)}} .$$

IX.12. Quando in un ramo del tubo il liquido arriva a quota $(+ z)$, dall'altro lato sarà a quota $(- z)$. La parte di liquido non equilibrata è lunga $2z$ ed ha massa $\rho S 2 z$ su cui agisce la forza peso $F(z) = \rho S 2 z g$. Questa forza, proporzionale a z e tendente ad opporsi alla crescita di z come una forza di richiamo elastica, si esercita sull'intera massa del liquido $\rho S l$ e la accelera con accelerazione $\ddot{z}$:

$$F(z) = - \rho S 2 z g = \rho S l \ddot{z} \qquad \text{da cui:} \quad \ddot{z} + \left(\frac{2g}{l} \right) z = 0 .$$

Questa equazione differenziale ha come soluzione l'equazione oraria dei moti armonici

$$z(t) = A \cos \omega t \qquad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{l}} \quad \text{e periodo } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} .$$

È da notare che il periodo non dipende dal tipo (densità) del liquido.

Imponendo la condizione iniziale $z(0) = h/2$ si ha l'equazione oraria:

$$z(t) = \frac{h}{2} \cos \omega t \, .$$

La velocità risulta dunque:

$$\dot{z}(t) = -\frac{h\omega}{2} \operatorname{sen} \omega t$$

e la massima velocità:

$$v_{MAX} = \frac{h\omega}{2} = \sqrt{\frac{gh^2}{2l}} \, .$$

Il calcolo della velocità massima può procedere anche con considerazioni energetiche. Poniamo uguale a zero l'energia potenziale con $z = 0$ (livelli nei due rami alla stessa quota). L'energia potenziale iniziale, quando tutto è fermo, si può valutare pensando di prendere la massa $\rho S \frac{h}{2}$ dalla zona B, con baricentro a quota $\left(-\frac{h}{4}\right)$, e di portarla in zona A con baricentro a quota $\left(+\frac{h}{4}\right)$, con un salto complessivo di quota di $\frac{h}{2}$. Pertanto

$$U_{IN} = \left(\rho S \frac{h}{2}\right) g \left(\frac{h}{2}\right) = \rho S g \frac{h^2}{4} \, .$$

La massima energia cinetica si ha al passaggio dalla posizione di equilibrio, in cui l'energia potenziale è nulla, per cui:

$$\frac{1}{2} m \, v_{MAX}^2 = \frac{1}{2} \rho S l v_{MAX}^2 = \rho S g \frac{h^2}{4}$$

da cui:

$$v_{MAX} = \sqrt{\frac{gh^2}{2l}} \, .$$

IX.13. Il teorema dell'energia cinetica si scrive:

$$L_{TOTALE} = L_{PESO} + L_{ATTRITO} = \Delta K = 0$$

da cui:

$$L_{ATTRITO} = -L_{PESO} = -[U^{(IN)} - U^{(FIN)}] =$$
$$= -\left[mg\frac{h}{2} - mg\frac{h}{4}\right] = -\frac{1}{4} mgh$$

con $m = \rho S h$.

Osserviamo che l'energia potenziale iniziale $U^{(IN)}$ è quella che compete ad una massa m con c.d.m. a quota $h/2$, mentre l'energia potenziale finale $U^{(FIN)}$ si riferisce ad una configurazione in cui il liquido occupa un tratto $h/2$ di entrambi i rami del tubo ad U e quindi ha c.d.m. a quota $h/4$. Dunque

$$L_{ATTRITO} = -\frac{1}{4} \rho S g h^2 \, .$$

Per la legge di Stevino la pressione inizialmente misurata dal manometro è:

$$p^{(IN)} = p_0 + \rho g h$$

mentre la pressione finale è:

$$p^{(FIN)} = p_0 + \rho g \frac{h}{2} .$$

Pertanto

$$\Delta p = p^{(IN)} - p^{(FIN)} = \rho g \frac{h}{2} .$$

IX.14. Con le notazioni dell'esempio E.IX.10 si ha:

$$\rho g h + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = \frac{1}{2} \rho v_a^2 \quad \text{(Bernoulli)}$$

Se si trascura la velocità v_A rispetto a $v_a = v'_a$, si ottiene la relazione di Torricelli:

$$v'_a \simeq \sqrt{2gh} .$$

Se non si trascura v_A e si tiene conto dell'equazione di continuità:

$$v_A A = v_a a ,$$

allora l'equazione di Bernoulli diventa:

$$\rho g h + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{a}{A}\right)^2 v_a^2 = \frac{1}{2} \rho v_a^2$$

da cui:

$$v_a = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}} .$$

Nel caso in cui $\frac{a}{A} = \frac{3}{10}$ si ha $v_a \cong 1{,}05 \sqrt{2gh}$.

L'errore percentuale è allora:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v_a - v'_a}{v'_a} \simeq 1{,}05 - 1 = 0{,}05 = 5\% .$$

IX.15. L'equazione di Poiseuille

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{\Delta p}{\eta l} R^4$$

applicata ai due liquidi fornisce:

$$\eta = \left(\frac{\pi \, \Delta p \, R^4}{8 l}\right) \frac{1}{Q} \quad \text{e} \quad \eta_R = \left(\frac{\pi \, \Delta p \, R^4}{8 l}\right) \frac{1}{Q_R} .$$

Il rapporto tra i coefficienti di viscosità vale:

$$\frac{\eta}{\eta_R} = \frac{Q_R}{Q} = \frac{(3\ l)/(200\ s)}{(0{,}5\ l)/(400\ s)} = 12\ .$$

IX.16. Procedendo come nell'esempio E.IX.15 si arriva all'equazione differenziale:

$$mg - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g - 6\pi\eta R v = m\frac{dv}{dt}$$

ovvero

$$C - 6\pi\eta R v = m\frac{dv}{dt} \qquad \text{con} \quad C = mg - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g\,.$$

Separando le variabili si ha:

$$\frac{dv}{C - 6\pi\eta R v} = \frac{1}{m}\,dt$$

da cui

$$\frac{d(C - 6\pi\eta R v)}{(C - 6\pi\eta R v)}\cdot\left(\frac{-1}{6\pi\eta R}\right) = \frac{dt}{m}\,.$$

Integrando si ha:

$$\ln(C - 6\pi\eta R v) = -\frac{6\pi\eta R}{m}t + \text{cost} = -\alpha t + \text{costante}$$

con $\alpha = \frac{6\pi\eta R}{m}$. Da qui:

$$C - 6\pi\eta R v = e^{(-\alpha t + \text{costante})} = K e^{-\alpha t}\,.$$

Con K costante da determinarsi in base alle condizioni iniziali (partenza da fermo).
Per $t = 0$, $v = 0$ e quindi $K = C$. Dunque:

$$v(t) = \frac{C}{6\pi\eta R}(1 - e^{-\alpha t})\,.$$

Osserviamo che per $t \to \infty$ si riottiene il valore asintotico della velocità trovato nell'esempio E.IX.15:

$$v_\infty = \frac{C}{6\pi\eta R}\,.$$

Occorre verificare che sia corretto usare la formula di Stokes che, come sappiamo, è valida per regime di moto laminare. La verifica si basa sul calcolo del numero di Reynolds per il valor massimo della velocità v_∞. Dunque, per la [IX.18]

$$Re = \frac{\rho v_\infty 2R}{\eta}$$

Se $Re < 1000$ il moto è laminare e la formula di Stokes applicabile. Se $Re > 1000$ potrebbe essere necessario ricorrere alla relazione di Newton [IX.17].

Capitolo decimo

X.1. La velocità v di propagazione di onde elastiche in una corda tesa è

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad \text{(eq. [X.34])}.$$

Nel nostro caso:

$$\tau = Mg = (5 \cdot \text{kg}) \cdot \left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 49\ \text{N}$$

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0{,}1\ \text{kg}}{10\ \text{m}} = 10^{-2}\ \text{kg/m}\,.$$

Dunque

$$v = \sqrt{\frac{49\ \text{N}\cdot\text{m}}{10^{-2}\ \text{kg}}} = \sqrt{4{,}9 \cdot 10^3\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \simeq 221\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

X.2. L'onda si propaga con velocità

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2530\ \text{s}^{-1}}{0{,}5\ \text{m}^{-1}} = 5{,}06 \cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

D'altra parte si ha (vedi eq. [X.22]) $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$; da cui

$$E = v^2\rho = \left(5{,}06 \cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \left(2{,}7 \cdot 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 6{,}9 \cdot 10^{10}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Si tratta di una sbarra di alluminio.

X.3. Usando la [X.20] si ha

$$\left|\frac{F}{S}\right| = \left|E \cdot \frac{\partial\alpha}{\partial x}\right|$$

dove $\alpha = \sin(kx - \omega t)$; per cui:

$$\left|\frac{F}{S}\right| = EAk\cos(kx - \omega t)\,.$$

Lo sforzo massimo è:

$$\left(\frac{F}{S}\right)_{\text{max}} = EAk = \left(6{,}9 \cdot 10^{10}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right) \cdot (2 \cdot 10^{-6}\ \text{m}) \cdot (0{,}5\ \text{m}^{-1}) = 6{,}9 \cdot 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

X.4. Deve essere (vedi osservazione al par. X.5):

$$W = I_1 \cdot 4\pi d_1^2 = I_2 \cdot 4\pi d_2^2\,.$$

Da cui:

$$I_1 = \frac{W}{4\pi d_1^2} = \frac{10\ \text{w}}{4\pi \cdot 9\ \text{m}^2} = 8{,}84 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{w}}{\text{m}^2}$$

$$I_2 = \frac{W}{4\pi d_2^2} = \frac{10\ \text{w}}{4\pi \cdot 36\ \text{m}^2} = 2{,}21 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{w}}{\text{m}^2}\,.$$

X.5. $\alpha_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

$\alpha_2(x, t) = A \sin(k[x - L] - \omega t)$.

Dunque (vedi eq. [X.45]):

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \left[2A\cos\left(\frac{kL}{2}\right)\right] \cdot \sin\left(kx - \omega t + \frac{kL}{2}\right).$$

L'ampiezza dell'onda risultante è

$$2A\cos\left(\frac{kL}{2}\right) = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{L}{2}\right) = 2A\cos\left(\frac{13\pi}{2}\right) = 0\,.$$

L'ampiezza è nulla, così come l'intensità: siamo in condizioni di interferenza distruttiva.

X.6. Per l'armonica fondamentale si ha (vedi eq. [X.53]):

$\lambda = 2L$.

D'altro canto, è $\nu = \frac{v}{\lambda}$; per cui $\nu = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$. In definitiva:

$$\nu = \frac{1}{2\cdot(0{,}4\text{ m})}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8\text{ N}}{0{,}5\cdot 10^{-3}\text{ kg/m}}} = \frac{1}{0{,}8}\sqrt{39{,}2\cdot 10^{3}}\text{ s}^{-1} \simeq 247\text{ s}^{-1}\,.$$

X.7. Per l'armonica fondamentale si ha (vedi eq. [X.55]):

$\lambda = 4L$.

D'altro canto è $\nu = \frac{v}{\lambda}$, con $v = \sqrt{\frac{\gamma P_o}{\rho}}$ (vedi eq. [X.28]); per cui:

$$\nu = \frac{1}{4L}\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \frac{1}{4\cdot(0{,}4\text{ m})}\sqrt{\frac{(7/5)\cdot(1{,}013\cdot 10^{5}\text{ N/m}^2)}{1{,}29\text{ kg/m}^3}} \simeq 207\text{ s}^{-1}\,.$$

X.8. Poiché λ = costante, la variazione di frequenza è dovuta alla variazione di velocità v provocata dalla variazione di temperatura T (eq. [X.30]:)

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R}{M}\cdot T}\,.$$

Si ha dunque:

$$\Delta\nu \simeq \frac{\partial\nu}{\partial T}\cdot\Delta T = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{v}{\lambda}\right)\cdot\Delta T = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\gamma R}{M}}\cdot\frac{\partial\sqrt{T}}{\partial T}\,\Delta T =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\gamma R}{M}}\cdot\frac{\Delta T}{2\sqrt{T}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}\,\frac{\Delta T}{2T} = \nu_o\frac{\Delta T}{2T}$$

dove con ν_o si è indicata la frequenza a $T = T_o$ ($\nu_o = 207\text{ s}^{-1}$, vedi Esercizio X.7); essendo $\Delta T = 5°$; $T_o \simeq 273\ K$, si ha infine:

$$\Delta\nu = \nu_o\frac{\Delta T}{2T} = 207\cdot\frac{15}{2\cdot 273}\text{ s}^{-1} \simeq 5{,}7\text{ s}^{-1}\,.$$

X.9. La frequenza che il pedone percepisce quando l'auto si avvicina e quando si allontana è data rispettivamente dalla [X.57] e dalla [X.58]; per cui:

$$\frac{\Delta \nu_R}{\nu_S} = \left(\frac{v}{v - v_S}\right) - \left(\frac{v}{v + v_S}\right) = \frac{2\, v\, v_S}{v^2 - v_S^2}\,.$$

Essendo

$$v \simeq 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}\,; \quad v_S \simeq 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}\,,$$

si ha

$$\frac{\Delta \nu_S}{\nu_S} \simeq 17{,}8 \cdot 10^{-2}\,.$$

X.10. Usando la [X.59] si ha

$$\nu_R - \nu_S = \nu_S \frac{v_R}{v}\,.$$

Nel nostro caso,

$$\nu_S = 261{,}6\ \text{s}^{-1}; \quad v_R = v_o = 6\ \text{m/s}; \quad v \simeq 340\ \text{m/s}\,.$$

Pertanto si ha:

$$\nu_R - \nu_S = 261{,}6 \cdot \frac{6}{340}\ \text{s}^{-1} \simeq 4{,}5\ \text{s}^{-1}\,.$$

Appendice B
Tabelle

Gli autori desiderano ringraziare il dottor Fabrizio Fontana per l'allestimento delle tabelle.

Densità di alcune sostanze allo stato solido

Elemento	Densità (kg/m^3)	Temp. °C
Abete (legno di)	$0{,}41 \cdot 10^3$	20
Alluminio	$2{,}70 \cdot 10^3$	20
Argento	$10{,}49 \cdot 10^3$	20
Asbesto	$2{,}40 \cdot 10^3$	20
Balsa	$0{,}16 \cdot 10^3$	20
Burro	$0{,}86 \cdot 10^3$	20
Eucalipto (legno di)	$1{,}06 \cdot 10^3$	20
Mercurio	$14{,}19 \cdot 10^3$	−38,8
Oro	$19{,}40 \cdot 10^3$	20
Paraffina	$0{,}89 \cdot 10^3$	20
Piombo	$11{,}48 \cdot 10^3$	20
Platino	$21{,}37 \cdot 10^3$	20
Stagno	$5{,}75 \cdot 10^3$	20
Vetro comune	$2{,}60 \cdot 10^3$	20
Zolfo	$1{,}96 \cdot 10^3$	20

Principali grandezze fisiche che intervengono in meccanica. Dimensioni e unità di misura

Grandezza	Dimensioni	Simbolo utilizzato nel testo	Nome dell'unità sistema: S.I. *	Nome dell'unità sistema: C.G.S. e fattore di conversione (rispetto al sistema S.I.)		Altre unità di uso comune con fattore di conversione (rispetto al sistema S.I.)	
Accelerazione	$L \cdot T^{-2}$	a			10^{-2}		
Accelerazione Angolare	T^{-2}	$\dot{\omega}$	Radianti/secondo^2		1		
Area	L^2	A, S			10^{-4}		
Coefficiente di viscosità	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$	η		Poise	10^{-1}		
Densità	$M \cdot L^{-3}$	ρ			10^3		
Energia	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	E, K	Joule	Erg	10^{-7}		
Forza	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	F, f	Newton	Dyna	10^{-5}	Kg peso	9,807
Frequenza	T^{-1}	ν	Hertz		1		
Frequenza Angolare	T^{-1}	ω	Radianti/secondo		1		
Lavoro	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	L	Joule	Erg	10^{-7}	B.t.u.	$1{,}055 \times 10^3$
Lunghezza	L	l, h	Metro	centimetro	10^{-2}	yard	0,9144
Massa	M	m, M	Kilogrammo	grammo	10^{-3}	pound	0,4536
Modulo di Young	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	E			10^{-1}		
Modulo di compress.	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	K			10^{-1}		
Modulo di taglio	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	τ			10^{-1}		
Momento angolare	$M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$	p, P			10^{-7}		
Momento di inerzia	$M \cdot L^2$	I			10^{-7}		
Momento della forza	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	M			10^{-7}		
Periodo	T	T	Secondo	Secondo	1		
Peso specifico	$M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}$	p			10^{-1}		
Potenza	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$	W	Watt		10^{-7}	Hp	735,499
Pressione	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-3}$	P	Pascal	Baria	10^{-1}	mmHg	133,32
Quantità di moto	$M \cdot L \cdot T^{-1}$	q, Q			10^{-1}		
Spostamento	L	s, Δs	Metro	Centimetro	10^{-2}		
Spostamento angolare	–	$\Delta\alpha, \Delta\theta$	Radiante	Radiante	1		
Tempo	T	t	Secondo	Secondo	1	Secondo	1
Velocità	$L \cdot T^{-1}$	v			10^{-2}		
Velocità angolare	T^{-1}	ω	Radiante/secondo		1	Giri/min	0,1047
Velocità areolare	$L^2 \cdot T^{-1}$	A'			10^{-4}		
Volume	L^3	V, τ			10^{-6}	Gallon	$4{,}54 \times 10^{-3}$

* *Nota:* Si ricorda che a partire dal 3 novembre 1982 con D.P.R. 12 agosto 1982, n. 802, facendo seguito alla normativa C.E.E. n. 80/181 si assumono come unità di misura legali da utilizzare per esprimere grandezze quelle costituenti il Sistema Internazionale (S.I.) o Sistema pratico.

Alcune costanti fondamentali di interesse in meccanica

Nome	Simbolo	Miglior valore sperimentale
Velocità della luce	c	299.792.458 m/s
Massa a riposo dell'elettrone	m_e	$9{,}1091 \times 10^{-31}$ kg
Raggio di Bohr	a_o	$5{,}2917 \times 10^{-11}$ m
Costante di gravitazione	G	$6{,}670 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2

Coefficienti di attrito statico e dinamico per alcune sostanze

Materiali	Attrito statico	Attrito dinamico
Ottone su acciaio dolce	0,51	0,44
Zinco su ferro	0,85	0,21
Alluminio su alluminio	1,55	1,40
Vetro su vetro	0,94	0,40
Ferro su ferro	1,10	0,85
Teflon su teflon	0,04	0,04

	Btu	Erg	ft-lb	Hp-h	J	cal	Kwh	l.atm	eV
British Thermal Unit (Btu)	1	$1,55 \times 10^{10}$	777,9	$3,929 \times 0^{-4}$	1055	252	$2,930 \times 10^{-4}$	10,409	$6,585 \times 10^{21}$
Erg	$9,481 \times 10^{-11}$	1	$7,376 \times 10^{-8}$	$3,725 \times 10^{-14}$	10^{-7}	$2,389 \times 10^{-8}$	$2,778 \times 10^{-14}$	$9,869 \times 10^{-10}$	$6,242 \times 10^{11}$
Foot-Pound (ft-lb)	$1,285 \times 10^{-3}$	$1,356 \times 10^{7}$	1	$5,051 \times 10^{-7}$	1,356	0,324	$3,766 \times 10^{-7}$	$1,338 \times 10^{-2}$	$8,464 \times 10^{18}$
Cavallo vapore × ora (Hp h)	2545	$2,658 \times 10^{13}$	$1,980 \times 10^{6}$	1	$2,685 \times 10^{6}$	$6,414 \times 10^{5}$	0,746	$2,578 \times 10^{-4}$	$1,676 \times 10^{15}$
Joule (J)	$9,481 \times 10^{-4}$	10^{7}	0,738	$3,725 \times 10^{-7}$	1	0,239	$2,778 \times 10^{-7}$	$9,869 \times 10^{-3}$	$6,242 \times 10^{18}$
Caloria (cal)	$3,968 \times 10^{-3}$	$4,186 \times 10^{7}$	3,087	$1,559 \times 10^{-6}$	4,186	1	$1,163 \times 10^{-6}$	$4,131 \times 10^{-2}$	$2,613 \times 10^{19}$
Kilowatt-ora (Kwh)	3413	$3,6 \times 10^{13}$	$2,655 \times 10^{6}$	1,341	$3,6 \times 10^{6}$	$8,601 \times 10^{5}$	1	$3,460 \times 10^{4}$	$2,247 \times 10^{25}$
litro-atmosfera (l.atm)	$9,607 \times 10^{-2}$	$1,013 \times 10^{9}$	74,735	$3,774 \times 10^{-5}$	101,328	24,206	$2,890 \times 10^{-5}$	1	▭
elettronvolt (eV)	$1,519 \times 10^{-22}$	$1,602 \times 10^{-12}$	$1,182 \times 10^{-19}$	$5,967 \times 10^{-26}$	$1,602 \times 10^{-19}$	$3,827 \times 10^{-20}$	$4,450 \times 10^{-26}$	▭	1

– ENERGIA, CALORE, LAVORO –

	Btu/h	ft-lb/s	Hp	cal/s	Kw
British thermal unit / ora	1	0,216	$3,929 \times 10^{-4}$	7×10^{-2}	$2,930 \times 10^{-4}$
Foot-pound / secondo	4,628	1	$1,818 \times 10^{-3}$	0,324	$1,356 \times 10^{-3}$
Cavallo vapore	2545	550	1	178,2	0,746
Caloria / secondo	14,29	3,087	$5,613 \times 10^{-3}$	1	$4,186 \times 10^{-3}$
Kilowatt	3413	737,6	1,341	238,9	1

– POTENZA –

Prefissi dei multipli e dei sottomultipli delle unità metriche

Simbolo	Nome	Valore (rispetto all'unità)
E	exa-	10^{18}
P	peta-	10^{15}
T	tera-	10^{12}
G	giga-	10^{9}
M	mega-	10^{6}
k	chilo-	10^{3}
h	etto-	10^{2}
da	deca-	10^{1}
	unità	1
d	deci-	10^{-1}
c	centi-	10^{-2}
m	milli-	10^{-3}
μ	micro-	10^{-6}
n	nano-	10^{-9}
p	pico-	10^{-12}
f	femto-	10^{-15}
a	atto-	10^{-18}

Esempi di applicazioni di detti prefissi:

10^9 hertz = 1 Gigahertz; 10^3 grammi = 1 kg; 10^{-12} secondi = 1 picosecondo.

Esistono anche esempi di nomi specifici associati a multipli dell'unità per una data grandezza ma sono accettati solo nel loro campo specifico di applicazione.

Esempi di multipli non standard di unità di misura.

Unità	Simbolo	Equivalente SI
Tonnellata	Ton.	10^3 kg
angstrom	Å	10^{-10} m
bar	bar	10^5 N/m^2
litro	l	10^{-3} m^3
Stokes	St	10^{-4} m^2/s

Principali caratteristiche dei pianeti del Sistema Solare, della Luna e del Sole

	Semiasse maggiore dell'orbita in milioni di km	Periodo di moto orbitale in anni terrestri	Velocità media orbitale in km/s	Diametro equatoriale km	Massa kg × 10^{24}	Velocità di fuga km/s	Accelerazione di gravità superficiale m/s^2	Quadrato del periodo in anni terrestri	Cubo della distanza in UA (*)
Mercurio	57,9	0,241	47,9	4 840	0,317	4,3	3,6	0,058	0,058
Venere	108,2	0,615	35,0	12 400	4,871	10,4	8,5	0,378	0,378
Terra	149,6	1,0	29,8	12 756	5,977	11,2	9,8	1,000	1,000
Marte	227,9	1,881	24,1	6 800	0,639	5,1	3,7	3,538	3,540
Giove	778	11,862	13,1	142 800	1 900	61,0	26,0	140,7	140,800
Saturno	1 427	29,458	9,6	120 800	569,1	36,7	11,2	867,9	868,000
Urano	2 870	84,015	6,8	47 600	86,97	22,4	9,4	~	~
Nettuno	4 496	164,788	5,4	44 600	103,0	25,5	15,0	~	~
Plutone	5 946	247,700	4,7	5 850	0,598	4	3,5	~	~
Luna	0,38	0,075	~	3 476	0,073	2,37	1,62	~	~
Sole	~	~	~	1 392 000	1986000	~	273,42	~	~

(*) *Nota:* Si ricorda che 1 UA (unità astronomica) = 149,6 × 10^6 km (semiasse maggiore della Terra).

Parte seconda
Termodinamica

Capitolo primo

Calore e temperatura

I.1. Termodinamica

Dissipazione dell'energia meccanica

Il teorema di conservazione dell'energia meccanica afferma che l'energia meccanica di un sistema sottoposto a sole forze conservative non cambia nel tempo. Ad esempio, un pendolo costituito da una sbarretta pesante appesa ad uno dei suoi estremi, nel caso ideale che l'unica forza responsabile del movimento fosse la forza peso (conservativa), continuerebbe ad oscillare indefinitamente, sempre con la stessa ampiezza. In realtà, l'esperienza quotidiana ci dice che ciò non accade nella pratica: le oscillazioni del pendolo vanno smorzandosi, e, dopo un tempo più o meno lungo, esso si ferma. Ciò è imputabile a fenomeni di attrito che esercitano sul sistema forze non conservative: ad esempio forze di sfregamento che si sviluppano sull'asse orizzontale che impone alla sbarretta di ruotare intorno a un suo estremo.

Il lavoro – negativo – compiuto da queste forze va progressivamene dissipando l'energia meccanica del sistema. Fra gli altri mille possibili esempi citiamo quello di una palla che, cadendo sul pavimento, rimbalza più volte, ma sempre meno alto; quello di un veicolo che si ferma per azione del freno, ecc.

Riscaldamento

Ogni qualvolta succede questo, cioè ogni qualvolta si dissipa energia meccanica, si riscontra sperimentalmente che si hanno fenomeni di riscaldamento in quelle parti dove le forze dissipative si esplicano; nell'esempio del pendolo, l'asse si riscalda; nel caso del veicolo, si scaldano i freni, ecc.

Termodinamica

La termodinamica è quel capitolo della fisica che si occupa di descrivere i fenomeni di riscaldamento (detti anche «fenomeni termici») e la loro relazione con i fenomeni meccanici. Più in generale, la termodinamica studia i fenomeni termici in relazione ad altre forme di energia.

I.2. Temperatura

Stato termico

La descrizione dei fenomeni termodinamici richiede, innanzi tutto, che si renda quantitativo il criterio con cui sensorialmente si distin-

gue il diverso stato termico in cui lo stesso corpo può trovarsi (caldo, tiepido, freddo).

Temperatura

La grandezza fisica che descrive lo stato termico di un corpo (solido, liquido o gassoso) si dice *temperatura*.

La definizione operativa di temperatura può procedere nel modo seguente:

a) sulla base di sensazioni tattili si crea, per gli stati termici, una grossolana scala che va dal freddo, al tiepido al caldo;

Dilatazione termica

b) si osserva che, fissata l'attenzione su un corpo qualsiasi, a diversi suoi stati termici corrispondono dimensioni geometriche diverse (fenomeno della dilatazione termica);

Principio zero della termodinamica

c) si osserva (a questo livello, di fatto, si intuisce e poi tutti i fatti confermeranno) che *due corpi inizialmente in stati termici diversi, se posti in contatto, dopo un certo tempo finiscono per trovarsi in uno stato termico comune* (stato termico di *equilibrio*); questo viene anche detto *principio zero* della termodinamica;

d) si costruisce una piccola ampolla di vetro (bulbo) collegata ad un lungo cilindro di sezione piccola e costante (capillare); la si riempie parzialmente di mercurio e la si sigilla (dopo avere prodotto in essa il vuoto pneumatico);

e) ponendo a contatto questo dispositivo con corpi in diversi stati termici, ad equilibrio raggiunto il mercurio invade il capillare per diverse lunghezze; in questo modo si è realizzato un individuatore di stati termici;

f) con tale individuatore di stati termici si osserva che, una volta fissata la pressione, i cambiamenti di fase di una sostanza pura (per esempio da solida a liquida) avvengono sempre allo stesso stato termico (cioè con il mercurio che si pone sempre allo stesso livello nel capillare);

CAMBIAMENTO DI FASE

g) si definisce una *scala termometrica* fissando *il valore zero per il livello del mercurio quando il bulbo è in contatto termico con una miscela di acqua liquida e ghiaccio alla pressione di una atmosfera e fissando il valore 100 per il livello del mercurio quando il bulbo è a contatto con acqua bollente* (passaggio di stato liquido-vapore) *alla pressione di 1 atm.;*

Temperatura centigrada o Celsius

h) *dividendo il tratto che separa lo zero dal cento sul capillare in cento parti uguali* si è costruito uno strumento capace di attribuire un numero detto *temperatura in gradi centigradi (°C)*, ad ogni stato termico di un corpo (almeno quando questa sia compresa tra zero e cento gradi centrigradi).

Vedremo in seguito come la scala termometrica possa essere estesa al di fuori dell'intervallo 0 °C - 100 °C. Vedremo anche come esistano termometri diversi da quello a mercurio (liquidi termometrici diversi, oppure gas); ed anche come si possa misurare una temperatura basandosi su proprietà diverse della materia (resistività elettrica, pressione, ecc.).

La scala termometrica sopra definita si chiama scala centigrada (o Celsius).

È abbastanza diffuso anche l'uso della scala Fahrenheit, che è legata alla scala centigrada dalla seguente relazione:

Scala Fahrenheit

$$t_{Fahrenheit} = 32 + \frac{9}{5}\, t\,(°C) \qquad (I.1)$$

(ad esempio $t = 0°C \rightarrow t_{Fahrenheit} = 32°F$
$t = 100°C \rightarrow t_{Fahrenheit} = 212°F$)

Più avanti introdurremo anche la scala Kelvin.

I.3. Sistemi termodinamici

Sistema macroscopico

Un sistema fisico (un solido, un liquido, un gas, una soluzione satura o non, ecc.) sufficientemente grande da essere osservabile direttamente dai nostri sensi è detto un *sistema macroscopico*.

Un sistema macroscopico è costituito da un numero grandissimo di costituenti microscopici (gli atomi, le molecole). Tuttavia non è né utile né possibile descrivere il comportamento di un sistema macroscopico specificando lo stato di moto di ciascuno dei suoi costituenti microscopici. Un sistema macroscopico viene descritto invece ricorrendo a parametri macroscopici di insieme, che descrivono le caratteristiche utili del sistema nel suo complesso, o di porzioni macroscopiche di esso. Tali parametri sono detti *variabili termodinamiche o parametri di stato*.

Variabili termodinamiche o parametri di stato

Parametri di stato sono ad esempio il volume, la pressione, la densità, la temperatura, la concentrazione di un particolare sale in una soluzione, ecc. Vedremo più avanti che il valore dei vari parametri di stato è riconducibile a proprietà microscopiche mediate (o sommate) su porzioni macroscopiche del sistema. Un sistema macroscopico, quando viene descritto attraverso i parametri di stato, è detto anche un *sistema termodinamico*.

Sistema termodinamico

I.4. Sistemi termodinamici chiusi e sistemi isolati

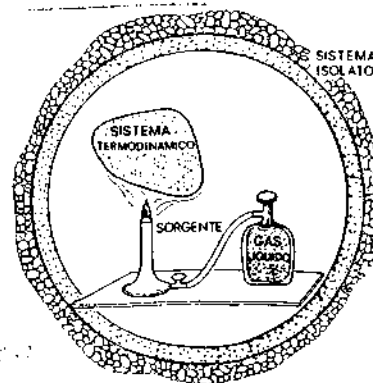
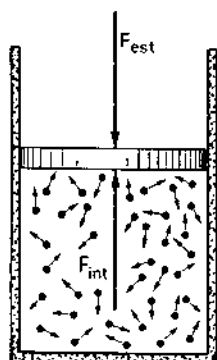
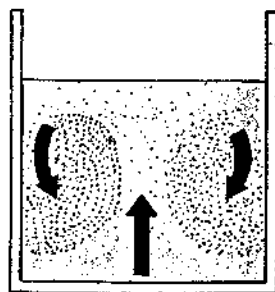
Sistema chiuso

Un sistema viene detto *chiuso* se non scambia materia con l'ambiente. Ad esempio l'acqua che bolle in una pentola aperta non è un sistema chiuso: a causa dell'evaporazione una parte dell'acqua si disperde nell'ambiente.

Sistema isolato

Un sistema viene detto *isolato* se non scambia né energia né materia con l'ambiente. Poiché vedremo che anche uno scambio di calore comporta scambio di energia, per essere isolato un sistema non deve dunque – in particolare – scambiare nemmeno calore con l'ambiente. La Terra, ad esempio, è un sistema che (trascurando il fenomeno dei meteoriti, delle polveri e dei raggi cosmici) può essere considerato sostanzialmente chiuso. Ma non è un sistema isolato: esso riceve energia dal Sole, e disperde energia termica – nella forma di radiazione infrarossa – verso lo spazio cosmico.

I sistemi con cui un sistema non isolato scambia energia sono detti le sue *sorgenti*.

Il sistema e le sue sorgenti rappresentano, nel loro insieme, un sistema isolato (se le sorgenti scambiano energia solo con quel sistema).

I.5. Stati di equilibrio termodinamico

Stato stazionario

Lo stato di un sistema termodinamico è noto, quando è noto il valore che i parametri di stato hanno in ogni punto del sistema. Se il valore dei parametri di stato è costante nel tempo, lo stato si dice *stazionario*.

In generale, i sistemi che studieremo saranno in interazione con l'ambiente e ne saranno influenzati. Per esempio, il sistema considerato potrà essere a contatto con un corpo a temperatura diversa, oppure l'ambiente circostante potrà esercitare delle forze sul sistema stesso, ecc. Queste ed altre interazioni potranno produrre dei cambiamenti allo stato (cioè ai parametri di stato) del sistema considerato.

Equilibrio termodinamico

Si dice che un sistema termodinamico chiuso è in uno *stato di equilibrio termodinamico* quando si sia realizzato:

Equilibrio meccanico

a) *l'equilibrio meccanico* fra le forze che il sistema esercita sull'ambiente esterno e le forze esterne agenti sul sistema.
Per esempio, un gas in un cilindro munito di pistone mobile esercita sulle pareti delle forze, a causa dei numerosi urti delle sue molecole contro le pareti stesse. Perché il pistone non si sollevi è necessario applicare dall'esterno una forza F_{est} che faccia equilibrio alla forza interna da parte del gas. In queste condizioni lo stato termodinamico del gas è definito dai parametri di stato pressione, volume, temperatura, numero di moli (cioè massa).
In assenza di equilibrio meccanico il pistone si muoverebbe, e nel gas si potrebbero formare vortici o comunque disuniformità di pressione che non consentirebbero di definire lo stato del gas con un unico valore del parametro di stato pressione;

Equilibrio termico

b) *l'equilibrio termico* tra le varie parti del sistema considerato, nonché fra questo e l'ambiente esterno. Ciò vuol dire che tutte le parti del sistema sono alla stessa temperatura, che coincide con la temperatura dell'ambiente. Se ci fosse differenza di temperatura tra il sistema (per esempio liquido) e l'ambiente esterno (per esempio per contatto di un punto del recipiente che contiene il liquido con un corpo a maggior temperatura), la temperatura locale del liquido vicino al punto di contatto crescerebbe, così come le dimensioni geometriche (volume) della porzione di liquido riscaldata. Di conseguenza la densità locale diminuirebbe e, per la spinta di Archimede, una massa di liquido migrerebbe verso l'alto (meccanismo di convezione). In questo fenomeno la temperatura non sarebbe uniforme all'interno del sistema ed il parametro di stato temperatura non sarebbe adeguato, con un unico valore, a descrivere lo stato dell'intero sistema;

NON EQUILIBRIO TERMICO

Equilibrio chimico

c) *l'equilibrio chimico*, che garantisce che non sono in corso reazioni che alterino la composizione relativa del sistema. In questa situazione per un sistema, per esempio, a due componenti, basta dare i valori n_1 ed n_2 del numero di moli dei due componenti per descrivere completamente lo stato complessivo del sistema dal punto di vista chimico.

Un sistema termodinamico, se lasciato isolato per un tempo sufficientemente lungo, raggiunge uno stato di equilibrio termodinamico.

È chiaro che uno stato di equilibrio termodinamico è perfettamente descritto tramite un numero limitato di parametri di stato che assumono di norma lo stesso valore in ogni punto del sistema termodinamico considerato.

La precedente osservazione non esclude che, per sistemi di grandi dimensioni, pure in equilibrio, si abbiano disuniformità di certi parametri di stato (ma non della temperatura). Basti pensare alla variazione di pressione atmosferica con la quota, oppure all'andamento della pressione con la profondità z di un liquido pesante in equilibrio (legge di Stevino: $P(z) = P_o + \rho g z$).

In questi casi l'approccio termodinamico richiede che si considerino porzioni di sistema all'interno delle quali il valore dei parametri di stato non vari apprezzabilmente (vedi § I.8).

Lo studio dei meccanismi attraverso i quali lo stato di un sistema macroscopico può essere fatto variare, è argomento della termodinamica. È osservazione comune che tali meccanismi possono essere di varia natura: può trattarsi di lavoro di forze di attrito, di reazioni chimiche, di passaggio di corrente elettrica, ecc.

È di particolare interesse il caso in cui la variazione di stato del sistema avvenga per *interazione con corpi a temperatura diversa* (interazione per contatto o a distanza). Si dice allora che fra il sistema e tali corpi si realizza uno scambio di *calore*, una grandezza fisica di cui andiamo a dare, nel paragrafo che segue, la definizione operativa.

I.6. Calore

Se due sistemi A e B a temperatura diversa – t_A e t_B rispettivamente – vengono posti a contatto termico, i loro rispettivi stati si influenzano a vicenda: all'equilibrio, se non intervengono cambiamenti di stato di aggregazione, essi raggiungono uno stato caratterizzato dalla stessa temperatura – chiamiamola $\bar{t}$ – intermedia fra t_A e t_B. Durante questo processo qualcosa è passato da un sistema all'altro, qualcosa che è capace di provocare fenomeni a volte molto evidenti. Se uno dei sistemi è costituito, ad esempio, da un gas contenuto in un cilindro con pistone, il pistone può sollevarsi compiendo lavoro. Quel «qualcosa» – che i primi sperimentatori chiamavano «fluido calorico» – si chiama *calore*.

Calore

Lo strumento usato per misurare il calore si chiama *calorimetro*. Esistono diversi tipi di calorimetri che, pur se basati su fenomeni diversi, sono tuttavia fra di loro sostanzialmente equivalenti. Noi ci riferiremo al calorimetro a ghiaccio.

Calorimetro

Calorimetro a ghiaccio

Se un recipiente contiene una miscela di acqua e ghiaccio fra di loro in equilibrio (sappiamo che tale miscela si trova a una temperatura di 0 °C) e se il recipiente viene posto per un certo tempo a contatto con un sistema più caldo (ad esempio esso viene disposto sulla fiamma di un fornello) si riscontra che una parte del ghiaccio fonde, senza tuttavia che cambi la temperatura della miscela (fino a che tutto il ghiaccio non si sia sciolto).

Il *calore* che il recipiente (il calorimetro) ha ricevuto *è misurato*, per definizione, *dalla quantità di ghiaccio che si è fuso*.

Fra i vari modelli di calorimetro a ghiaccio alcuni, molto sofisticati come ad es. il calorimetro di Bunsen, consentono una misura assai precisa della quantità di ghiaccio disciolta.

Come unità di misura del calore, per lungo tempo la più usata è stata la *caloria*, definita come la *quantità di calore che va sottratta a un grammo d'acqua per fare scendere la sua temperatura da 15,5 °C a 14,5 °C*.

Caloria

Calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda_g = 79{,}7 \frac{\text{cal}}{g}$

La taratura del calorimetro a ghiaccio può essere effettuata tenendo conto che per sciogliere un grammo di ghiaccio a 0 °C sono necessarie circa 79,7 calorie. Si può dire – come preciseremo meglio in seguito – che il calore è energia che si scambia tra corpo e ambiente solo in virtù della differenza di temperatura tra corpo e ambiente (essendo implicati, come vedremo, tre principali meccanismi di scambio: conduzione, convezione, irraggiamento).

Equivalente meccanico della caloria. $J = 4{,}186 \frac{\text{joule}}{\text{cal}}$

Oggi si va sempre più diffondendo l'adeguamento alla convenzione internazionale che suggerisce di misurare il calore nelle stesse unità della energia meccanica, cioè in joule. Anticipando i risultati degli esperimenti per la misura dell'equivalente meccanico della caloria, diciamo che una caloria equivale a $4{,}1855 \pm 0{,}0004$ joule.

Convenzione sul segno del calore

Disponendo della definizione operativa di temperatura e calore, cioè avendo definito il modo in cui tali grandezze si misurano, siamo ora in grado di studiare le leggi fenomenologiche che regolano i processi di trasferimento e trasformazione del calore. Per quanto riguarda il segno da attribuire al calore scambiato da un corpo, si conviene di considerare *positivo il segno del calore se ricevuto (o assorbito) dal corpo, nel senso che, per effetto unicamente di quello scambio, il corpo aumenterebbe la sua temperatura* (in assenza di cambiamenti di stato di aggregazione). Viceversa per il segno negativo.

Trasformazioni termodinamiche

I.7. Trasformazioni termodinamiche

Quando un sistema termodinamico cambia stato (cioè quando cambia nel tempo il valore dei suoi parametri di stato) si dice che il sistema subisce una *trasformazione.*

Definiamo qui di seguito alcune importanti categorie di trasformazioni.

Trasformazioni fra stati di equilibrio

Trasformazioni fra stati di equilibrio. Chiameremo così quelle trasformazioni che portano il sistema da uno stato iniziale di equilibrio a uno stato finale anch'esso di equilibrio. Poiché un sistema isolato inizialmente in equilibrio permane in tale stato, evidentemente durante una trasformazione di questo tipo il sistema non può essere isolato: esso scambierà energia con l'ambiente, in generale sia nella forma di lavoro (meccanico, elettrico, ecc.) che l'ambiente compie su di esso (o viceversa), sia nella forma di calore. La *termodinamica degli stati di equilibrio*, che tratta questo tipo di trasformazioni, si occupa delle relazioni che intercorrono fra i parametri nello stato *iniziale* e *finale* che il sistema assume rispettivamente prima e dopo la trasformazione, e l'energia che nelle varie forme il sistema scambia con l'ambiente *durante* la trasformazione; disinteressandosi tuttavia – in generale – della descrizione del sistema mentre la trasformazione ha luogo.

Termodinamica degli stati di equilibrio

Trasformazioni cicliche

Trasformazioni cicliche. Una trasformazione si dice ciclica se lo stato iniziale e quello finale sono fra di loro identici.

Trasformazioni quasi statiche

Trasformazioni quasi statiche. Sono definite come trasformazioni durante le quali il sistema passa solo attraverso stati di equilibrio. In natura non esistono trasformazioni quasi statiche: esse rappresentano una schematizzazione teorica cui le trasformazioni reali possono più o meno avvici-

narsi. La trattazione delle trasformazioni quasi statiche può essere fatta in maniera semplice e univoca e rappresenta un interessante caso limite per le trasformazioni reali.

Consideriamo l'esempio della compressione di un gas contenuto in un cilindro metallico con pistone, in contatto termico con un ambiente a temperatura t_A uniforme e costante. Affinché il pistone scenda comprimendo così il gas, è necessario che esso eserciti sul gas una pressione superiore a quella che nello stato iniziale il gas esercita sul pistone. Per ottenere ciò si metterà, ad esempio, sul pistone un peso. La trasformazione che ne risulta *non* è quasi statica. Mentre infatti il pistone scende il gas non è in uno stato di equilibrio né interno né con l'ambiente: esso ha localmente velocità diversa da zero, ed ha una temperatura ed una pressione diversa da punto a punto.

La compressione si avvicinerebbe al limite quasi statico se sul cilindro venissero disposti, in lenta serie uno dopo l'altro, dei piccoli pesi; in modo che anche durante la trasformazione il gas fosse (dal punto di vista macroscopico) praticamente fermo, fosse sempre in ogni sua parte alla temperatura t_A, e avesse sempre in ogni istante una pressione uniforme pari a quella (lentamente variabile) che il pistone esercita su di esso.

Trasformazioni reversibili

Trasformazioni reversibili. Nel passare da uno stato iniziale ad uno stato finale, attraverso una serie di stati intermedi, un sistema interagisce in vario modo con l'ambiente esterno. Potrà essere scambiato del calore con certe sorgenti (assorbito o ceduto) ed inoltre dei dispositivi esterni (ad esempio meccanici) potranno compiere del lavoro sul sistema cambiando il loro stato energetico (pesi che scendono, molle che si scaricano, energia cinetica che si riduce per effetto di forze di attrito, batterie che si scaricano, ecc.).

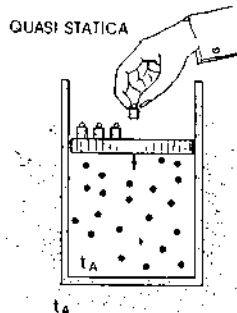
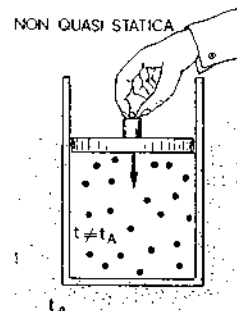
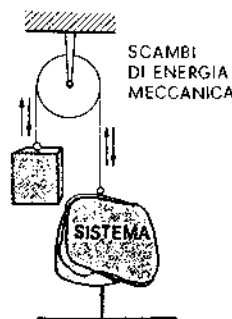
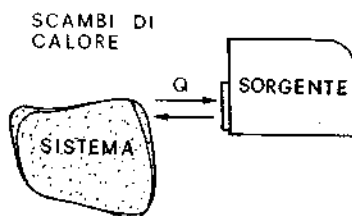
La trasformazione si dice *reversibile* se è possibile eseguire (praticamente o concettualmente) una trasformazione che riporti il sistema allo stato iniziale, seguendo a ritroso la stessa sequenza di stati intermedi che il sistema ha seguito nella trasformazione diretta dallo stato iniziale a quello finale, con le seguenti condizioni:

a) le sorgenti di calore recuperano le quantità di calore scambiate nella trasformazione diretta (nel senso che gli scambi di calore che avvengono nella trasformazione inversa coinvolgono le stesse quantità di calore che si erano scambiate nella trasformazione diretta, ma con i segni cambiati);

b) i dispositivi esterni, lavorando all'inverso, recuperano l'energia che avevano spesa nella trasformazione diretta (pesi che salgono, molle che si ricaricano, energia cinetica che ricresce, batterie che si caricano, ecc.);

c) null'altro avviene.

In sintesi, si può dire che una trasformazione è reversibile se si sviluppa in modo tale che, a trasformazione conclusa, il sistema stesso e l'ambiente esterno possano essere ricondotti alle situazioni iniziali rispettive, per semplice inversione del segno delle interazioni fra sistema ed ambiente e senza che avvengano altri cambiamenti nell'universo.

Da ciò che seguirà, ed in particolar modo dalle conseguenze del secondo principio della termodinamica, si vedrà che le trasformazioni naturali implicano sempre qualche grado di irreversibilità. Potrà trattarsi di irreversibilità meccanica (attriti), irreversibilità termica (distribuzioni di temperatura non uniformi) od irreversibilità chimica (reazioni spontanee).

REAZIONI CHIMICHE

Trasformazioni irreversibili

Le *trasformazioni irreversibili*, in ogni caso, mostrano le seguenti caratteristiche:

non equilibrio

a) o non sono sequenze di infiniti stati di equilibrio (dunque non si realizza l'equilibrio meccanico, termico e chimico per ogni stato della trasformazione);

effetti dissipativi

b) o subentrano effetti dissipativi (attriti, viscosità, deformazioni anelastiche, resistenza elettrica, ecc.);

c) oppure accadono entrambe le cose a) e b).

Dunque una trasformazione reversibile deve svolgersi in modo *quasi-statico*, ma anche *senza apprezzabili effetti dissipativi*.

Trasformazione quasi statica con attrito

Possiamo, a titolo di esempio, immaginare una trasformazione quasi-statica che non è reversibile. Un volano ruota inizialmente all'interno di una scatola isolata termicamente dall'esterno, con velocità angolare data. Il gas e tutto l'apparato si trovano ad una certa temperatura iniziale.

A partire da questa situazione, si agisce ora dall'esterno con una forza piccolissima che spinge un freno contro il volano ruotante. Si può immaginare un'azione lentissima del freno, che porta in un tempo idealmente infinito il volano allo stato di quiete ed il gas ed il sistema ad una temperatura superiore a quella iniziale. Con qualche accorgimento si può pensare che la trasformazione sia quasi-statica.

Tuttavia la trasformazione non è reversibile. Invertendo la direzione della forza frenante (unico agente esterno sul sistema considerato), il freno si stacca dal volano, ma la trasformazione non si inverte ed il sistema non si raffredda, mentre il volano riprende a ruotare con velocità angolare via via crescente.

Di fatto la trasformazione contiene un processo intrinsecamente irreversibile, che coinvolge forze dissipative (attrito tra volano e freno).

Trasformazioni spontanee

Trasformazioni spontanee. A partire da uno stato di equilibrio, un sistema termodinamico può allontanarsi da esso per portarsi in un altro stato (di equilibrio o no) solo se il sistema stesso non è isolato. Partendo però da uno stato *lontano dall'equilibrio*, il sistema, lasciato isolato, compie spontaneamente una trasformazione portandosi in uno stato di equilibrio. Una tale trasformazione si chiama, per l'appunto, *trasformazione spontanea*. Ad esempio, consideriamo una sbarretta metallica i cui estremi siano posti a contatto termico con due sorgenti, alle temperature rispettivamente t_1 e t_2 ($t_1 \neq t_2$). La sbarretta si porta, a regime, in uno stato stazionario: la sua temperatura, costante nel tempo in ogni punto, non è però uniforme, poiché varia linearmente fra t_1 e t_2 andando da un estremo all'altro.

A partire da questo stato iniziale, isoliamo il sistema (allontanando le sorgenti). Il sistema compie allora una trasformazione spontanea che lo porta nello stato di equilibrio caratterizzato da una temperatura uniforme intermedia fra t_1 e t_2.

Notare che una trasformazione spontanea non è quasi-statica (durante la trasformazione il sistema non è in equilibrio, e lo raggiunge solo nello stato finale).

Un caso particolare di trasformazioni spontanee si ha quando vengono fatte interagire fra di loro due parti del sistema, ciascuna delle quali sia per proprio conto in equilibrio, ma che non siano inizialmente in equilibrio fra di loro: ad esempio, si elimina un diaframma termicamente isolante che separa due parti del sistema, una a temperatura t_1 ed una a temperatura t_2; oppure si apre il rubinetto che separa due recipienti contenenti gas a pres-

sione diversa, P_1 e P_2. Quando si fa ciò, si usa dire che si *elimina un vincolo* (termodinamico) *interno al sistema.*

Trasformazioni lontane dall'equilibrio. Può accadere che un sistema termodinamico che si trasforma rimanga sempre lontano dall'equilibrio. Ciò accade di norma quando il sistema non è isolato né chiuso: ad esempio l'atmosfera terrestre o una sua parte, l'acqua che scorre in un fiume, ecc. La termodinamica dei sistemi lontani dall'equilibrio è un capitolo della fisica che si è aperto solo in tempi relativamente recenti (qualche decennio fa) ed è a tutt'oggi tutt'altro che consolidato. Ad esso dedicheremo solo qualche riga in questo libro.

Trasformazioni lontane dall'equilibrio

I.8. Variabili di stato intensive ed estensive

Dei parametri di stato precedentemente definiti (o ai quali abbiano più sopra accennato) alcuni sono detti *intensivi* ed altri *estensivi* (o additivi).

Sono intensivi quei parametri (come la temperatura t, la pressione P, la densità ρ, ecc.) che caratterizzano *proprietà locali* del sistema: se essi hanno un certo valor medio in una certa porzione del sistema, il loro valore puntuale (in generale diverso da zero) lo si ottiene facendo tendere a zero, intorno al punto considerato, il volume di quella porzione.

Parametri intensivi

I parametri *estensivi* caratterizzano invece delle *quantità additive*: se essi hanno un certo valore in una porzione del sistema e un altro valore in un'altra porzione, mettendo insieme le due porzioni il relativo valore del parametro estensivo è pari alla somma del valore che aveva su ciascuna delle due porzioni (e non pari alla media come nel caso dei parametri intensivi). Parametri estensivi sono ad esempio la massa, il volume, l'energia, ecc.

Parametri estensivi

La termodinamica fa uso di svariate funzioni di stato. Definiremo nel corso del libro le funzioni di stato energia interna, entropia, entalpia, energia libera, entalpia libera: queste sono tutte grandezze estensive.

È spesso comodo, per le grandezze estensive, introdurre il loro *valore specifico*, riferito cioè all'unità di massa m (o all'unità di volume V); non di rado la massa viene misurata in moli, e le relative grandezze specifiche vengono allora dette *grandezze molari.*

Valori specifici dei parametri estensivi

Grandezze molari

I valori specifici delle grandezze estensive sono grandezze intensive.

Il calcolo delle funzioni di stato è particolarmente semplice quando abbiamo a che fare con stati di equilibrio, e più precisamente con stati per i quali i parametri intensivi abbiano lo stesso valore in ogni posizione del sistema.

Se con u, ad esempio, indichiamo l'energia interna specifica e con U l'energia interna totale del sistema, si può scrivere (essendo dm l'elemento di massa):

Funzioni dei parametri di stato. Loro calcolo per stati di equilibrio e non.

$$U = \int u(t, P, \ldots)\, dm \qquad [I.2]$$

dove l'integrale è esteso a tutto il sistema.

Se i parametri intensivi hanno lo stesso valore in ogni punto del sistema, allora la [I.2] si riduce a

$$U = \int u(t, P, \ldots)\, dm = m \cdot u(t, P, \ldots) \qquad [I.3]$$

In questo caso, è usuale scrivere, quando possibile, i parametri intensivi (ad esempio densità, concentrazione) in termini del volume complessivo V del sistema (oltreché della massa del sistema e/o di alcuni suoi componenti).

Quando invece il sistema non si trova in uno stato di equilibrio, il calcolo delle funzioni di stato richiede il ricorso diretto alla [1.2].

Sistemi formati da più parti

Un caso intermedio notevole, cui si è già accennato nel paragrafo 1.7, è quello di un sistema costituito da due parti (1) e (2) (di massa m_1 ed m_2 rispettivamente), ciascuna delle quali sia in equilibrio interno, ma non in equilibrio fra di loro. In questo caso, il calcolo della funzione di stato considerata (ad esempio dell'energia interna) si riduce a

$$U = m_1\, u(t_1, P_1, V_1, m_1 \ldots) + m_2\, u(t_2, P_2, V_2, m_2 \ldots) \qquad [I.4]$$

dove t_1, P_1, V_1, m_1 ... sono i valori di temperatura, pressione, volume, massa ... della parte (1); e t_2, P_2, V_2, m_2 ... i valori che gli stessi parametri hanno per la parte (2) del sistema.

Lavoro

I.9. Lavoro in una trasformazione termodinamica

Un sistema termodinamico è racchiuso in un certo volume delimitato da una superficie esterna (pareti del recipiente che contiene il sistema in esame).

Lavoro in una espansione

Attraverso questa superficie di contorno il sistema interagisce con l'ambiente esterno. Per il terzo principio della dinamica vi è punto per punto uguaglianza in modulo (e segno opposto) fra le forze che il sistema esercita sulle pareti del recipiente e le forze che l'ambiente esterno, pareti incluse, esercita sul sistema termodinamico stesso.

TRASFORMAZIONE
QUASI STATICA: $P = P_0$

FORZA = PS
SPOSTAMENTO = dh
LAVORO $\delta L = PSdh = PdV = P_0 dV$

Se il sistema cambia il suo volume, le forze applicate alla superficie di contorno del sistema spostano il loro punto di applicazione e quindi compiono del lavoro meccanico.

Per esempio, se un sistema gassoso, contenuto in un cilindro munito di pistone di area S, si espande in maniera quasi statica sollevando il pistone di una quantità dh, la forza applicata al pistone da parte del gas per effetto degli urti delle molecole sul pistone, sposta il suo punto di applicazione e quindi compie un lavoro

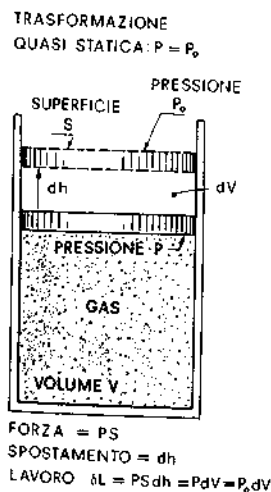
$$\delta L = (P_0 S) \cdot d \qquad [I.5]$$

essendo $P_0 S$ pari proprio alla forza esercitata dal gas sulla parete di area S.

Indicando con $dV = S\, dh$ la variazione di volume del gas, la [I.5], si può scrivere come:

$$\delta L = P\, dV \qquad [I.6]$$

Lavoro elementare in una espansione quasi statica

Questa espressione del lavoro elementare di espansione di un gas – è bene ribadirlo – ha significato *se la quantità P (pressione del gas) ha un certo valore definito per tutto il gas (uniformità di P su tutto il volume del gas)*. Ciò implica che il gas debba trovarsi in uno *stato di equilibrio* (trasformazione quasi-statica).

Lavoro elementare in una espansione *non* quasi statica

Se il gas non è in uno stato di equilibrio, si può, ovviamente, parlare ancora di lavoro di espansione. Solo che, in questo caso, il calcolo del lavoro deve essere eseguito tenendo conto delle forze esterne al sistema e non della pressione interna, che non è univocamente definita durante l'espansione.

Ad esempio: supponiamo di avere un gas racchiuso in un cilindro munito di pistone, ad una pressione interna tripla della pressione atmosferica. La pressione sul pistone, supposto di massa trascurabile, sia, dalla parte esterna, pari alla pressione atmosferica P_o. Il pistone è mantenuto nella sua posizione da un opportuno blocco. Il volume del gas è inizialmente V.

Se si sblocca il pistone, la differenza di pressione tra le due facce fa sì che il pistone salga bruscamente fino ad incontrare un nuovo blocco che limita la sua corsa al momento in cui il volume è – ad esempio – raddoppiato.

A causa della rapidità della trasformazione, gli stati intermedi non sono di equilibrio termodinamico, e la pressione P del gas non è definita.

Il calcolo del lavoro associato alla trasformazione considerata si esegue tenendo conto che la forza esterna sul sistema è dovuta solo alla pressione P_o (costante durante la trasformazione) includendo eventualmente in P_o anche il contributo dovuto al peso del pistone; il lavoro sarà pertanto $L = P_o \cdot \Delta V$ (essendo ΔV la variazione di volume).

Lavoro di espansione per un sistema di forma qualsiasi

Nel caso in cui il sistema che cambia volume sia di forma qualsiasi, il lavoro elementare associato ad una variazione complessiva di volume dV sarà dato dalla somma (integrale) dei lavori elementari che le forze $dF = P\,dS$ compiono nello spostare il loro punto di applicazione di tratti infinitesimali di altezza dh. Sommando su tutta la superficie di contorno S si avrà:

$$\delta L = \int_s P\,dS\,dh = P\int_s dS\,dh = P\,dV \qquad [I.7]$$

(dV è rappresentato dall'area tratteggiata in figura). Anche in questo caso vale evidentemente la distinzione che sopra abbiamo fatto fra trasformazioni quasi statiche e non.

Più in generale, è possibile che il sistema interagisca con l'ambiente esterno in modo che si esegua del lavoro anche in assenza di variazioni di volume del sistema stesso. Ciò accade, per esempio, quando il sistema interagisce con l'ambiente tramite forze di attrito; oppure quando sono attivi dei meccanismi di interazione elettromagnetica o gravitazionale, ecc.

Convenzione sul segno del lavoro

Per stabilire il segno algebrico da attribuire al lavoro nel caso di azioni meccaniche si considera la *forza che il sistema esercita sull'ambiente esterno*. Se tale forza sposta il suo punto di applicazione concordemente al suo verso, il lavoro viene convenzionalmente assunto come positivo; e viceversa nel caso di spostamento in verso opposto.

Nel caso di cambiamenti di volume di un sistema, ad una *espansione* (variazione positiva di volume) corrisponde un *lavoro positivo* (la forza derivante dalla pressione e lo spostamento del suo punto di applicazione sono concordi); viceversa nel caso di una compressione.

Nel caso di forze di attrito, il segno del lavoro è stabilito considerando la forza che il sistema, considerato fermo, esercita sui corpi esterni a contatto, in relazione agli spostamenti dei corpi esterni rispetto al sistema stesso. Per esempio, consideriamo come sistema un freno che interagisce con un ambiente esterno rappresentato da un volano rotante. Lo sposta-

mento del volano è opposto alla forza di attrito F che il freno esercita sul volano, e pertanto il lavoro è negativo.

I.10. Rappresentazione grafica delle trasformazioni e del lavoro

Supponiamo che lo stato della materia che costituisce un certo sistema termodinamico sia caratterizzato dai parametri di stato pressione P e volume V. Per individuare uno stato generico del sistema, si dovrà specificare il valore che la pressione e il volume specifico (o, equivalentemente, la densità) assumono in ogni posizione all'interno del sistema.

Ma se lo stato è uno stato di equilibrio, allora la pressione e la densità assumono lo stesso valore in ogni punto; e lo stato stesso è completamente individuato da una coppia di valori per la pressione P e il volume V dell'intero sistema. Uno stato di equilibrio può allora essere rappresentato, graficamente, da un punto sul piano V, P.

Dati due stati A e B, una trasformazione quasi statica che porti da A a B (cioè una sequenza di infiniti stati intermedi di equilibrio che portino da A a B) è rappresentata da una curva continua, cioè dal grafico della funzione $P = P(V)$ che descrive la trasformazione t.

Il lavoro totale di volume che il sistena compie per passare dallo stato A allo stato B attraverso la trasformazione t considerata è dato da

$$L^{(t)}_{A \to B} = \int_A^B P\,dV$$

ed è rappresentato graficamente dall'area tratteggiata in figura.

È immediato convincersi che, a parità di stati iniziale e finale, il lavoro dipende dalla particolare trasformazione seguita.

Il lavoro dipende dalla trasformazione

Per esempio, nella figura il lavoro lungo la trasformazione t' è minore rispetto al lavoro lungo la trasformazione t.

In termini infinitesimi (trasformazioni quasi statiche), questa proprietà del lavoro si esprime dicendo che il lavoro infinitesimo non è un differenziale esatto. In simboli si userà una lettera δ:

$$\delta L = P\,dV$$

e si lascerà il prefisso d per i differenziali esatti (come in analisi).

I.11. Dilatazione termica

Dilatazione termica

Come abbiamo già accennato, le dimensioni geometriche di un corpo dipendono dalla temperatura, oltre che, ovviamente, dalle azioni meccaniche sul corpo stesso (pressione esercitata sul corpo).

A pressione costante, potremo dire che il volume V è funzione della temperatura t: $V = V(t)$.

Detto $V(t_0)$ il volume a temperatura t_0, sviluppando in serie intorno alla temperatura t_0 potremo scrivere

$$V(t) = V(t_0)\,[1 + \beta\,\Delta t + \gamma\,(\Delta t)^2 + \delta\,(\Delta t)^3 + ...] \qquad [I.8]$$

con $\Delta t = t - t_0$.

I coefficienti β, γ, δ ... sono detti *coefficienti di viriale*. Per intervalli di temperatura sufficientemente piccoli (ad esempio Δt non superiore al centinaio di gradi) si ha di solito che $\beta\,\Delta t \gg \gamma\,(\Delta t)^2 \gg \delta\,(\Delta t)^3$ ... Per questo, si assume spesso come soddisfacente la relazione approssimata

$$V(t) = V(t_o)\,(1 + \beta\,\Delta t) \qquad [I.9]$$

o anche

$$\frac{\Delta V}{V} = \beta\,\Delta t \qquad [I.10]$$

($\Delta V = V(t) - V(t_o)$). Il coefficiente β viene anche detto *coefficiente di dilatazione (volumica)*.

Coefficiente di dilatazione termica

Nel caso in cui, insieme a variazioni di temperatura, siano presenti azioni meccaniche (e in particolare variazioni di pressione) la variazione elementare di volume dV assumerà la forma più generale

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_P dt + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_t dP \qquad [I.11]$$

dove con $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_P$ si intende la derivata parziale del volume rispetto alla temperatura a pressione costante, e con $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_t$ la derivata parziale del volume rispetto alla pressione a temperatura costante.

Considerato che la [I.10] si riferisce a trasformazioni a pressione costante ($dP = 0$), essa ci dice (per confronto con la [I.11]) che

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_P = \beta V \qquad [I.12]$$

Per variazioni di pressione a temperatura costante, risulta sperimentalmente che entro ampi intervalli di pressione ΔP si può scrivere

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{k}\,\Delta P \qquad [I.13]$$

k è detta costante elastica del materiale. La [I.13] equivale a dire che

Costante elastica

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_t = -\,V\frac{1}{k}\,. \qquad [I.14]$$

Usando la [I.12] e la [I.14], la [I.11] può essere scritta come:

$$dV = V\left(\beta\,dt - \frac{1}{k}\,dP\right) \qquad [I.15]$$

Coefficiente di dilatazione lineare

Nel caso di corpi solidi è conveniente introdurre anche il *coefficiente di dilatazione lineare* α. La lunghezza l di una sbarra può essere espressa mediante una formula approssimata analoga alla [I.9]:

$$l(t) = l(t_0)(1 + \alpha \Delta t) \qquad [I.15]$$

dove α è detto appunto coefficiente di dilatazione lineare.

Nella tabella I.1 riportiamo il coefficiente di dilatazione volumica β per alcuni liquidi; e in tabella I.2 il coefficiente di dilatazione lineare α per alcuni corpi solidi. Vale la relazione approssimata $\beta = 3\alpha$ (vedi esercizio I.3).

Tabella I.1.
Coefficienti di dilatazione volumica di alcuni liquidi a pressione ordinaria.

$$V(t) = V(t_0)[1 + \beta \Delta t + \gamma \Delta t^2 + \delta \Delta t^3]$$

	Intervallo di temperatura ΔT (K)	β 10^{-3} (°C)$^{-1}$	γ 10^{-6} (°C)$^{-2}$	δ 10^{-8} (°C)$^{-3}$
Acqua	273-306	-0,064	8,505	-6,970
Alcool etilico	300-319	1,012	2,200	...
Benzene	284-354	1,176	1,277	0,806
Glicerina	273-373	0,485	0,489	...
Mercurio	273-573	0,182	0,008	0,013
Petrolio	297-393	0,899	1,396	...

Tabella I.2.
Coefficiente di dilatazione lineare α per alcune sostanze pure a pressione ordinaria.

$$\alpha\,(10^{-6})\,(°C^{-1})$$

Le temperature K sono espresse in gradi kelvin, definiti nel § II.4.1.

	Temperatura, K				
	100	200	300	400	500
Alluminio	12,0	20,2	23,3	24,9	26,5
Argento	14,4	17,9	19,2	19,9	20,7
Cloruro di sodio	23,0	34,8	42,5	46,4	50,6
Ferro	5,7	10,1	12,0	13,2	14,3
Ossido di silicio	0,6	0,0	0,4	0,5	0,7
Ottone	9,6	16,7	18,7	20,0	22,0
Palladio	8,0	10,8	11,3	11,9	14,0
Piombo	25,4	27,5	28,9	29,8	...
Rame	10,5	15,2	16,9	17,6	18,3
Stagno	16,2	19,6	21,9	25,0	...
Vetro di Jena	...	...	6,0	...	...
Vetro Pirex	...	...	3,0	...	...

Esempi

Definizione di calore

E.I.1. *Una miscela di acqua e ghiaccio in equilibrio (temperatura di 0°C) contiene 40 grammi di ghiaccio. Poiché il recipiente non è termicamente ben isolato, e la temperatura ambiente è 20°C, mezz'ora dopo si trova che 25.0 grammi di ghiaccio si sono fusi. Qual è la quantità di calore che il recipiente ha scambiato con l'ambiente? Tale quantità è positiva o negativa?*

Il sistema è sostanzialmente un calorimetro: secondo la definizione di calore, ogni grammo di ghiaccio sciolto corrisponde a una quantità di calore ricevuta dal sistema pari a 79,7 calorie. La quantità di calore Q complessivamente ricevuta dal sistema è dunque pari a $Q = 25{,}0 \text{ grammi} \times 79{,}7 \dfrac{\text{calorie}}{\text{grammo}} = 1992{,}5$ calorie.

Trattandosi di calore ricevuto dal sistema, secondo la nostra convenzione esso è positivo. Volendo esprimere Q in joule, si ha $Q = 1992{,}5 \text{ calorie} \times 4{,}18 \dfrac{\text{joule}}{\text{caloria}} = 8328{,}7$ joule.

Definizione di trasformazioni

E.I.2. *La trasformazione subita dal sistema di cui all'esempio E.I.1. è una trasformazione spontanea? È ciclica? È quasi-statica?*

Abbiamo definito *spontanea* la trasformazione da uno stato *non* di equilibrio a uno stato di equilibrio di un sistema *isolato*. Poiché nel caso in esame il sistema riceve calore, esso non è isolato: la trasformazione non risponde dunque alla definizione di trasformazione spontanea. La trasformazione non è nemmeno ciclica: lo stato finale, pur avendo la stessa temperatura dello stato iniziale, è infatti uno stato diverso, caratterizzato da una diversa quantità di acqua nella fase solida di ghiaccio.

La trasformazione è invece praticamente quasi-statica: anche mentre essa avviene, il sistema passa per stati praticamente di equilibrio (temperatura a 0°C; velocità nulla; parametri di stato sempre definiti).

Osservazione:
A rigore, la trasformazione sarebbe quasi statica solo se la temperatura ambiente fosse molto prossima a quella del sistema. Nel caso in esame, la differenza di temperatura 20°C - 0°C non produce apprezzabili perturbazioni allo stato del sistema.

E.I.3. *Quando un sistema riceve calore, è vero che esso «si riscalda»?*

Dire che un sistema si riscalda, significa dire che la sua temperatura aumenta. Benché spesso accada che quando un sistema riceve calore la sua temperatura aumenta, ciò non è sempre vero. Il sistema, ad esempio, di cui ai precedenti punti, pur ricevendo calore non si riscalda: la sua temperatura resta costante a 0°C.

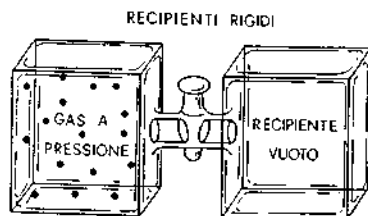
E.I.4. *Una bombola contenente un centinaio di litri di gas a 20 atmosfere è collegata con un cilindro con pistone mediante una valvola a spillo che consente al gas di fluire solo molto lentamente. Il cilindro ha un volume complessivo di 2 litri, e il pistone è inizialmente poggiato sul fondo. Che lavoro meccanico ha scambiato il sistema (il gas) quando il pistone si è sollevato fino ad appoggiarsi sul bordo superiore del cilindro? La trasformazione subita dal gas è spontanea?*

Sul pistone, dall'esterno, agisce la pressione atmosferica P_0: esso subisce una forza verticale verso il basso, di modulo costante pari a P_0S, dove S è la superficie del pistone. Chiamando h il tratto di cui si solleva il pistone, il lavoro compiuto dalle forze esterne agenti sul sistema durante la trasformazione è $-P_0Sh = -P_0V$, dove V è il volume del cilindro. Secondo la nostra convenzione sui segni, il lavoro L che il sistema scambia con l'ambiente è il lavoro compiuto dalle forze esterne cambiato di segno: dunque $L = P_0V$ (positivo) $= 1 \text{ atmosfera} \times 2 \text{ litri} = 1 \text{ atmosfera} \times 1{,}013 \times 10^5 \dfrac{N/m^2}{\text{atmosfera}} \times 2 \text{ litri} \times \dfrac{10^{-3}\, m^3}{\text{litro}} = 2{,}026 \times 10^2\, Nm = 2{,}0126 \times 10^2$ joule.

Poiché durante la trasformazione il sistema non è isolato, la trasformazione non è spontanea.

Notare che rispetto alla quantità di energia più sopra calcolata risulta trascurabile la variazione di energia potenziale della forza peso conseguente a eventuali variazioni di quota di alcune porzioni di gas.

Osservazione:
Si è trascurato il contributo che il peso del pistone dà alla pressione P_0 che dall'esterno agisce sul cilindro. Se ad esempio la massa del pistone fosse 100 g e la sua area 1 dm^2, la pressione dovuta al suo peso sarebbe circa $10^2 \dfrac{N}{m^2}$; mentre P_0 è circa $10^5 \dfrac{N}{m^2}$.

Lavoro in una espansione spontanea.

E.I.5. *Un gas riempie un recipiente rigido collegato, mediante un tubo con rubinetto, con un secondo recipiente rigido, inizialmente vuoto. Aprendo il rubinetto, il gas va a riempire uniformemente i due recipienti. La trasformazione è spontanea?*

Si tratta di vedere se, durante la trasformazione, il sistema sia isolato.

Indipendentemente dal fatto che i recipienti siano termicamente isolati o meno, poiché la trasformazione avviene in breve tempo si può ritenere inessenziale la quantità di calore che il sistema scambia con l'ambiente. Quanto al lavoro, notiamo che le forze che agiscono dall'esterno sul gas sono esercitate solo dai recipienti, i quali sono rigidi: lo spostamento delle forze è dunque nullo, e nullo è anche il lavoro. La trasformazione è dunque spontanea.

Lavoro in una espansione

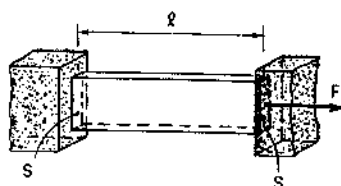
E.I.6. *Il palloncino rigido di volume V contenente il gas è ora collegato con un palloncino di gomma leggera, inizialmente sgonfio. Aprendo il rubinetto, il palloncino di gomma si gonfia fino ad aderire completamente contro un contenitore a rete di volume V fissato (1 litro). La trasformazione è spontanea?*

Contrariamente al caso trattato nel precedente esempio, il palloncino che il gas va a riempire *non* è rigido. Esso trasmette al gas una pressione sostanzialmente uguale a quella atmosferica P_0, se può essere trascurato il contributo a tale pressione fornito dalla forza elastica di deformazione della gomma. Ogni elemento dS del palloncino esercita dunque sul gas una forza pari a $P_0 dS$; e quando gonfiandosi il pallone, l'elemento dS si sposta di un tratto dh il corrispondente lavoro è

$$\delta L = -P_0 dS\, dh = -P_0 dV$$

In totale il lavoro che il sistema scambia con l'esterno nella trasformazione (lavoro delle forze esterne cambiato di segno) è $L = P_0 V$.

Tale lavoro è positivo (diverso da zero): la trasformazione non è spontanea. Numericamente $L = 1$ atm. $\times$ 1 litro $= 1{,}013 \cdot 10^2$ joule.

Forza esercitata da un corpo che si dilata

E.I.7. *Una sbarretta di ferro di sezione $S = 5$ cm², inizialmente alla temperatura di 20 °C, viene interposta, di stretta misura, fra due pareti rigide. Se la sbarretta viene poi portata a 100 °C, quale forza essa esercita sulle pareti (nell'ipotesi che la distanza fra queste resti costante)?*

Anche per la dilatazione lineare, vale una relazione analoga alla [1.15]:

$$\frac{dl}{l} = \alpha\, dt - \frac{1}{k}\, dP$$

dove α è il coefficiente di dilatazione lineare (per il ferro $\alpha \simeq 15 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}); dt è la variazione di temperatura; k costante elastica vale nel caso in esame circa $10^{11} \frac{N}{m^2}$; dP è la variazione di pressione $\left(\text{nel nostro caso } dP = \frac{F}{S}\right)$.

Poiché nella configurazione ipotizzata $\frac{dl}{l} = 0$, deve essere:

$$\alpha\, dt - \frac{1}{k}\, dP = 0$$

da cui, approssimando dt a $\Delta t = 100 - 20 = 80$°C,

$$\frac{F}{S} = dP = \alpha \cdot dt \cdot k$$

$$F = S \cdot \alpha \cdot dt \cdot k =$$

$$= 5.10^{-4}\, m^2.\ 15.10^{-6}\, °C^{-1}.\ 80°C,\ 10^{11}\, \frac{N}{m^2} \simeq 2.10^4\, N$$

Tabella I.3

Alcuni punti fissi della scala internazionale delle temperature (alla pressione di 1 atm.), con indicazione del termometro primario usato nei vari intervalli di temperatura

Temperatura K	(°C)	Fenomeno Fisico	Termometro primario e fenomeno su cui si basa	
0	−273,16	Zero assoluto	Ciclo termodinamico	Misura del rendimento (cfr. Cap. IV)
13,81	−259,34	Punto triplo dell'Idrogeno	Termometro a resistenza elettrica	La resistività elettrica varia con la temperatura
20,28	−252,87	Evaporazione dell'Idrogeno		
54,36	−218,79	Punto triplo dell'Ossigeno		
90,19	−182,96	Ebollizione dell'Ossigeno	Termometro a dilatazione (gas, liquidi)	
273,15	0,0	Fusione del ghiaccio		
273,16	0,01	Punto triplo dell'acqua		
373,15	100,0	Ebollizione dell'acqua		
717,8	444,7	Ebollizione dello zolfo		
903,9	630,7	Fusione dell'Antimonio	Termometro termoelettrico (termocoppia)	Due metalli diversi collegati in modo da formare due giunzioni bimetalliche erogano corrente se le due giunzioni sono a temperature diverse
1235,0	961,9	Fusione dell'Argento		
1337,6	1064,4	Fusione dell'Oro	Pirometro Ottico	L'intensità e lo spettro della luce irradiata dipendono dalla temperatura (cfr. Cap. III)
1685,2	1412,0	Fusione del Silicio		

Tabella I.4

Costanti elastiche per alcune sostanze (vedi § I.11)

	K (10^{-10}) newton/m^2
Alluminio	6,9
Argento	7,5
Ferro	15 ÷ 20
Ottone	10,4
Piombo	1,5 ÷ 1,7
Platino	16,7
Rame	12,5
Stagno	5,5
Vetro Pirex	6,2

Esercizi del capitolo I

I.1. Se una sbarretta di rame, di lunghezza un metro a 20°C, viene portata a 100°C, quale allungamento Δl subisce? (Risposta: 1,36 mm)

I.2. Il pendolo di un orologio è costruito in ottone. Ammettendo che l'orologio sia esatto quando la temperatura ambiente è t_0 = 20°C, quanto ritarda ogni giorno quando la temperatura ambiente è t = 27°C? (Risposta: 5,7 s)

I.3. Trovare una relazione semplice approssimata fra il coefficiente β di dilatazione volumica e il coefficiente α di dilatazione lineare di un dato materiale. (Risposta: $\beta \simeq 3\,\alpha$)

I.4. Una sbarretta parallelepipeda di rame ha volume V_o = 1,5 dm³ a T_o = 100 F (gradi Fahrenheit). Che variazione di volume ΔV subisce quando la temperatura passa a 200°F? (Risposta: 4,25 cm³)

I.5. Il bulbo di un termometro a mercurio ha volume V_o = 0,5 cm³. Se la distanza δ fra la tacca corrispondente a 0°C e quella corrispondente a 100°C è δ = 20 cm, quale è la sezione σ del capillare? (Risposta: 0,045 mm²)

I.6. Supponendo che il termometro di cui all'esercizio I.5. sia costruito con vetro pirex, discutere quanto sia giustificato trascurare la dilatazione del contenitore rispetto alla dilatazione del mercurio.

I.7. Un gas alla pressione P_o atmosferica e temperatura T_o ambiente è contenuto dentro un cilindro con pistone, il cui volume iniziale è V_o = 10 litri. Raffreddando il gas, il pistone scende per azione della pressione atmosferica esterna, fino a che il volume occupato dal gas è V = 8 litri. Quale è il lavoro, in valore assoluto e segno, compiuto dal gas? (Risposta: − 202,6 J)

I.8. Un gas contenuto dentro un palloncino di gomma occupa inizialmente un certo volume V alla pressione P. Scaldando il gas, il suo volume aumenta in una trasformazione quasi statica, mentre la sua pressione (uguale a quella che il palloncino esercita su di esso) varia secondo la legge $P = P_0 V/V_0$. Quale lavoro ha compiuto il gas quando il suo volume è raddoppiato? (P_o = 1.5 atm; V_o = 20 litri) (Risposta: 4558,5 J)

I.9. Si dispone di un capillare di sezione σ = 0.1 mm², e si vuole costruire un termometro ad alcool etilico in cui la distanza fra la tacca a − 5°C e quella a + 35°C sia h = 20 cm. Di quale volume dovrà essere realizzato il bulbo? (Assumere che il coefficiente di dilatazione riportato in tabella I.1 valga nell'intervallo di temperatura dell'esercizio). (Risposta: 0,5 cm³)

I.10. Un recipiente metallico contiene 5 litri di acqua e una massa m_g pari a cinque kg di ghiaccio, fra di loro in equilibrio termico. Sotto il recipiente viene posta la fiamma di un fornelletto a gasolio, e si riscontra che tutto il ghiaccio si è disciolto quando il fornello ha bruciato 100 gr di gasolio. Quale frazione dell'energia termica sviluppata dal fornello è stata comunicata al recipiente? (Calore di combustione del gasolio $\simeq 10^4$ cal/g). (Risposta: 40%)

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo I

I.1. Vedere i coefficienti di dilatazione lineare riportati in tabella I.2.

I.2. Se si trattasse di un pendolo semplice, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; nel caso di un pendolo fisico, vale una espressione analoga dove l è una lunghezza caratteristica (lunghezza ridotta) del pendolo. Essendo $T = T(l)$, ogni variazione $\Delta\, l$ di lunghezza (dilatazione) produce una variazione ΔT del periodo. ΔT può essere calcolato approssimativamente tenendo conto che $\Delta l/l << 1$.

I.3. Per un solido qualunque, $V = K\, a\, b\, c$, con K numero puro (fattore di forma) e a, b, c tre lunghezze caratteristiche ciascuna soggetta al fenomeno della dilatazione lineare.

I.4. Dalla (I.1), risuta che una variazione di temperatura ΔT(F) espressa in gradi Fahrenheit è legata alla variazione ΔT (°C) espressa in gradi centigradi dalla relazione $\Delta T(\text{F}) = 1{,}8\, \Delta T(°\text{C})$.

I.5. Vedere i coefficienti di dilatazione volumica in tabella I.1.

I.6. Un bulbo subisce una dilatazione pari a quella di un oggetto «pieno» costituito dello stesso materiale. Vedere il coefficiente di dilatazione in tab. I.1.

I.7. Si tratta di lavoro di compressione di un sistema soggetto a una pressione esterna costante pari a P_o.

I.8. Si tratta di lavoro di espansione, ed è nota la pressione P come funzione del volume V.

I.9. L'esercizio è molto simile all'esercizio I.5.

I.10. La soluzione è molto semplice, perchè il sistema che riceve calore è praticamente un calorimetro; si è voluto mettere in evidenza che in generale solo una frazione del calore sviluppato in una fiamma viene utilmente impiegato.

Capitolo secondo

Il primo principio della termodinamica

ASSORBENDO LAVORO L IL SISTEMA PASSA DALLO STATO A ALLO STATO B

Dispositivo di Joule. Scendendo il peso agita l'acqua tramite le palette, e si compie così lavoro per attrito.

CEDENDO CALORE AL CALORIMETRO IL SISTEMA RITORNA ALLO STATO INIZIALE A

II.1. L'equivalente meccanico della caloria

Consideriamo un qualunque sistema termodinamico, in uno stato di equilibrio A. Mantenendo il sistema termicamente isolato (in modo che non scambi calore) compiamo su di esso del lavoro meccanico L. Per conseguenza, il sistema compie una trasformazione portandosi (pur di aspettare abbastanza tempo) in un diverso stato di equilibrio B. Ad esempio, se il sistema è un solido (ovvero anche un fluido contenuto in un recipiente sigillato e rigido) e si compie su di esso lavoro per sfregamento ($L < 0$), si riscontra che il sistema si porta in uno stato caratterizzato solo da una temperatura più alta.

Mettendo ora il sistema a contatto con un calorimetro, sottraiamo calore ($Q < 0$ che il calorimetro via via misura) fino a che il sistema non si riporta nello stato iniziale A.

Il sistema ha così compiuto, nel suo complesso, una *trasformazione ciclica*. Ebbene, si riscontra che il rapporto fra il lavoro L e il calore Q che il sistema ha scambiato con l'ambiente durante tale trasformazione è costante. Tale rapporto è cioè indipendente da tutte le possibili variabili fisiche che caratterizzano il processo; in particolare, esso è ovviamente indipendente da L (se L, ad esempio, raddoppia, raddoppia Q); è indipendente dal tipo di sistema e dal suo stato; è indipendente dal modo usato per fare il lavoro; ecc.

Le misure sperimentali consentono dunque di enunciare il seguente principio di validità generale: *in qualunque trasformazione ciclica di qualunque sistema termodinamico, il rapporto fra il lavoro complessivo che il sistema ha ricevuto e il calore complessivo che gli è stato sottratto (o viceversa) è una costante universale.*

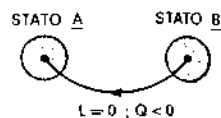
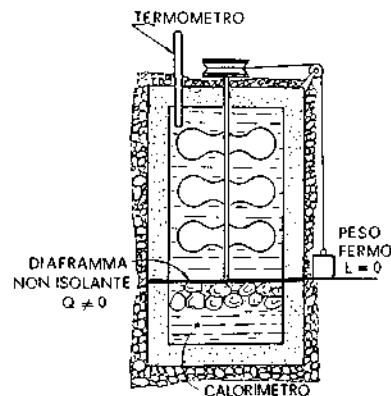
$$\text{Trasformazione ciclica: } \frac{L}{Q} = J \quad \text{ovvero} \quad QJ - L = 0 \tag{II.1}$$

Notare che se L è ricevuto dal sistema, Q è ceduto da esso (o viceversa). Secondo le nostre convenzioni, Q ed L hanno dunque lo stesso segno, e

$\frac{L}{Q} = 4{,}186$ Joule/cal.

pertanto J è positivo. Il valore numerico di J (che dipende solo dalle unità in cui si misurano calore e lavoro) è di 4.1855 joule per ogni caloria (*equivalente meccanico della caloria*).

Il calore è una forma di energia.

L'esistenza di questo principio consente di identificare il calore come una grandezza fisica omogenea con il lavoro, cioè come una delle forme in cui l'energia si trasmette.

Calore e lavoro possono essere misurati nelle stesse unità di misura.

Per conseguenza, anche il calore può essere misurato nelle stesse unità di misura (joule) in cui si misura il lavoro e l'energia meccanica: una quantità di calore pari a un joule è quella che viene sottratta a un sistema per portarlo dallo stato B allo stato A, se per portarlo da A a B era stato compiuto sul sistema un lavoro meccanico pari a 1 joule.

$Q - L = 0$ in ogni trasformazione ciclica.

Se calore e lavoro sono espressi nelle stesse unità di misura, la [II.1] viene scritta nella forma $Q - L = 0$.

Esempi

E.II.1. *Quale quantità di calore occorre sottrarre da una miscela di acqua e ghiaccio a 0°C per far sì che 25 grammi di acqua si trasformino in ghiaccio?*

Calore di solidificazione e calore di liquefazione.

Abbiamo visto (esempio 1 del precedente capitolo) che affinché si sciolgano 25 grammi di ghiaccio il sistema deve ricevere 1975 calorie pari a 8255.5 joule.

Solidificare 25 grammi di ghiaccio significa riportare quel sistema nello stato iniziale facendogli compiere in complesso una trasformazione ciclica.

In totale, nella trasformazione ciclica $QJ - L = 0$; e poiché in questo caso il sistema non scambia lavoro con l'ambiente ($L = 0$) segue $Q = 0$.

Il congelamento di 25 grammi di ghiaccio richiede dunque uno scambio di calore *uguale e opposto* rispetto a quello richiesto per sciogliere 25 grammi di ghiaccio: 1975 calorie sottratte dal sistema anziché da esso ricevute.

$$(Q = -1975 \text{ calorie}).$$

Dissipazione di energia cinetica e calore.

E.II.2. *Un disco omogeneo di massa $m = 1$ kg e raggio $R = 10$ cm sta ruotando compiendo $\nu = 2000$ giri al minuto. Esso viene fermato da un freno a ganascia. Che quantità di calore va sottratta al freno per riportarlo alla stessa temperatura che aveva prima che la frenata cominciasse?*

Il sistema termodinamico che consideriamo è il freno: noi vogliamo che esso compia una trasformazione ciclica, poiché vogliamo che alla fine esso torni alla sua temperatura iniziale. A tal fine, per la [II.1] deve essere

$$QJ - L = 0 \quad \text{cioè} \quad Q = \frac{L}{J}$$

Il lavoro L (negativo) che il sistema compie verso l'esterno (cioè sul disco) è pari all'energia cinetica iniziale cambiata di segno $\left(-\frac{1}{2} I \omega^2\right)$ che il disco inizialmente aveva. Dunque

$$Q = -\frac{1}{2}\frac{I\omega^2}{J} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\frac{(2\pi\nu)^2}{J} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{1\text{ kg}}{J}\times(0.1)^2\, m^2\cdot\left(2\pi\cdot\frac{2000}{60}\text{ sec}^{-1}\right)^2 = -25 \text{ calorie}$$

II.2. Il primo principio della termodinamica

Misurando dunque calore e lavoro nelle stesse unità, possiamo scrivere

$$\frac{L}{Q} = 1 \text{ in ogni trasformazione ciclica.} \qquad [II.2]$$

ovvero, in maniera equivalente

$$Q - L = 0 \qquad [II.3]$$

In ogni trasformazione ciclica, la differenza fra il calore complessivo che il sistema ha ricevuto (o ceduto) e il lavoro complessivo che esso ha ceduto (o ricevuto) è nulla.

Dalla [II.3] discende che in una trasformazione non ciclica che porti il sistema dallo stato A allo stato B, la quantità $Q - L$ dipende solo dagli stati A e B, e non dalla particolare trasformazione seguita.

Consideriamo infatti due diverse trasformazioni, a e b, che portano il sistema da A a B (vedi figura).

Consideriamo inoltre una qualunque trasformazione c che riporta il sistema da B ad A. L'insieme delle due trasformazioni a e c – così come l'insieme delle trasformazioni b e c – rappresenta una trasformazione ciclica. In virtù della [II.3] si può dunque scrivere:

$$(Q - L)_a + (Q - L)_c = 0 \text{ (trasformazione ciclica } a + c)$$
$$(Q - L)_b + (Q - L)_c = 0 \text{ (trasformazione ciclica } b + c)$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$(Q - L)_a - (Q - L)_b = 0$$

cioè

$$(Q - L)_a = (Q - L)_b$$

La quantità $Q - L$ non dipende dunque dalla trasformazione; essa può solo essere funzione degli stati A e B

$(Q - L)$ dipende solo dagli stati iniziale e finale.

$$Q - L = f(A, B) . \qquad [II.4]$$

È opportuno ricordare che, separatamente, sia Q che L dipendono oltreché dagli stati A e B anche dalla trasformazione seguita.

Dimostriamo ora che la $f(A, B)$ può essere scritta nella forma

$$f(A, B) = U(B) - U(A) \qquad [II.5]$$

cioè come differenza fra i valori che una stessa funzione di stato $U(P, V, t, ...)$ assume rispettivamente negli stati B (finale) ed A (iniziale).

A tal fine, consideriamo una trasformazione che a partire da uno stato di riferimento O (peraltro arbitrario) porta il sistema prima nello stato A e poi nello stato B.

Chiamiamo a la trasformazione da O ad A; e b la trasformazione da 0 a B. In virtù della [II.4] possiamo scrivere

$$(Q - L)_a = f(O, A) \text{ (per la trasformazione } a) \qquad [II.6]$$
$$(Q - L)_b = f(O, B) \text{ (per la trasformazione } b) \qquad [II.7]$$

Sottraendo la [II.6] dalla [II.7] si ha

$$(Q - L)_b - (Q - L)_a = f(O, B) - f(O, A) \qquad \text{[II.8]}$$

Ma $(Q - L)_b - (Q - L)_a$ rappresenta la quantità $Q - L$ relativa alla trasformazione da A a B, e in virtù della [II.4] può essere scritta come $f(A, B)$; per cui la [II.8] diviene

$$f(A, B) = f(O, B) - f(O, A) \qquad \text{[II.9]}$$

che dimostra la [II.5], avendo chiamato $U(S)$ la $f(O, S)$. In definitiva la [II.4] può essere scritta come

$$\boxed{Q - L = U(B) - U(A) = \Delta U} \qquad \text{[II.10]}$$

La *funzione di stato* $U(P, V, t, ...)$ caratteristica del sistema viene detta **energia interna del sistema**. Poiché nella relazione fisica [II.10] la U compare solo come differenza, essa risulta definita dalla [II.10] stessa a meno di una *costante additiva arbitraria*.

L'equazione [II.10] esprime il cosiddetto **primo principio della termodinamica.**

L'equazione [II.10] può essere scritta quando sono definiti gli stati A e B. Nel caso che la trasformazione che porta da A a B sia *quasi statica*, essa può dunque essere scritta anche in riferimento a *ciascun tratto elementare della trasformazione*

$$\boxed{\delta Q - \delta L = dU} \qquad \text{[II.11]}$$

Se la trasformazione non fosse quasi statica, il secondo membro della [II.11] non sarebbe esprimibile semplicemente, poiché l'energia interna U può essere scritta in termini globali del sistema solo per gli stati di equilibrio. Notare che δQ e δL sono stati scritti diversamente da dU per indicare che essi dipendono dalla trasformazione oltre che dagli stati.

Il calore è una forma di energia. Il primo principio stabilisce la conservazione dell'energia.

Va notato che il I principio della termodinamica, nella forma dell'equazione [II.10], mentre definisce da un lato la funzione di stato energia interna, mostra che il *calore è una forma di energia*; ed estende a tutti i sistemi il principio di *conservazione dell'energia* che – se circoscritto alla sola energia meccanica – valeva solo per sistemi sottoposti a campi di forza conservativi.

A parole, il primo principio può essere espresso come segue.

Quando un sistema termodinamico compie una trasformazione da uno stato A a uno stato B, il bilancio $Q - L$ dell'energia (termica e meccanica) che esso scambia con l'ambiente non va in generale in pareggio ($Q - L \neq 0$). Lo sbilanciamento $Q - L$ viene tuttavia compensato da una variazione dell'energia (interna) accumulata nel sistema. Se l'energia complessivamente ricevuta dal sistema è maggiore di quella ceduta ($Q - L > 0$), allora $U(B) > U(A)$, e l'energia interna è aumentata di un ammontare pari appunto a $Q - L$. Viceversa, se l'energia estratta dal sistema è maggiore di quella che esso ha ricevuto ($Q - L < 0$), la differenza è stata fornita dal sistema, la cui energia interna è diminuita di un pari ammontare. Nel caso particolare in cui il sistema non cambi stato ($A \equiv B$), la sua energia interna non è variata ($U(B) - U(A) = 0$); e il bilancio dell'energia scambiata va necessariamente in pareggio ($Q - L = 0$).

Considerato un qualunque sistema termodinamico, l'utilità dell'equazione [II.10] è subordinata alla conoscenza, per quel particolare sistema, della espressione esplicita dell'energia interna U in funzione dei parametri di stato del sistema. Nei prossimi paragrafi forniremo l'espressione dell'energia interna per alcuni sistemi termodinamici notevoli.

Esempi

Trasformazioni adiabatiche.

E.II.3. *Adiabatica* è, per definizione, una trasformazione durante la quale siano trascurabili gli scambi di calore fra il sistema e l'ambiente ($Q = 0$). Per una trasformazione adiabatica, pertanto, la [II.10] si scrive:

$$\Delta U = -L$$

Se il lavoro è solo lavoro di volume (cioè associato a variazioni di volume), durante una *espansione adiabatica* $L > 0$; da cui segue $\Delta U = -L < 0$, ovvero $U_{fin} < U_{iniz}$. Il sistema *compie lavoro verso l'esterno* (per esempio sollevando un pistone su cui si esercita una forza esterna) a spese della propria *energia interna* che *diminuisce*. Viceversa durante una *compressione adiabatica* le *forze esterne compiono lavoro* comprimendo il *sistema*, che *guadagna energia* ($U_{fin} > U_{iniz}$).

Trasformazioni isovolumiche o isocore.

E.II.4. Nelle trasformazioni a lavoro nullo (in particolare, se il lavoro è solo lavoro di volume, nelle trasformazioni *isovolumiche* o «*isocore*»)

$$\Delta U = Q .$$

Ogni variazione di energia interna è dovuta unicamente a scambi di calore, cioè a interazioni termiche con corpi a temperatura diversa da quella del sistema. Se l'interazione è con un corpo a temperatura maggiore di quella del sistema:

$$Q > 0 \rightarrow \Delta U > 0, \text{ cioè } U_{fin} > U_{iniz} .$$

Riscaldando un corpo a volume costante la sua energia interna aumenta. Viceversa se l'interazione termica è con un corpo a temperatura minore di quella del sistema: *raffreddando un corpo a volume costante la sua energia interna diminuisce.*

Trasformazione isocora di un gas.

E.II.5. *Un gas è contenuto dentro un recipiente a volume costante termicamente isolato. All'interno, una resistenza elettrica viene alimentata in modo da dissipare una potenza W di 100 watt per un quarto d'ora. Di quanto varia l'energia interna del gas?*

Usiamo la [II.10], in cui poniamo $L = 0$ (recipiente a volume costante)

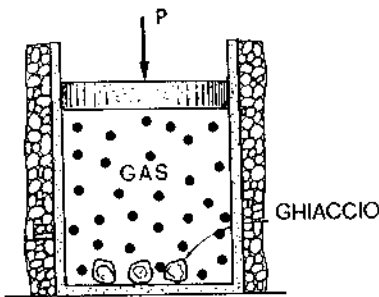
$$Q = \Delta U$$

Dall'esterno (resistenza) viene ceduto calore al sistema (gas). Essendo la temperatura della resistenza maggiore di quella del sistema, si ha $Q > 0$. Numericamente:

$$Q = Wt = 100 \text{ watt} \times 15 \text{ min} \times 60 \frac{\text{sec}}{\text{min}} = 9 \cdot 10^4 \text{ joule}$$

Dunque l'energia interna cambia di una quantità ΔU data da:

$$\Delta U = Q = 9 \cdot 10^4 \text{ joule} .$$

Trasformazione isobara, cioè a pressione costante.

E.II.6. *Un gas alla pressione atmosferica P_o è contenuto in un cilindro con pistone termicamente isolato e di massa trascurabile, di volume V_i = 5 litri. Dentro il recipiente vengono posti alcuni grammi di ghiaccio (a 0°C), che lentamente si scioglie. Si riscontra che il pistone si abbassa. Il sistema raggiunge l'equilibrio quando si è sciolto un grammo di ghiaccio: il volume del gas si è ridotto a 3.7 litri. Di quanto è variata l'energia interna del gas?*

La variazione ΔU del gas può essere calcolata attraverso la [II.10]:

$$\Delta U = Q - L$$

Il ghiaccio fa parte dell'ambiente esterno rispetto al gas. Il calore Q è quello assorbito dal ghiaccio, di cui si è sciolto un grammo.

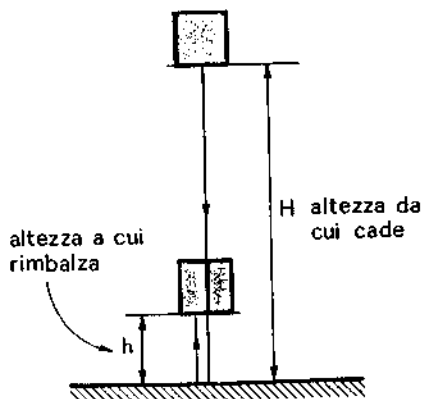
$$Q = -79{,}6 \text{ calorie } = 79{,}6 \times 4.18 \text{ joule} \simeq -333 \text{ joule}$$
(Q negativo perché ceduto dal gas).

Il lavoro compiuto dall'esterno sul gas è negativo ($\Delta V < 0$) e vale:

$$L = -P_o(V_i - V_f) = -P_o \times 1.3 \text{ litri} =$$
$$= 1{,}013 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \times 1.3\ 10^{-3} \text{ m}^3 \cong -132 \text{ joule}$$

$\Delta U = Q - L = -333$ joule $- (-132$ joule$) = -201$ joule.

(Si è trascurata la variazione di volume subita dall'acqua nel passaggio dallo stato solido allo stato liquido).

Dissipazione di energia meccanica.

E.II.7. *Un blocco di ferro di 1 kg viene fatto cadere, partendo da fermo, da una altezza H di 20 m. Dopo l'urto al suolo il blocco rimbalza all'altezza h di 1 m. Di quanto aumenta l'energia interna U_B del blocco se praticamente tutta l'energia meccanica dissipata viene assorbita dal blocco?*

L'urto - anelastico - può essere schematizzato come un processo che avviene in due fasi:

- nella prima fase il blocco, che arriva al suolo con energia cinetica $m\,g\,H$, viene portato in quiete per effetto delle forze di reazione alla deformazione del blocco stesso e del pavimento. In questa prima fase, parte dell'energia meccanica iniziale si trasforma in energia potenziale elastica macroscopica, e parte si trasforma in energia microscopica (di vibrazione degli oscillatori in cui i costituenti microscopici dei corpi coinvolti nel processo possono essere schematizzati);
- nella seconda fase dell'urto l'energia potenziale elastica (tipo molla compressa) si trasforma in energia cinetica di rimbalzo (pari a $m\,g\,h$). Dunque la parte di energia meccanica che resta al sistema - che corrisponde al lavoro meccanico L di frenamento - ha un valore pari a $L = m\,g\,h - m\,g\,H = m\,g\,(h - H)$. ($L$ è negativo, in quanto esso è ricevuto dal sistema).

Poiché il processo d'urto avviene in un tempo breve, si può supporre che non avvengano scambi di calore Q. Dunque il primo principio si scrive:

$$\Delta U = -L$$

Se si fa l'ipotesi semplificativa che solo l'energia interna U_B del blocco sia modificata nel processo, si ha

$$\Delta U_B = m\,g\,(H - h) = 1 \text{ kg. } 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot (20 - 1)\, m = 186.2\ J$$

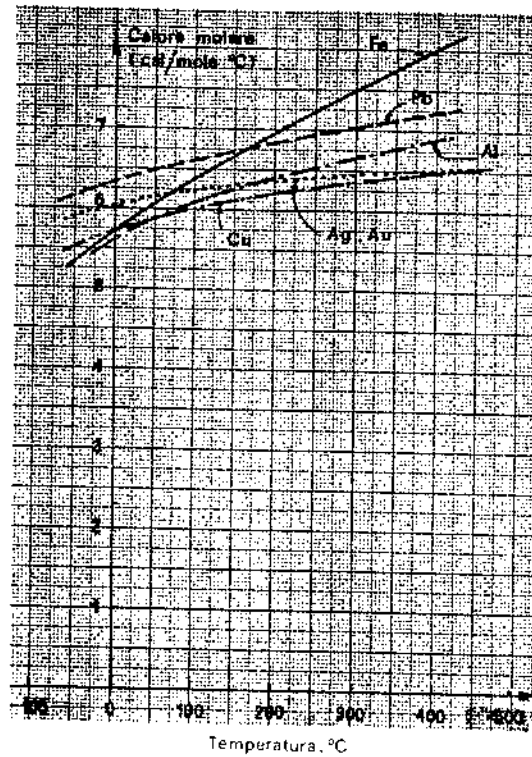



Fig. II.1. - Andamento con la temperatura del calore specifico molare di alcuni metalli.

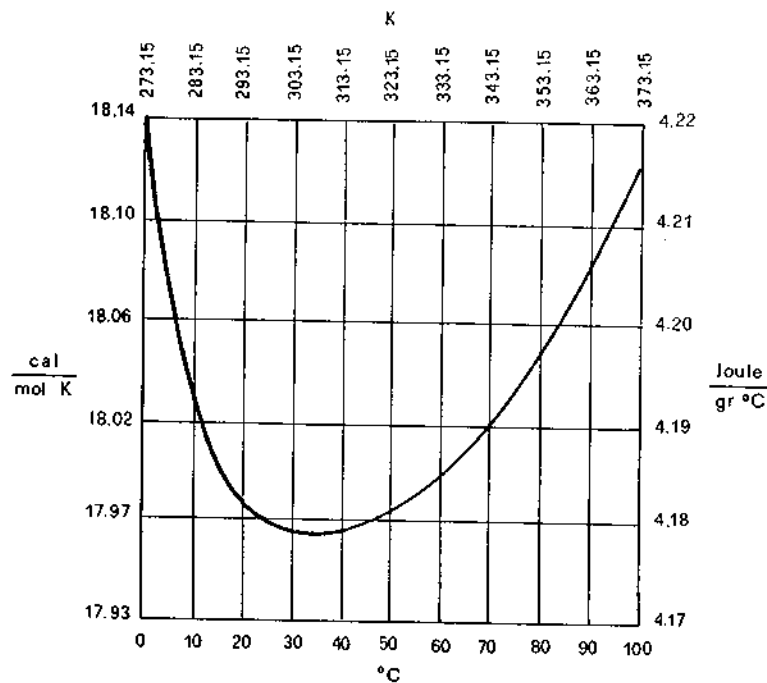



Fig. II.2. - Andamento con la temperatura del calore specifico dell'acqua (alla pressione di 1 atmosfera). Trascurando l'evaporazione e il lavoro di deformazione, il calore specifico di un liquido è definito come per un solido.

II.3. Applicazioni del primo principio a un corpo rigido

Applicazioni del I principio a un corpo rigido.

Consideriamo il caso di un sistema termodinamico costituito da un corpo rigido: un corpo cioè, il cui volume e la cui forma siano praticamente immutabili (essendo in particolare trascurabile l'effetto della dilatazione termica). In questo caso, l'unico parametro termodinamico che caratterizza gli stati del sistema è la temperatura t. Di conseguenza, la temperatura (t) è l'unico parametro da cui può dipendere l'energia interna U.

L'energia interna di un corpo rigido dipende solo dalla temperatura.

$$U = U(t)$$

Per una qualunque trasformazione che porti il sistema dallo stato di temperatura t_A a quello di temperatura generica t, potremo scrivere la [II.10] come:

$$Q - L = U(t) - U(t_A) \qquad [II.12]$$

Consideriamo il caso in cui al sistema venga fornito calore Q, ma non venga eseguito su di esso alcun lavoro meccanico per attrito. Essendo inoltre il volume del sistema praticamente costante, può essere trascurato il lavoro dovuto alla pressione che agisce sul corpo (può cioè essere trascurato il termine $P_o \cdot \Delta V$ che abbiamo visto comparire nell'esempio (II.6) del precedente paragrafo).

Essendo $L = 0$, la [II.12] si riduce a

$$Q = U(t) - U(t_A) \qquad [II.13]$$

In questo particolare caso, il calore ricevuto risulta essere direttamente e univocamente correlato con i cambiamenti di stato del sistema, e più in particolare con la sua temperatura.

Derivando la [II.13] rispetto alla temperatura, e dividendo per la massa m del sistema, si ottiene

$$\boxed{c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{m}\frac{dU}{dt}} \qquad [II.14]$$

Calore specifico del corpo $c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dt}$

La quantità $\frac{1}{m}\frac{dQ}{dt}$ viene detta **calore specifico** c del corpo: essa rappresenta la quantità di calore che deve essere fornita all'unità di massa per innalzare di un grado la sua temperatura. I calori specifici saranno espressi in cal/g°C, oppure in Joule/kg°C, ecc. Dalla [II.14] risulta che il calore specifico del solido è legato all'energia interna U del sistema della relazione

$$c = \frac{1}{m}\frac{dU}{dt}$$

Capacità termica.

Alla quantità mc si dà il nome di *capacità termica* del corpo considerato.

Di norma, il calore specifico di una sostanza solida è funzione della temperatura ($c = c(t)$).

Il calore specifico di un corpo può essere misurato misurando quanto cambia la sua temperatura quando il corpo riceve una determinata quantità di calore.

È bene notare che il fatto che il calore specifico dipenda solo dalla temperatura vale nel caso particolare di corpi solidi; in generale il calore specifico, essendo legato alla quantità di calore scambiato, dipende anche dalla particolare trasformazione considerata.

Si riscontra sperimentalmente che per molte sostanze (e particolarmente per i metalli) il calore specifico varia abbastanza poco al variare della temperatura entro intervalli abbastanza ampi. Inoltre, quando la massa venga misurata in moli (il calore specifico viene allora detto *calore molare*) il *calore specifico di un corpo solido ha un valore che è di regola simile per sostanze diverse; valore prossimo a 6 calorie per mole e per grado* (legge empirica di *Dulong e Petit*).

Calore molare.

Legge di Dulong e Petit.

L'andamento con la temperatura del calore specifico molare di alcuni metalli di particolare interesse è mostrato in figura II.1. Quando per una sostanza solida sia noto sperimentalmente l'andamento $c(t)$ del calore specifico in funzione della temperatura, la [II.14] consente di ricavare l'energia interna di quella sostanza

$$U = m\int c(t)\,dt + \text{costante} \qquad [II.15]$$

In molti casi pratici, specie se si è interessati a fenomeni che non comportano variazioni di temperatura molto grandi (ad esempio dell'ordine di cento gradi o meno), una descrizione sufficientemente approssimata la si ottiene considerando $c(t)$ come costante, indipendente cioè dalla temperatura.

La [II.15] diviene in questa ipotesi

$$U = m\,c\,t + \text{costante} \qquad [II.16]$$

$U = m\,c\,t + \text{costante}$

La [II.12] si può allora scrivere

$$Q - L = m\,c\,(t - t_A) \qquad [II.17]$$

Il problema del calore specifico dei corpi solidi verrà ripreso, a livello teorico, nel sesto capitolo.

Esempi

E.II.8. *Un disco omogeneo di ferro (raggio $R = 10$ cm; massa $M_1 = 1$ kg) inizialmente fermo, viene messo in rotazione da un motore che lo porta a girare con una frequenza ν di 6000 giri al minuto. Staccato il motore ed azionando un freno costituito da una ganascia di ferro di massa $M_2 = 0{,}3$ kg, esso viene portato nuovamente in quiete. Ammettendo che sia trascurabile il calore che il sistema dissipa verso l'ambiente, di quanto si alza la sua temperatura media?*

Applicazione del primo principio a un sistema costituito di materiale solido.

Nello stato iniziale il sistema (disco più freno) è fermo e alla temperatura ambiente; nello stato finale esso è nuovamente fermo, per cui la sua variazione di energia interna ΔU è legata solo a variazioni di temperatura Δt : $\Delta U = m\,c\,\Delta t$. Durante la trasformazione il sistema non scambia calore con l'ambiente ($Q = 0$), mentre riceve lavoro dal motore: tale lavoro L (negativo perché assorbito dal sistema) è pari in modulo all'energia cinetica $\frac{1}{2} I\omega^2$ che il disco ha quando esso ruota alla sua massima velocità. Dalla [II.16] si ha allora:

$$\Delta t = -\frac{L}{m\,c} = \frac{|L|}{m\,c} = \frac{1}{2}\frac{I\omega^2}{m\,c} = \frac{1}{2} I \frac{(2\pi\nu)^2}{m\,c}$$

con $I = \frac{1}{2} M_1 R^2$; $m = M_1 + M_2$. Per il ferro, il calore specifico molare (vedi fig. II.1) è circa $6 \frac{\text{cal}}{\text{mole °C}}$; che, tenuto conto del peso molecolare (56), equivale a $450 \frac{\text{Joule}}{\text{kg °C}} \simeq 0{,}09 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}}$. Essendo $I = \frac{1}{2} M_1 R^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ kg m^2; $\omega = 2\pi\nu = 6{,}28 \cdot 100$ sec^{-1}, si ha $\Delta t \simeq 3{,}3$°C.

Variazione di temperatura di un blocco di ferro.

E.II.9. *Calcolare di quanto aumenta la temperatura del blocco di ferro di cui all'esempio II.7.*

Dalla [II.16] si ha

$$\Delta U = m\, c\, \Delta t$$

e dunque

$$\Delta t = \frac{\Delta U}{m\, c}$$

Poiché nell'esempio in esame $\Delta U = 186{,}2$ Joule, (vedi es. II.7.), abbiamo

$$\Delta t = \frac{186{,}2 \text{ Joule}}{1 \text{ kg} \cdot c} = \frac{186{,}2 \text{ Joule}}{1 \text{ kg} \cdot \frac{450 \text{ Joule}}{\text{kg °C}}} \simeq 0{,}4 \text{ °C}$$

Temperatura di equilibrio di due corpi inizialmente a temperature diverse.

E.II.10. *Un corpo di massa m_1, calore specifico c_1 e temperatura $\bar{t}_1$ viene posto a contatto con un corpo di massa m_2, calore specifico c_2 e temperatura iniziale $\bar{t}_2$. Calcolare la temperatura finale t_F a cui si portano, all'equilibrio, i due corpi (supposti, nel loro complesso, isolati).*

L'energia interna del sistema (essendo una funzione additiva) è pari alla somma delle energie interne dei due corpi

$$U = U_1 + U_2 = m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 + \text{costante}.$$

D'altra parte, essendo il sistema complessivamente isolato, si ha $\Delta U = Q - L = 0$. Da cui

$$0 = \Delta U = m_1 c_1 (t_F - \bar{t}_1) + m_2 c_2 (t_F - \bar{t}_2)$$

Risolvendo rispetto a t_F:

$$t_F = \frac{m_1 c_1 \bar{t}_1 + m_2 c_2 \bar{t}_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

Vediamo in particolare che se la capacità termica di uno dei due corpi (ad esempio del corpo 2) è molto maggiore di quella dell'altro corpo ($m_2 c_2 >> m_1 c_1$) risulta

$$t = \frac{m_1 c_1 \bar{t}_1 + m_2 c_2 \bar{t}_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \simeq \frac{m_2 c_2 \bar{t}_2}{m_2 c_2} \simeq \bar{t}_2$$

La temperatura finale dei due corpi coincide praticamente, in questo caso, con la temperatura che inizialmente aveva il corpo a capacità termica più grande.

La quantità di calore di Q_1 ricevuta dal corpo 1 (se $\bar{t}_2 > \bar{t}_1$) è data da

$$Q_1 = U_1 = m_1 c_1 (t_F - \bar{t}_1) \simeq m_1 c_1 (\bar{t}_2 - \bar{t}_1)$$

Dunque il corpo 2, a causa della sua grande capacità termica, è capace di cedere la quantità di calore Q_1 senza che praticamente cambi la sua temperatura.

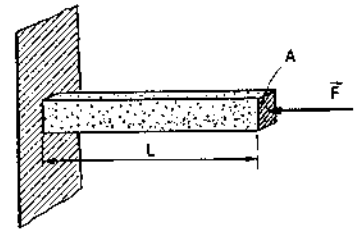
Sorgente isoterma di calore (o semplicemente «sorgente»).

In generale, per sorgente isoterma di calore si intende un sistema capace di cedere calore senza che la sua temperatura cambi. Ciò può accadere sia se il sistema ha una capacità termica molto grande (al limite, infinita) sia se si provvede a rifornire via via al sistema l'energia termica che viene da esso prelevata (ad esempio mediante una caldaia a fiamma).

L'esempio fatto indica anche le cautele che occorre avere quando si misura la temperatura di un corpo qualora la capacità termica del termometro non sia trascurabile rispetto a quella del corpo di cui si vuole misurare la temperatura.

Lavoro dovuto alla dilatazione termica.

E.II.11. In tutto il paragrafo II.3. abbiamo considerato il corpo completamente rigido (volume costante), e in questo caso il lavoro L era nullo. Se si prende in considerazione la dilatazione (termica), e se il sistema è sottoposto dall'esterno a una forza, il lavoro, a rigore, non è più nullo.

Ad esempio una sbarra di lunghezza L e sezione A, sottoposta a una compressione longitudinale ad opera di una forza F normale alla sua sezione, se subisce una dilatazione $d\varepsilon = \dfrac{dl}{l}$, compie un lavoro pari a $L = F\,dl = \sigma A\, l\, d\varepsilon = V\sigma\, d\varepsilon$ dove con σ si è indicato lo «sforzo» $\left(\sigma = \dfrac{F}{A}\right)$ e con V il volume della sbarretta.

E.II.12. Le considerazioni fatte nel par. II.3. per un corpo rigido valgono anche per un liquido incomprimibile pur di trascurare l'evaporazione e il lavoro di deformazione. Sulla trattazione termodinamica della evaporazione (e più in generale delle transizioni di fase) torneremo nel capitolo V. Qui notiamo solo che per un liquido la cui tensione superficiale τ non sia trascurabile, quando (a parità di volume) si varia la forma del liquido (e ciò facendo si varia di una quantità dS la sua superficie libera S) si compie un lavoro pari a $\tau\, dS$.

Lavoro dovuto alla tensione superficiale.

È questo un esempio di sistema termodinamico che compie (o subisce) lavoro reversibile non esprimibile in termini delle sue variazioni di volume, così come invece accadeva nell'esempio E.I.6. (e come sarà nella maggior parte degli esempi che faremo nel seguito). Va notato che per un gas il fenomeno della tensione superficiale è praticamente assente.

II.4. Applicazioni del primo principio ad un gas perfetto

II.4.1 *Definizione del gas perfetto*

Gas perfetto.

Consideriamo una certa quantità di un gas (ad esempio di elio), contenuta in un recipiente. Un suo stato di equilibrio è completamente specificato quando siano noti i parametri di stato pressione (P), volume (V), e temperatura (t), oltre alla massa m che, se il sistema è chiuso, resta costante anche quando il gas subisce una trasformazione.

Si riscontra sperimentalmente che questi parametri di stato non sono fra di loro indipendenti. La relazione che li lega (detta *equazione di stato*) risulta più compatta se si usa la scala termometrica cosiddetta Kelvin. Per definizione, la temperatura Kelvin T è legata alla temperatura centigrada t dalla relazione

Equazione di stato.

$$T = t + 273{,}16 \qquad \begin{array}{l} T \text{ in gradi Kelvin, K} \\ t \text{ in gradi centigradi, °C} \end{array} \qquad \text{[II.18]}$$

Gradi Kelvin.

Da qui in avanti, salvo avviso contrario, useremo la scala Kelvin. Usando questa scala termometrica, l'equazione di stato del gas – sperimentalmente ricavata – ha la semplice espressione

$$\frac{PV}{mT} = \text{costante} \tag{II.19}$$

Questa equazione descrive il comportamento della maggior parte dei gas a temperature prossime a quelle ambiente e a pressioni dell'ordine di quella atmosferica. Se la massa viene espressa in moli n ($n = \frac{m}{M}$, dove m è la massa espressa in grammi e M è il peso molecolare del gas) il valore della costante nella [II.19] è anzi la stessa per i vari gas

$$\boxed{\frac{PV}{nT} = R \quad \left(R = 8.314\,\frac{\text{Joule}}{\text{mole K}}\right)} \tag{II.20}$$

Osservazione:
Una mole di qualunque sostanza contiene un numero di molecole pari a
$\mathcal{N}_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$.
$\mathcal{N}_A$ è detto Numero di Avogadro.
$PV = nRT$

Costante dei gas

$R = 8{,}314 \frac{\text{Joule}}{\text{mole K}}$

$R = 82.057\ 10^{-3} \frac{\text{litri} \cdot \text{atm}}{\text{mole K}}$

$R \approx 2 \frac{\text{cal}}{\text{mole K}}$

Alcuni gas (idrogeno, elio, argon, azoto, ecc.) seguono questa legge con eccellente approssimazione entro ampi intervalli di pressione (fino a molte decine di atmosfere) ed anche a bassa temperatura (fino a duecento K o meno). Altri gas (ad esempio l'anidride carbonica, o l'etano) si avvicinano ad essa solo a temperatura elevata (ad esempio oltre 400 K) e pressione non superiore a qualche atmosfera.

Per definizione si chiama *gas perfetto* un gas che segua esattamente la [II.20].

Vedremo in un altro paragrafo che le condizioni microscopiche affinché un gas si comporti come un gas perfetto sono che:

Condizioni microscopiche affinché un gas si comporti come un gas perfetto.

a) Il volume complessivo delle sue molecole (*covolume*) sia molto piccolo rispetto al volume del recipiente che contiene il gas.
b) La forza di attrazione reciproca fra le molecole sia abbastanza piccola, cosicché la loro energia potenziale sia trascurabile rispetto all'energia cinetica.

Vedremo anche quali termini correttivi vadano inseriti nella [II.20] quando queste condizioni non sono soddisfatte. In ogni caso, si osserva che, al diminuire della pressione, il comportamento di un gas reale si avvicina a quello di un gas perfetto.

II.4.2 *Il piano di Clapeyron. Trasformazioni quasi statiche, lavoro e reversibilità*

Fissata la massa, lo stato di un gas perfetto è dunque specificato quando siano noti due dei parametri di stato P, V, T: il terzo può infatti essere ricavato usando la [II.20].

Una volta scelta la coppia di parametri che si ritenga più comodo usare, uno stato del gas può essere rappresentato da un punto su un piano di riferimento che abbia come assi coordinati due assi rappresentativi dei parametri scelti.

Piano di Clapeyron.

Se gli assi delle ascisse e delle ordinate rappresentano rispettivamente il volume V e la pressione P, il piano di riferimento viene detto *piano di Clapeyron*.

Ad esempio, lo stato di volume V_0 e pressione P_0 è rappresentato dal punto S_0; quello di volume V_1 e pressione P_1 dal punto S_1.

Se il sistema si porta dallo stato S_0 allo stato S_1 esso subisce una trasformazione. Se tale trasformazione è quasi statica, allora anche mentre essa ha luogo i parametri di stato sono sempre definiti: la trasformazione può essere allora rappresentata da una *linea continua*. I punti di questa linea rappresentano gli stati attraverso cui il sistema passa mentre si trasforma dallo stato S_0 allo stato S_1.

Evidentemente, per andare dallo stato S_0 allo stato S_1 il sistema può seguire diverse trasformazioni. Nella figura, ne abbiamo indicate tre. La trasformazione I porta il sistema dallo stato S_0 allo stato A attraverso una linea orizzontale durante la quale cioè la pressione resta costante (una tale trasformazione si chiama *isobara*); e poi dallo stato A allo stato S_1 attraverso una linea verticale, durante la quale il volume non cambia (trasformazione *isovolumica* o *isocora*).

Trasformazione isobara.

Trasformazione isocora.

La trasformazione II è un segmento di retta: sia P che V crescono contemporaneamente e linearmente fra S_0 e S_1. La trasformazione III porta il sistema da S_0 a B attraverso un tratto di curva in cui la temperatura resta costante (*isoterma*: notare che la [II.20] ci dice che una isoterma è rappresentata da un ramo di iperbole equilatera); e poi da B ad S_1 attraverso una isobara.

Trasformazione isoterma.

Come si vede, in generale durante una trasformazione il volume del gas cambia.

Supponiamo che nessuna forza dissipativa agisca sul gas. Ciononostante, il sistema scambia lavoro con l'ambiente.

Abbiamo visto che tale lavoro ha l'espressione $\delta L = P\,dV$, dove P è la pressione che dall'esterno agisce sul gas; pressione che se la trasformazione è quasi statica (e solo in tal caso), coincide con la pressione P del gas esprimibile mediante la [II.20].

Esempio

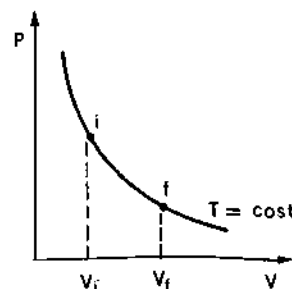
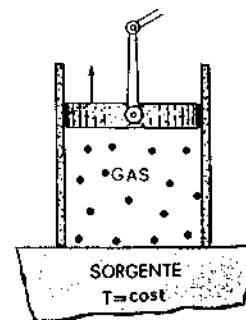
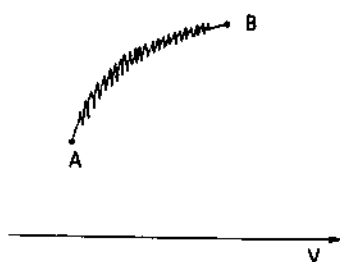
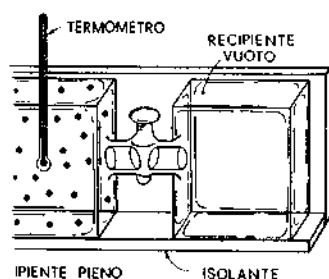
E.II.13. *8 grammi di elio, alla temperatura di 27°C, occupano inizialmente un volume V_i = 5 litri. Mantenendo costante la temperatura con opportuno rifornimento di calore, viene fatta compiere al sistema una espansione quasi statica fino a portarlo a un volume V_f = 10 litri. Quale lavoro compie il sistema?*

Essendo il lavoro elementare dato da $P\,dV$, il lavoro complessivo L è dato da $L = \int_i^f dL = \int_i^f P\,dV$ avendo indicato con i e f rispettivamente lo stato iniziale e quello finale. Dalla [II.20] si ha $P = \frac{n R T}{V}$. Dunque $L = \int_i^f P\,dV = \int_i^f \frac{n R T}{V}\,dV$.

Essendo T costante, si ha $L = n R T \int_i^f \frac{dV}{V} = n R T \log \frac{V_f}{V_i}$.

Numericamente, $L = 2 \text{ moli} \cdot 8{,}314 \frac{\text{Joule}}{\text{mole K}} \cdot 300 \text{ K} \cdot \log 2 = 3458$ Joule.

Restando al caso di trasformazioni quasi statiche (e mantenendo l'ipotesi di assenza di forze di attrito, che ammetteremo sempre nel seguito salvo avviso contrario) l'equazione [II.11] che esprime il primo principio per un tratto elementare della trasformazione può essere scritta come:

$$\delta Q = P\,dV + dU \qquad [II.21]$$

.e trasformazioni quasi stati-.he senza attrito sono reversi-›ili.

Se la trasformazione elementare viene compiuta in senso inverso, nella [II.21] sia dV che dU cambiano semplicemente segno; e per conseguenza, anche δQ cambia segno.

Integrando la [II.21] dallo stato iniziale a quello finale – o viceversa – si ottiene che anche per la trasformazione finita invertire il senso di percorrenza vuol dire semplicemente cambiare i segni di Q, L e ΔU.

Dunque *in assenza di attriti una trasformazione quasi statica è reversibile.*

Questa conclusione vale in generale, e non limitatamente al caso che il sistema sia un gas perfetto. Ciò dimostra una osservazione che avevamo anticipato nel precedente capitolo.

Notiamo infine che una trasformazione che non sia quasi statica non può essere rappresentata sul piano di Clapeyron, poiché in generale – mentre essa avviene – i parametri di stato hanno valore diverso da punto a punto del sistema. Tuttavia è d'uso indicare una trasformazione *non* quasi statica – e non reversibile – con il segno mostrato nella figura a fianco.

II.4.3 *L'energia interna di un gas perfetto*

:nergia interna di un gas per-:tto.

Attraverso l'esperimento che di seguito descriviamo, Joule dimostrò che l'energia interna di un gas perfetto dipende solo dalla sua temperatura.

Consideriamo due ampolle di vetro, collegate da un tubo in cui è inserito un rubinetto chiuso. Una delle due ampolle sia piena di un gas, e l'altra sia stata evacuata mediante una pompa. Disponiamo un termometro a misurare la temperatura del gas; il sistema sia inoltre isolato termicamente.

:spansione «libera» di un gas.

Aprendo il rubinetto, cosicché il gas compia una espansione spontanea (espansione libera) andando a riempire entrambe le ampolle, si riscontra che ciò provoca un lieve abbassamento di temperatura del gas stesso.

Si può verificare tuttavia che tale abbassamento diviene sempre più piccolo via via che la pressione P del gas diminuisce (cioè via via che il gas si avvicina alle condizioni di gas perfetto): e si estrapola così che nel caso ideale di gas perfetto ($P \Rightarrow 0$) la temperatura sarebbe rimasta invariata.

La trasformazione compiuta dal gas è una trasformazione spontanea: il sistema non scambia infatti calore Q con l'ambiente (grazie all'isolamento termico) né lavoro L (essendo il recipiente rigido, le forze agenti sul gas non spostano il loro punto di applicazione). Essendo sia Q che L nulli, la [II.10] ci dice che

$$\Delta U = 0 \qquad \text{[II.22]}$$

cioè che l'energia interna resta invariata nella trasformazione.

A priori, l'energia interna potrebbe dipendere, oltre che da T, anche da un altro parametro di stato, ad esempio dal volume V (anche la pressione P può infatti, in ogni caso, essere espressa in funzione di T e di V tramite la [II.20]).

Ma se così fosse, quando T resta fisso e V varia (come nell'esperimento testé descritto) U dovrebbe variare. Il fatto invece che in corrispondenza di $\Delta U = 0$ sia $\Delta V \neq 0$ e $\Delta T = 0$ ci fa per contro concludere che U non dipende da V

-'energia interna di un gas ›erfetto dipende solo dalla emperatura $U = U(T)$.

$$\boxed{U = U(T)} \qquad \text{[II.23]}$$

Anche per un gas perfetto (come già per un solido) la [II.10] può essere scritta come

$$Q - L = U(T) - U(T_A) \quad [II.24]$$

La [II.21], per trasformazioni quasi statiche, può a sua volta essere scritta come

$$\delta Q = P\,dV + dU(T) \quad [II.25]$$

La [II.24] ci dice in particolare che, durante una trasformazione isoterma di un gas perfetto, $Q - L = 0$; se un gas perfetto compie una espansione isoterma, esso compie lavoro L pari al calore Q assorbito (e viceversa durante una compressione).

In una trasformazione isoterma di un gas perfetto $Q = L$

II.4.4 *Calori specifici di un gas perfetto*

Benché l'energia interna di un gas perfetto dipenda solo dalla temperatura, la [II.24] (e, limitatamente a trasformazioni quasi statiche, la [II.25]) ci mostra che il calore che il gas scambia *non* dipende solo dallo stato iniziale e da quello finale; ma anche dalla particolare trasformazione che, per andare da quello stato iniziale a quello stato finale (e in particolare da quella temperatura iniziale a quella temperatura finale), il sistema compie. Infatti, benché la variazione dell'energia interna dipenda solo dallo stato iniziale e da quello finale, il lavoro dipende – come abbiamo visto – dalla trasformazione.

Calori specifici di un gas perfetto.

In particolare, *non si può dunque parlare di calore specifico se non si indica anche a quale particolare tipo di trasformazione ci si riferisce.*

Il calore specifico dipende dalla trasformazione.

Limitiamoci alle trasformazioni quasi statiche. Dalla [II.25] ricaviamo per il calore specifico l'espressione (esprimeremo la massa in *moli*, cosicché qui e nel seguito tratteremo di *calori molari*):

$$C = \frac{1}{n}\frac{\delta Q}{dT} = \frac{1}{n}\frac{1}{dT}(P\,dV + dU) \quad [II.26]$$

Se consideriamo una trasformazione isovolumica ($dV = 0$) otteniamo il *calore molare a volume costante* C_V, che dalla [II.26] risulta essere

C_V
Calore molare a volume costante.

$$\boxed{\begin{gathered} C_V = \frac{1}{n}\frac{\delta Q}{dT} = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} \\ dU = n\,C_V\,dT \end{gathered}} \quad [II.27]$$

In un ampio intervallo di temperatura, sperimentalmente si osserva che C_V può essere considerato costante.

Nel caso riportato in figura, il gas è biatomico (H_2), e nell'intervallo di temperatura compreso fra 250 e 700 K il calore molare a volume costante assume un valore praticamente costante pari a $\frac{5}{2}R$. Per gas monoatomici, si ha invece $C_V = \frac{3}{2}R$; e per gas poliatomici, $C_V \simeq 3\,R$ (vedi tabella II.1).

Integrando la [II.27] si ha

$$U = n\, C_V\, T + \text{costante} \qquad \text{[II.28]}$$

per cui la [II.24] e la [II.25] possono essere scritte rispettivamente come

$$Q - L = n\, C_V (T - T_A) \qquad \text{[II.30]}$$

$$\delta Q = P\, dV + n\, C_V\, dT \qquad \text{[II.31]}$$

Calore molare a pressione costante.

Se nella [II.26] si pone invece P = costante, si ottiene il *calore molare a pressione costante* C_P. Usando la [II.27], la [II.26] diviene

$$C_P = \frac{1}{n}\frac{1}{dT}(P\, dV + n\, C_V\, dT) = \frac{P\, dV}{n\, d\, T} + C_V \qquad \text{[II.32]}$$

Ma dalla [II.19] si ha $P\,V = n\,R\,T$; da cui differenziando $P\,dV + V\,dP = n\,R\,dT$; e per una trasformazione isobara ($dP = 0$), $P\,dV = n\,R\,dT$. Sostituendo nella [II.32]

$$\boxed{C_P = R + C_V} \qquad \text{[II.33]}$$

che insieme ai già citati valori per C_V ci consente di concludere:

$$C_P = \frac{5}{2} R \text{ (gas monoatomici)};\quad C_P = \frac{7}{2} R \text{ (gas biatomici)}; \qquad \text{[II.34]}$$
$$C_P = 4\, R \text{ (gas poliatomici)}\,.$$

II.4.5 *Adiabatica reversibile di un gas perfetto*

Adiabatica reversibile di un gas perfetto.

Abbiamo già visto come possono essere rappresentate, sul piano di Clapeyron, alcune trasformazioni quasi statiche notevoli dei gas perfetti.

- Una *isobara* (P = costante) è rappresentata da un segmento orizzontale.
- Una *isovolumica* (V = costante) è rappresentata da un segmento verticale.
- Una *isoterma* (T = costante) è rappresentata da un ramo di iperbole equilatera $P\,V = n\,R\,T$ = costante.

Un'altra trasformazione quasi statica notevole è l'*adiabatica* reversibile. Per definizione, una adiabatica è caratterizzata da $Q = 0$. Trattandosi per ipotesi di trasformazione quasi-statica, possiamo usare la [II.31] ponendo in essa $\delta Q = 0$

$$0 = P\, dV + n\, C_V\, dT \qquad \text{[II.35]}$$

Eliminando P mediante la [II.20]:

$$n\,R\,T\frac{dV}{V} + n\, C_V\, dT = 0$$

Separando le variabili:

$$R\frac{dV}{V} = -\, C_V \frac{dT}{T}$$

Dividendo per C_V, usando la [II.33] ($C_P - C_V = R$), e integrando, si ha

$$\frac{C_P - C_V}{C_V}\int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dT}{T} + \text{costante}$$

cioè

$$(\gamma - 1) \log V + \log T = \text{costante} \quad \left(\text{avendo posto } \frac{C_P}{C_V} = \gamma\right)$$

$$\log V^{\gamma-1} + \log T = \text{costante} \qquad [II.36]$$

$$\log T V^{\gamma-1} = \text{costante}$$

$$T V^{\gamma-1} = \text{costante} = T_A V_A^{\gamma-1}$$

Equazioni dell'adiabatica reversibile di un gas perfetto.
$T V^{\gamma-1}$ = costante
$P V^{\gamma}$ = costante
$T P^{\frac{1}{\gamma}-1}$ = costante
$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$

avendo chiamato T_A e V_A la temperatura e il volume che il gas aveva nello stato iniziale. Usando la II.20], può essere eliminata, volendo, o la T o la V nella [II.36] introducendo la pressione P.

Si ottengono così le tre formule equivalenti della equazione della adiabatica reversibile di un gas perfetto:

$$T V^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}; \; P V^{\gamma} = P_A V_A^{\gamma}; \; T P^{\frac{1}{\gamma}-1} = T_A P_A^{\frac{1}{\gamma}-1} \qquad [II.37]$$

con P_A, V_A e P_A pressione, volume e temperatura dello stato iniziale.

Notiamo che dalla [II.34] e [II.28] risulta

$$\gamma = \frac{5}{3} \text{ (gas monoatomico)}; \quad \gamma = \frac{7}{5} \text{ (gas biatomico)}.$$

Le trasformazioni di un gas perfetto finora considerate (isoterma: $P V$ = cost.; adiabatica: $P V^{\gamma}$ = cost.; isocora: V = cost.; isobara: P = cost.) sono casi particolari di una famiglia di trasformazioni descrivibili, nel piano di Clapeyron, da una equazione del tipo:

$$P V^K = \text{cost.}; \text{ con } K = \text{costante reale}$$

Per esempio, se $K = 1$ si ha l'isoterma; se $K = 0$ si ha l'isobara; se $K = \gamma$ si ha l'adiabatica, ecc.

Queste trasformazioni si dicono *trasformazioni politropiche*. Ogni trasformazione politropica è caratterizzata dal suo calore molare

Trasformazioni politropiche di gas perfetti.

$$C_K = \frac{(\delta Q)_K}{dT} \quad \text{corrispondente a } P V^K = \text{cost}.$$

Si ha:

$$C_K = \frac{(\delta Q)_K}{dT} = \frac{(dU + P\,dV)_K}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{(P\,dV)_K}{dT} = C_V + \frac{(P\,dV)_K}{dT}$$

(si è fatto uso della relazione $dU = C_V\,dT$ valida indipendentemente dalla trasformazione).

La quantità $\frac{(P\,dV)_K}{dT}$ può essere calcolata tenendo conto che deve essere $PV = RT$ (poiché stiamo considerando una mole di gas perfetto) e inoltre $PV^K = \text{cost.}$ (poiché ci stiamo muovendo lungo la politropica in esame).

$$\begin{cases} \text{Differenziando } PV = RT \quad \text{si ha } P\,dV + V\,dP = R\,dT \\ \text{Differenziando } PV^K = \text{cost si ha } K\,P\,dV + V\,dP = 0\,. \end{cases}$$

Eliminando $V\,dP$ da queste due relazioni si ha:

$$-K\,P\,dV = R\,dT - P\,dV$$

da cui

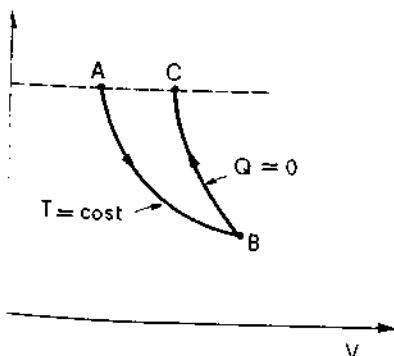
$$P\,dV = \frac{R\,dT}{1-K}$$

che inserita nella espressione per C_K fornisce:

$$C_K = C_V + \frac{R}{1-K}$$

Nel caso di isobara ($K = 0$), si ottiene la [II.33] ($C_P = C_V + R$). Nel caso di isoterma ($K = 1$), si ottiene $C_T = \infty$ (infatti comunque grande sia δQ fornito al gas si ha sempre $dT = 0$). Nel caso di adiabatica ($K = C_P/C_V$), si ottiene $C_K = 0$.

Esempi

Trasformazione isoterma e trasformazione adiabatica quasi statiche: calcolo del lavoro.

Osservazione:

Essendo $\gamma > 1$, nel piano di Clapeyron la curva adiabatica ha pendenza maggiore dell'isoterma.

E.II.14. *Quattro grammi di elio, alla temperatura $T_A = 27°C$, occupano inizialmente il volume $V_A = 1$ litro. Al gas viene fatta compiere una trasformazione quasi statica isoterma che ne raddoppia il volume; e poi una compressione adiabatica quasi statica che lo riporta alla pressione iniziale.*

a) determinare lo stato finale;

b) calcolare il lavoro e il calore scambiato dal sistema durante la trasformazione.

a) Si tratta di una mole di gas monoatomico, di cui è noto lo stato iniziale V_A, T_A e $P_A = \frac{R\,T_A}{V_A}$. Nello stato B si ha $T_B = T_A$, $V_B = 2\,V_A$, $P_B = \frac{P_A}{2}$. Nello stato C si ha $P_C = P_A = 2\,P_B$; e dalla [II.37] $V_C = V_B\left(\frac{P_B}{P_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 2\,V_A\left(\frac{1}{2}\right)^{3/5}$. Usando l'equazione di stato [II.20] si ricava inoltre $T_C = 2\,T_A\left(\frac{1}{2}\right)^{3/5}$.

b) Durante l'isoterma si ha $L_I = R\,T_A \log\frac{V_B}{V_A} = R\,T_A \log 2$. Inoltre, essendo $\Delta U = 0$ (l'energia interna non varia se la temperatura è costante; vedi la [II.29]), si ha $Q_I = L_I$. Lungo l'adiabatica si ha $Q_{II} = 0$, e $L_{II} = C_V(T_B - T_C) = C_V\,T_A\left(1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3/5}\right)$.

In complesso $L = L_I + L_{II} = T_A\,R\left(\log 2 + \frac{3}{2}\cdot\left(1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3/5}\right)\right)$ (avendo usato $C_V = \frac{3}{2}R$); $Q = Q_I = R\,T_A \log 2$.

E.II.15. *Una mole di idrogeno si trova inizialmente alla temperatura $T_A = 300$ K, ed è contenuta dentro un cilindro con pistone di volume iniziale $V_A = 10$ litri. Ponendo un opportuno peso (costante) sul pistone, si fa sì che il gas si comprima adiabaticamente fino a raggiungere un volume $V_B = \frac{V_A}{2}$.*

Quanto valgono pressione e temperatura finale (P_B e T_B) del gas (supponendo che tutto il lavoro sia assorbito dal gas stesso)?

Trasformazione adiabatica *non* quasi statica.

La trasformazione è adiabatica per ipotesi (recipiente isolante). Tuttavia essa *non* è quasi statica. Infatti, la pressione esercitata dall'esterno sul gas è *costante* pari a P_B; mentre se la trasformazione fosse quasi statica essa dovrebbe variare secondo la [II.37].

Lo stato iniziale è completamente noto: T_A, V_A e $P_A = \frac{R\,T_A}{V_A}$.

Per lo stato finale, conosciamo solo $V_B = \frac{V_A}{2}$. Ma il primo principio (con $Q = 0$) ci dice

$$-L = C_V(T_B - T_A) \qquad \text{(a)}$$

ed L (essendo costante la pressione esercitata dall'esterno durante la trasformazione) è dato da $L = P_B(V_B - V_A) = P_B\left(\frac{V_A}{2} - V_A\right) = -P_B\frac{V_A}{2}$.

Sostituendo in (a)

$$P_B\frac{V_A}{2} = C_V(T_B - T_A) \qquad \text{(b)}$$

Ma l'equazione di stato [II.20] ci dice anche

$$P_B\,V_B = P_B\frac{V_A}{2} = R\,T_B\,. \qquad \text{(c)}$$

Per confronto fra la (b) e la (c) troviamo

$$R\,T_B = C_V(T_B - T_A)$$

e dunque

$$T_B = T_A\frac{C_V}{C_V - R} = \frac{5}{3}\,T_A$$

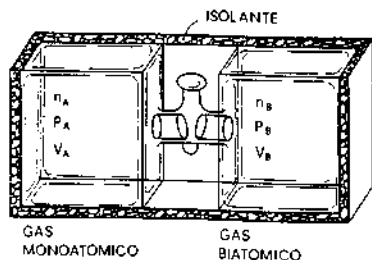
(abbiamo usato $C_V = \frac{5}{2}R$). Finalmente:

$$P_B = \frac{R\,T_B}{V_B} = \frac{10}{3}R\frac{T_A}{V_A} = \frac{10}{3}P_A\,.$$

E.II.16. *Due recipienti rigidi di volume rispettivamente V_A e V_B, termicamente isolati, contengono rispettivamente n_A moli di gas monoatomico a pressione P_A e n_B moli di gas biatomico a pressione P_B. I due recipienti sono inizialmente separati da un rubinetto chiuso, la cui apertura causa il mescolamento dei due gas. Calcolare la pressione e la temperatura finali, dopo che si è raggiunto l'equilibrio, nell'ipotesi che i due gas si comportino come gas perfetti.*

Mescolamento di due gas.

La trasformazione, spontanea, equivale a due espansioni libere che portano, alla fine, ad un mescolamento dei gas nel volume $V_A + V_B$.

$$\left.\begin{array}{l} Q = 0 \\ L = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \Delta U = 0$$

Il primo principio della termodinamica implica $\Delta U = 0$ e, per l'additività dell'energia interna,

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = 0$$

cioè:

$$n_A C_V^{(A)} (T_F - T_A) + n_B C_V^{(B)} (T_F - T_B) = 0$$

dove T_F è la temperatura finale, T_A e T_B le temperature iniziali di due gas. Si ha inoltre:

$$C_V^{(A)} = \frac{3}{2} R \text{ (monoatomico)}$$

$$C_V^{(B)} = \frac{5}{2} R \text{ (biatomico)} .$$

Risolvendo rispetto a T_F si ha:

$$T_F = \frac{3 n_A T_A + 5 n_B T_B}{3 n_A + 5 n_A} \text{ con } T_A = \frac{P_A V_A}{n_A R}; \; T_B = \frac{P_B V_B}{n_B R} .$$

La pressione finale P_F si calcola tenendo conto che ciascun gas, occupando il volume $V_A + V_B$, coercita sulle pareti una pressione parziale uguale a quella che eserciterebbe se l'altro gas non fosse presente (i gas perfetti non interagiscono apprezzabilmente fra di loro).

Per queste pressioni parziali si puo scrivere:

$$\text{gas } A: \; P_F^{(A)} (V_A + V_B) = n_A R T_F$$

$$\text{gas } B: \; P_F^{(B)} (V_A + V_B) = n_B R T_F$$

Legge di Dalton:
In una miscela di due gas (perfetti), la pressione è la somma delle pressioni che ciascun gas eserciterebbe se occupasse da solo tutto il volume a disposizione.

La pressione finale P_F, somma delle pressioni parziali $P_F^{(A)}$ e $P_F^{(B)}$, soddisfa la relazione ottenuta sommando le relazioni relative ai due gas:

$$(P_F^{(A)} + P_F^{(B)}) (V_A + V_B) = (n_A + n_B) R T_F$$

$$P_F = \frac{(n_A + n_B) R T_F}{V_A + V_B}$$

Equazione barometrica.

E.II.17. *Nell'ipotesi che l'aria si comporti come un gas perfetto di peso molecolare medio M, calcolare l'andamento della pressione atmosferica P con l'altezza dal suolo. Si assuma che la temperatura T dell'atmosfera e l'accelerazione di gravità g siano costanti nel tratto di quota considerato.*

La legge di Stevino, applicata a un tratto di colonna d'aria di altezza elementare dz, dà:

$$dP = -\rho g \, dz \; (\rho = \frac{m}{V} = \text{densità dell'aria}) .$$

Dall'equazione di stato $P V = \frac{m}{M} R T$, ricaviamo

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P M}{R T}$$

per cui l'equazione di Stevino diviene

$$dP = -\frac{P M}{R T} g\, dz \rightarrow \frac{dP}{P} = -\left(\frac{g M}{R T}\right) dz$$

Integrando: $\ln P = -\left(\frac{g M}{R T}\right) z + c$; da cui

$$P = P_0\, e^{-\left(\frac{g M}{R T}\right) z}$$

essendo P_0 la pressione alla quota $z = 0$.

II.5. I gas reali

Abbiamo già accennato che non sempre le sostanze allo stato gassoso seguono con sufficiente approssimazione l'equazione di stato dei gas perfetti $P V = n R T$.

I fatti sperimentali possono essere sintetizzati come segue.

Supponiamo di compiere delle trasformazioni isoterme quasi-statiche avendo a disposizione sorgenti a varie temperature T.

Si trova che, per ogni sostanza gassosa, esiste un particolare valore della temperatura (*temperatura critica* T_c), tale che, per trasformazioni isoterme a temperature $T > T_c$, il comportamento della sostanza allo stato gassoso è ben descritto dall'equazione di stato $P V = n R T$, con lievi deviazioni quando T si avvicina a T_c.

Per temperature inferiori alla temperatura critica ($T < T_c$), il comportamento è sostanzialmente diverso. Supponiamo di operare una compressione isoterma e di misurare con un manometro M la pressione che compete ai vari stati di equilibrio che si realizzano nella trasformazione quasi-statica a mano a mano che il volume V si riduce.

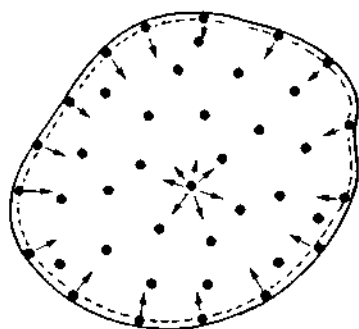
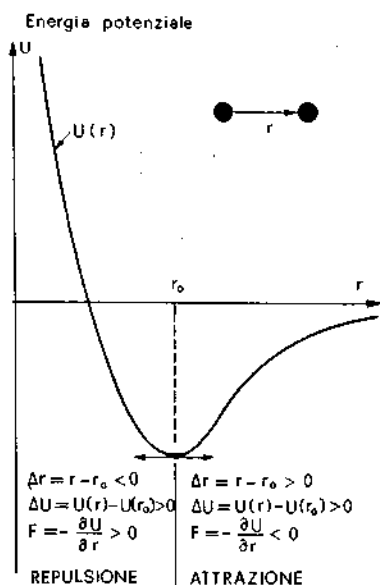
Trasformazioni isoterme di un gas reale.

Per volumi grandi (e pressioni piccole), alla riduzione di volume si accompagna un aumento di pressione con relazione non molto diversa da $P \cdot V =$ costante (tratto $A B$ della curva), come per i gas perfetti.

Arrivati allo stato B, per successiva compressione, comincia il fenomeno della condensazione sulle pareti del recipiente. Si realizza cioè un cambiamento di stato fisico a causa del quale porzioni crescenti di sostanza passano dallo stato gassoso allo stato liquido. Durante questa fase della trasformazione isoterma si osservano tre fenomeni correlati (tratto $B E$ del grafico):

- coesistono fase liquida e fase gassosa;
- la pressione non varia, mentre il volume si riduce sostanzialmente (da V_g a V_l). A tale pressione si dà il nome di *pressione o tensione di vapore saturo* (a quella temperatura);
- occorre sottrarre calore per mantenere la temperatura costante (*calore latente*) via via che la condensazione procede.

Al punto E della trasformazione, la sostanza è tutta allo stato liquido. Per realizzare anche piccole diminuzioni di volume occorre ora applicare grandi valori della pressione. Per questo la curva della isoterma tende ad avvicinarsi a un andamento verticale. Questo andamento, che nel diagramma $P V$ appare come un asintoto verticale a $V = b$, denuncia una

Temperatura, pressione e volume critici.

Equazione di Van der Waals.

sostanziale impenetrabilità della materia: il volume complessivo è divenuto pari alla somma del volume proprio delle molecole della sostanza, sotto il quale comunque non si può scendere (*covolume*).

Per temperature al di sotto della temperatura critica, le varie isoterme si distinguono per valori diversi della tensione di vapore saturo e per diverse larghezze dei gradini di coesistenza di fase liquida e gassosa. Alla temperatura critica, il gradino si riduce ad un punto, *punto critico*, in cui l'isoterma critica ha un punto di flesso a tangente orizzontale. Al di sopra dell'isoterma critica nel piano PV, è possibile soltanto lo stato gassoso. I valori T_c, P_c e V_c dei parametri di stato in corrispondenza del punto di flesso sono detti rispettivamente temperatura, pressione e volumi critici.

A temperatura molto maggiore della temperatura critica e, ad ogni temperatura, per volumi molto maggiori del volume critico, l'equazione di stato dei gas perfetti $PV = nRT$ descrive abbastanza bene il comportamento delle sostanze pure. In effetti, quei gas che a temperatura ambiente si comportano come gas perfetti sono caratterizzati dalla circostanza di avere temperature critiche molto minori della temperatura ambiente. Le costanti critiche per alcuni gas sono riportate nella tabella II.2.

Ponendoci in un'ottica microscopica, diremo che due molecole di una sostanza interagiscono con una forza che può essere considerata centrale e conservativa. Tale forza trae origine da effetti elettromagnetici dipolari e da effetti quantistici che coinvolgono elettroni e nuclei degli atomi.

L'interazione intermolecolare può essere descritta empiricamente da una funzione energia potenziale del tipo di quella rappresentata in figura.

Il minimo della funzione $U(r)$ corrisponde ad una distanza r_0 (qualche Å, essendo 1 Å = 10^{-10} m) per cui la forza è nulla. Per $r > r_0$ si ha una forza attrattiva (per esempio responsabile dei fenomeni di attrito o della considerevole forza di adesione che si manifesta tra due superfici molto levigate di due pezzi dello stesso materiale messi a contatto). Per $r < r_0$ si ha una forza fortemente repulsiva corrispondente al tratto quasi verticale della funzione $U(r)$ (impenetrabilità dei corpi).

Quando si considera una sostanza allo stato di gas o vapore le distanze medie tra molecole (che si muovono disordinatamente con energia cinetica molto maggiore di $|U(r_0)|$) sono molto maggiori della distanza di equilibrio r_0 e quindi predominano forze che sono, se pur blandamente, attrattive. L'effetto di tali forze è mediamente nullo sulle molecole interne (circondate in modo mediamente uniforme da molecole che le attraggono), mentre si manifesta sulle molecole dello strato esterno come una forza diretta verso l'interno e riguardante tutta la superficie di contorno. Questo effetto equivale ad una specie di pressione aggiuntiva rispetto alla pressione esercitata dalle pareti del recipiente che contiene il gas.

È chiaro che l'effetto di questa pressione aggiuntiva sarà tanto maggiore quanto maggiore è il numero di molecole per unità di volume che attraggono dall'interno, e quanto maggiore è il numero di molecole per unità di volume che sono in zona superficiale e sono attratte verso l'interno; in definitiva ci aspettiamo che la pressione aggiuntiva sia proporzionale a $\frac{1}{V^2}$.

Una relazione empirica che funziona da *equazione di stato nel caso di gas reali è l'equazione di Van der Waals*, che, *per una mole*, si scrive

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \qquad [II.38]$$

dove a e b sono due parametri caratteristici del gas in esame, V è il volume del recipiente che contiene il gas, P è la pressione e T la temperatura in gradi Kelvin.

Rispetto all'equazione di stato dei gas perfetti $PV = RT$ (che descrive bene il comportamento dei gas molto al di sopra dell'isoterma critica), il fattore di pressione diventa $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)$, includendo il termine aggiuntivo che tiene conto delle forze attrattive intermolecolari. Il fattore di volume diventa $(V - b)$, per tener conto che ogni molecola ha a disposizione il volume V del recipiente meno il covolume occupato dalle altre molecole.

L'equazione di Van der Waals, disegnata sul piano PV per vari valori della temperatura (isoterma di V.d.W.), ha l'aspetto mostrato in figura. Si evidenzia un andamento che presenta un massimo ed un minimo nella zona in cui sperimentalmente si riscontra un tratto isobaro. In realtà, procedendo con qualche cautela, si trova quanto segue.

Durante il tratto isobaro il gas sta subendo il processo di liquefazione. A partire da V_B, se si compie senza scosse e lentamente la compressione in condizioni di particolare pulizia, il gas può seguire per qualche tempo per un breve tratto (freccetta in grassetto) la curva di Van der Waals, restando allo stato gassoso in una condizione metastabile detta di *vapore soprassaturo*. Analogamente, espandendosi a partire dallo stato V_A esso può seguire la curva di Van der Waals restando liquido in condizioni metastabili (*liquido surriscaldato*).

Si può dimostrare – ma noi non lo faremo – che le aree dei due settori di curva indicati in figura con (a) e con (b) sono fra di loro uguali. A causa di questa proprietà l'equazione di V.d.W. può dare un'indicazione anche sul tratto di isobara sperimentale (zona B della figura): basta tracciare un tratto orizzontale che renda uguali le aree tratteggiate. L'accordo dell'equazione di V.d.W. con i dati sperimentali è soddisfacente sulla zona A della figura. Anche l'accordo nella zona D è buono, anche se poco significativo (liquido praticamente incompressibile, isoterma quasi verticale).

Le costanti a e b che compaiono nell'equazione di V.d.W. sono legate ai parametri critici dalle semplici relazioni:

$$a = 3\, V_c^2 P_c\,; \;\; b = V_c/3\,. \qquad [II.39]$$

Energia interna di un gas di Van der Waals.

Anticipiamo qui – anche se la relativa dimostrazione è rimandata ad un altro capitolo – il fatto che l'energia interna di un gas che obbedisca alla [II.38] *non* dipende solo dalla temperatura, ma anche dal volume V.

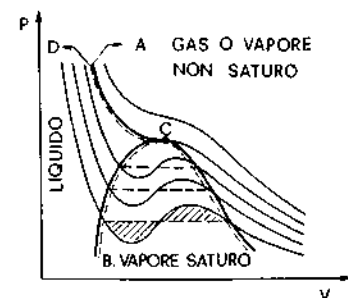
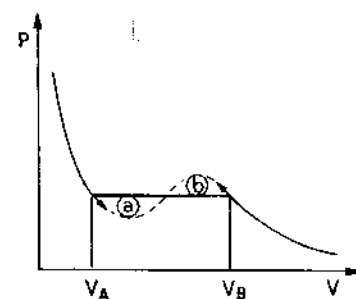
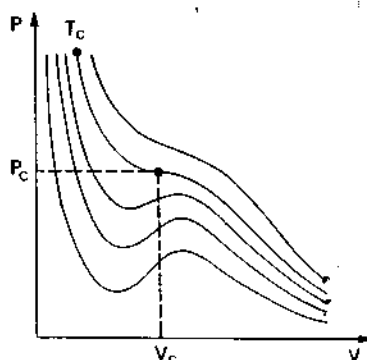
Più precisamente, per un gas di Van der Waals l'energia interna (riferita ad una mole) può essere scritta come

$$U(V, T) = C_V T - \frac{a}{V} \qquad [II.40]$$

Per una trasformazione quasi statica elementare, il primo principio della temodinamica può dunque essere scritto come

$$\delta Q = \delta L + dU \qquad [II.41]$$

con

$$\begin{cases} dU = C_V\, dT + \dfrac{a}{V^2}\, dV \\ \delta L = P\, dV \;\; \left(\text{con } P = \dfrac{RT}{V-b} - \dfrac{a}{V^2}\right) \end{cases} \qquad [II.42]$$

Sostituendo le [II.42] nella [II.41] si trova

$$\delta Q = C_V dT + \frac{R\,T}{V-b}\,dV \qquad \text{[II.43]}$$

Adiabatica quasi statica di un gas di Van der Waals.

In particolare, ponendo nella [II.43] $\delta Q = 0$, si può trovare l'equazione della adiabatica quasi statica di un gas di Van der Waals. Con procedura identica a quella usata nel par. II.4.5. per il gas perfetto, si trova

$$T\,(V-b)^{\frac{R}{C_V}} = \text{costante} \qquad \text{[II.44]}$$

Termometro a gas.

Va notato che alcuni gas – e in particolare l'elio – continuano a comportarsi come gas perfetti fino a temperature molto basse. Usando un termometro a gas (cioè un termometro basato sulla dilatazione di un gas a pressione costante; ovvero basato sulla misura della pressione del gas a volume costante) è possibile estendere la definizione operativa di temperatura a intervalli molto più ampi di quelli accessibili al termometro a mercurio. A temperature ancora più basse, è necessario fare ricorso a una definizione diversa (la *scala termodinamica assoluta*, che introdurremo più avanti): una scala che, come vedremo, coincide con quella del gas perfetto a tutte quelle temperature in cui esiste qualche gas reale che si comporta praticamente come gas perfetto.

Esempi

Le costanti di Van der Waals e i parametri critici.

E.II.18. *Ricavare le [II.39].*

Ponendo nell'equazione di Van der Waals $T = \bar{T} =$ cost., ed esplicitando rispetto a P, si ottiene

$$P = \frac{R\,\bar{T}}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

che rappresenta l'espressione di una isoterma $P = P(V)$ nel piano di Clapeyron. Intersecando con una retta $P = \bar{P} =$ costante, si ottiene

$$\bar{P} = \frac{R\,\bar{T}}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

cioè

$$\bar{P}(V-b)\,V^2 + a\,(V-b) - V^2 R\,\bar{T} = 0$$

ovvero

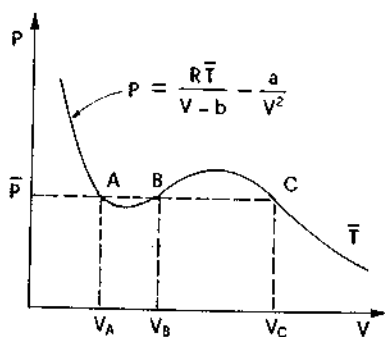
$$V^3\,\bar{P} - V^2\,(b\,\bar{P} + R\,\bar{T}) + a\,V - a\,b = 0 \qquad \text{[II.45]}$$

Come si vede, e come del resto è evidente dalla figura, si tratta di una equazione di 3° grado che ammette in generale tre soluzioni A, B e C per $V = V_A, V_B$ e V_C.

Se si pone $\bar{P} = P_C =$ pressione critica e $\bar{T} = T_C =$ temperatura critica, le tre soluzioni della equazione devono andare a coincidere in $V = V_C =$ volume critico. Ciò significa che la [II.45] deve assumere la forma

$$P_C\,(V - V_C)^3 = 0$$

ovvero, sviluppando

$$V^3 P_C - V^2\,(3\,P_C\,V_C) + V(3\,P_C\,V_C^2) - P_C\,V_C^3 = 0 \qquad \text{[II.46]}$$

Confrontando la [II.46] e la [II.45] si ottiene

$$3\, P_C V_C = b\, P_C + R\, T_C$$
$$a = 3\, P_C V_C^2$$
$$a\, b = P_C V_C^3 .$$

La seconda di queste relazioni, e il rapporto fra la terza e la seconda, ci forniscono le [II.39].

Variazione di energia interna in un processo di evaporazione

E.II.19. *Calcolare la variazione di energia interna relativa alla trasformazione da liquido a vapore (evaporazione) di una quantità di acqua, se la temperatura è mantenuta costante.*

Calore latente di evaporazione

Si tratta di una isoterma di gas reale nella quale, come già abbiamo detto, occorre scambiare del calore (calore latente di evaporazione) perché la temperatura resti costante. Nel caso di evaporazione occorre fornire calore al sistema, in misura proporzionale alla massa: $Q_{ev} = m\, \lambda_{ev}$ (λ_{ev} = calore latente di evaporazione in cal/grammo o Joule/kg o simili; nel caso dell'acqua alla temperatura di ebollizione a pressione atmosferica (t = 100°C) si ha λ_{ev} = 539 cal/gr).

$$\Delta U = Q_{ev} - L$$

dove

$$Q_{ev} = m\, \lambda_{ev}$$

e

$$L = P\, (V_G - V_L)$$

dove V_G è il volume, a temperatura T, della massa d'acqua data in fase di vapore, mentre V_L è il volume della stessa massa d'acqua allo stato liquido. È da notare che $V_G >> V_L$. Il fattore P rappresenta la tensione di vapore saturo alla temperatura della trasformazione. È appena il caso di osservare che, se si fosse trattato di gas perfetto, si sarebbe avuto $\Delta U = 0$.

II.6. Sistema generico descritto dai parametri P, V, T

Sistema qualunque descritto dai parametri P, V, T.

Un gas – sia esso un gas perfetto o un gas reale – rappresenta un caso particolare di un sistema termodinamico descrivibile mediante i parametri di stato P, V, T (pressione, volume, temperatura) legati fra di loro da una equazione di stato

$$f(P, V, T) = \text{cost.} \qquad \text{[II.47]}$$

Trasformazione elementare quasi-statica.

Scegliendo come è spesso conveniente, le variabili V e T come variabili indipendenti, il primo principio per una trasformazione elementare quasi statica (e senza attrito) di un tale sistema può essere scritto come

$$\delta Q = dU + P\, dV\, ;$$

e poiché

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \qquad \text{[II.48]}$$

segue:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + P(V, T)\, dV;$$

ovvero

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P(V, T)\right] dV \qquad \text{[II.49]}$$

dove, come è usuale nei testi di termodinamica, si indica esplicitamente come pedice accanto a una derivata parziale l'altra variabile che si mantiene costante effettuando la derivata (ad esempio $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ indica la derivata di U rispetto a T *mantenendo* V *costante*); e con $P(V, T)$ si intende l'espressione di P in funzione di V, T quale si ricava usando l'equazione di stato [II.47].

Calore specifico molare a volume costante.

In particolare, se si considera una trasformazione quasi statica a volume costante ($dV = 0$) dalla [II.49] segue

$$\left(\frac{\delta Q}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

e quindi, dividendo per la massa n espressa in moli

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = C_V$$

cioè

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = n\, C_V \qquad \text{[II.50]}$$

La derivata parziale di U rispetto a T a volume costante è pari alla capacità termica a volume costante del sistema considerato; cioè pari al numero di moli moltiplicato per il calore molare a volume costante.

Nel paragrafo V.1 mostreremo che quando è nota l'equazione di stato [II.47] è possibile ricavare $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$, cosicché risulta completamente noto il secondo membro della [II.49] quando sia noto il calore specifico C_V oltre all'equazione di stato [II.47].

II.7. Agitazione termica e transizioni di fase

Molti fatti sperimentali (fenomeni di diffusione; conduzione termica per convezione; moto browniano, ecc.) indicano che la materia allo stato fluido (liquido o gassoso) è costituita da molecole in continuo disordinato movimento. Nel caso di materia allo stato solido, gli atomi sono pure in continuo movimento, ma non in modo libero: ognuno di essi oscilla, come un oscillatore armonico tridimensionale, intorno a una sua posizione di equilibrio fissa all'interno del materiale. Se il solido è cristallino, queste posizioni di equilibrio formano una struttura geometrica regolare, il *reticolo cristallino*.

Il capitolo VI è dedicato a un approfondimento di questi aspetti microscopici, e alla discussione delle relazioni esistenti fra parametri microscopici e parametri di stato macroscopici; qui ci limitiamo ad alcune considerazioni fenomenologiche qualitative, che tuttavia aiutano a meglio comprendere i fenomeni macroscopici e la relativa formalizzazione in termini di equazioni.

Consideriamo una certa quantità di materia, costituita da N molecole (considerato il valore del numero $\mathcal{N}$ di Avogadro, N è di solito un numero molto grande, ad esempio dell'ordine di 10^{20} o più). Le molecole (di massa m) si agitano disordinatamente, e la loro velocità (così come la loro energia, sia cinetica che potenziale) cambia continuamente a causa di interazioni fra di loro e con le pareti. Ha senso però chiedersi come si distribuiscano in media i valori dei moduli delle velocità delle molecole in questione in stati termodinamici di equilibrio.

A questo scopo si introduce la *funzione di distribuzione delle velocità* $n(\text{v})$. Per definizione, la quantità $n(\bar{\text{v}})\,d\text{v}$ rappresenta il numero di molecole con velocità compresa fra $\bar{\text{v}}$ e $\bar{\text{v}} + d\text{v}$, e la sua interpretazione geometrica è chiarita nella figura (area tratteggiata). La somma di tutte queste aree, cioè l'area totale della figura sottesa dalla curva $n(\text{v})$, rappresenta il numero totale di N di molecole:

Funzione di distribuzione delle velocità.

$$N = \int_0^\infty n(\text{v})\,d\text{v}$$

La funzione $n(\text{v})$ può essere misurata sperimentalmente. Ad esempio per un gas, si può praticare un piccolissimo foro nel recipiente che lo contiene e misurare la velocità delle molecole che via via fuoriescono. Si trova che $n(\text{v})$ ha l'andamento mostrato in figura. All'aumentare della temperatura T, aumenta il numero di molecole dotate di velocità più alta, e diminuisce il numero di molecole più lente: la curva $n(\text{v})$ si modifica così come mostrato in figura; senza che cambi (finché N è fissato) l'area sottesa dalla curva.

Vedremo nel VI capitolo che la distribuzione $n(\text{v})$ è ben spiegata dalla teoria (*distribuzione maxwelliana delle velocità*), ed ha la forma:

Energia cinetica media di traslazione delle molecole.

$$n(\text{v}) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi K}\right)^{3/2} \text{v}^2\, e^{-\frac{m\text{v}^2}{2KT}} \quad \left(K = \frac{R}{\mathcal{N}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}\right) \qquad \text{[II.51]}$$

La costante K è detta costante di Boltzmann.

Particolarmente semplice è l'espressione che lega l'energia cinetica media di traslazione E_T delle molecole di un gas perfetto alla temperatura:

Energia cinetica media di traslazione

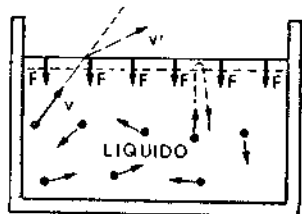
$$E_T = \frac{3}{2} K T \qquad \text{[II.52]}$$

Le considerazioni precedenti permettono in particolare di interpretare gli aspetti caratteristici dei cambiamenti di stato fisico o *transizioni di fase*.

Transizioni di fase.

È noto che la stessa sostanza può presentarsi in diversi stati di aggregazione (solido, liquido, gassoso). Alcune transizioni di fase (liquido → vapore, cioè evaporazione/ebollizione; e solido → liquido, cioè fusione) sono già state considerate, e ne sono stati evidenziati due aspetti caratteristici:

- una volta fissata la pressione, *esse avvengono a temperatura fissa*, tanto che esse vengono utilizzate per definire i punti fissi delle scale termometriche;

– esse richiedono, per avvenire, *quantità di calore specifiche* (cioè riferite all'unità di massa) *che sono caratteristiche di ogni processo*; tanto da poter essere impiegate per definire le scale calorimetriche.

Vogliamo ora interpretare le caratteristiche fondamentali delle transizioni di fase in termini di meccanismi microscopici.

Consideriamo il passaggio dallo stato liquido allo stato di vapore. Le molecole all'interno del liquido si agitano, con distribuzione delle velocità data dalla [II.51]. A causa delle forze di attrazione intermolecolari, lo stato di separazione fra liquido e ambiente esterno è sede di forze dirette verso l'interno: a questa conclusione si arriva con un ragionamento simile a quello fatto per i gas reali. Una molecola che, nel suo moto di agitazione termica, arrivi alla superficie libera del liquido, può possedere energia cinetica sufficientemente alta da superare la barriera frenante ed uscire nello spazio esterno, sia pure con energia cinetica ridotta per il lavoro fatto dalle forze di superficie (lavoro di estrazione). Se l'energia cinetica non è sufficientemente alta, la molecola viene respinta indietro e resta aggregata alle altre molecole che si trovano allo stato liquido. Le molecole che escono passano allo stato gassoso; e poiché si tratta delle molecole più energetiche, ne segue che l'energia cinetica media delle molecole restanti diminuisce, e ciò comporta un abbassamento di temperatura del liquido. Questo processo – un processo di evaporazione verso un ambiente esterno non limitato in volume – è alla base della sensazione di fresco che si percepisce quando si lascia evaporare un liquido con cui abbiamo bagnato l'epidermide in una giornata calda. Se si vuole che l'evaporazione avvenga a temperatura costante, è necessario rifornire continuamente al liquido l'energia che esso perde per la fuoriuscita di molecole di energia cinetica superiore alla media. L'energia che – nella forma di calore – deve essere rifornita per fare evaporare l'unità di massa a temperatura costante è, per l'appunto, il *calore latente di evaporazione*.

L'evaporazione è un processo endotermico.

Calore latente di evaporazione.

Un caso rilevante in cui opera il meccanismo della evaporazione si ha quando il corpo umano genera (per stato patologico, per fatica fisica, ecc.) un eccesso di calore che, se non smaltito, produrrebbe un innalzamento di temperatura al di sopra dei 37°C che rappresentano la temperatura cui il corpo umano deve essere termostatato per il suo corretto funzionamento. I meccanismi di termoregolazione producono allora sudorazione, e la conseguente evaporazione dissipa il calore in eccesso.

Quando il volume a disposizione della fase gassosa è limitato, le molecole che si trovano allo stato gassoso si ripresentano, dopo un certo numero di urti contro le pareti e contro altre molecole, alla superficie libera del liquido: e vengono aiutate, dalle forze all'interfaccia, a rientrare nella fase liquida. A regime, si realizza un equilibrio statistico, in cui, a parità di tempo, tante molecole passano mediamente dallo stato liquido a quello gassoso (evaporazione) quante passano dallo stato gassoso a quello liquido (condensazione). Questa condizione di equilibrio statistico si realizza per un preciso valore della densità di popolazione di molecole allo stato gassoso (una volta fissata la velocità media delle molecole, cioè la temperatura del sistema) e cioè per un preciso valore della pressione (detta *tensione di vapore saturo* a quella temperatura).

Tensione di vapore saturo.

Se si innalza la temperatura in un recipiente chiuso contenente liquido e gas, aumenta la velocità media delle molecole. Aumenta per conseguenza il numero di molecole che lasciano la fase liquida perché capaci di superare la barriera superficiale, ed aumentano anche il numero e l'energia cinetica media delle molecole in fase gassosa: aumenta così la tensione di vapore

saturo (nelle isoterme sperimentali di un gas reale i gradini isobari si presentano ad una pressione che aumenta con la temperatura).

Il processo di evaporazione sopra illustrato avviene alla superficie libera del liquido, superficie che separa il liquido dall'ambiente esterno. L'evaporazione può però avvenire anche all'interno del liquido, se si realizzano in esso delle zone (dette *bolle*) all'interno delle quali vi sia gas (aria) o vapore. Tali bolle tendono a formarsi intorno a impurità sempre presenti nei liquidi (particelle solide o ioni in sospensione nel liquido). Ad esempio, se si lascia riposare per qualche tempo un bicchiere d'acqua, si formano bollicine attaccate alle pareti.

Ebollizione.

Ogni bolla è assimilabile a un piccolo recipiente circondato da liquido, e pieno d'aria mescolata a vapor saturo. Per le leggi dell'idrostatica, la pressione all'interno di queste bolle è pari alla pressione P_0 che dall'esterno agisce sul liquido, sommata al termine di Stevino $\rho g h$ (che di solito, cioè per piccole profondità del recipiente, è trascurabile rispetto e P_0). Ogni bolla è spinta verso l'alto dalla spinta di Archimede; ma se essa aderisce alle pareti, e se le dimensioni sono abbastanza piccole, la forza di adesione contro le pareti è sufficiente a mantenerla in equilibrio, ed essa non si muove. Se al recipiente viene fornito calore, la tensione di vapore all'interno della bolla aumenta insieme alla temperatura locale. Poiché la pressione esterna P_0 rimane immutata, la tensione di vapore raggiunge il valore P_0 e a quel punto la bolla può aumentare indefinitamente di dimensioni con l'evaporazione di una quantità via via crescente di liquido; la spinta di Archimede prevale e la bolla sale liberando il vapore alla superficie del liquido (*ebollizione*).

Il processo di ebollizione si relizza dunque alla temperatura per cui la tensione di vapore saturo uguaglia la pressione atmosferica esterna. Ciò spiega perché ad alta quota, dove la pressione è minore, l'ebollizione avvenga a temperatura più bassa.

La temperatura di ebollizione dipende dalla pressione dell'ambiente.

Il processo di evaporazione, in conclusione, porta un certo numero di molecole dallo stato liquido, in cui le distanze medie sono piccole, allo stato gassoso in cui le distanze intermolecolari sono in media molto più grandi. L'aumento della distanza intermolecolare avviene in presenza di forze attrattive, e dunque implica un lavoro (negativo, cioè assorbito dal sistema) di separazione. Proprio per compiere tale lavoro microscopico viene fornito calore, se si vuole mantenere la temperatura costante. Questo è il significato del calore latente di evaporazione. Nel caso dell'acqua il calore latente di evparazione λ_{ev} alla pressione di una atmosfera (a 100°C) vale circa λ_{ev} = 540 cal/gr.

Anche il processo di fusione, in cui una sostanza allo stato solido passa allo stato liquido, avviene a temperatura costante (fissata la pressione) e con rifornimento di calore (*calore latente di fusione*). Rifornendo calore quando il corpo è a temperatura più bassa di quella di fusione, aumenta la temperatura; e ciò corrisponde, dal punto di vista microscopico, a un aumento dell'ampiezza di oscillazione degli oscillatori armonici tridimensionali con cui possiamo schematizzare un solido cristallino. Ciò facendo, aumenta sia l'energia cinetica che quella potenziale (fra di loro uguali) che ogni atomo in media possiede (equipartizione dell'energia).

Fusione.

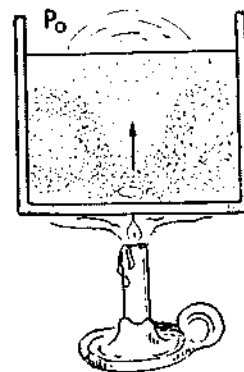
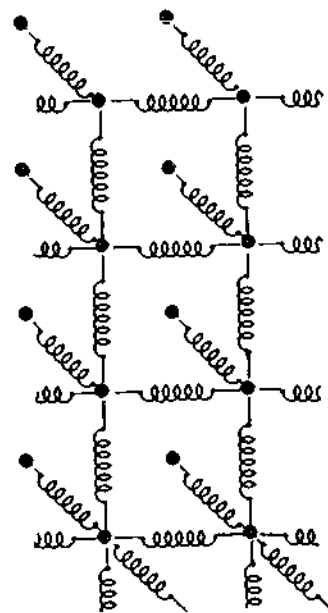
Ad un certo punto l'energia di ogni atomo diviene tale da rompere il legame cristallino (di fatto gli atomi escono dalla buca di potenziale in cui sono confinati quando il corpo è nella fase solida). L'energia necessaria a rompere i legami e a far passare la sostanza dallo stato solido, più ordinato, allo stato liquido, più disordinato, è il calore latente di fusione.

Calore latente di fusione.

Tabella II.1.

Calori specifici molari a pressione costante per alcuni gas
(a 15°C, 1 atm)

GAS			C_P (Joule/mole K)	C_P (cal/mole K)
Monoatomici	Elio	He	20,80	4,97
	Argon	A	20,93	5,00
Biatomici	Idrogeno	H_2	28,59	6,83
	Ossigeno	O_2	29,01	6,93
	Azoto	N_2	29,18	6,97
	Ossido di carbonio	CO	29,05	6,94
	Ossido di azoto	NO	29,26	6,99
	Acido cloridrico	HCl	29,59	7,07
	Cloro	Cl_2	34,12	8,15
Poliatomici	Anidride carbonica	CO_2	36,63	8,75
	Protossido di azoto	N_2O	36,92	8,82
	Ammoniaca	NH_3	37,29	8,91
	Metano	CH_4	35,50	8,48
	Etano	C_2H_6	48,26	11,6

$\frac{5}{2}R$ = 20,79 Joule/mole K

$\frac{7}{2}R$ = 29,10 Joule/mole K

$4\,R$ = 33,26 Joule/mole K

Tabella II.2.

Parametri critici di alcune sostanze pure

SOSTANZA	T_c (K)	P_c (atm)	V (cm^3) per mole	Densità critica (g/cm^3)
Elio	5.3	2.25	58	0.069
Idrogeno	33.3	12.8	64.5	0.031
Azoto	126.2	33.5	90	0.311
Argon	151	48.6	75.2	0.531
Ossigeno	154.8	50.1	74.4	0.430
Metano	191	45.8	98.8	0.162
Etilene	283.1	51.2	124	0.225
Etano	305.4	48.2	143	0.211
Anidride carbonica	304.2	79.9	95.6	0.460
Propano	369.9	41.5	200	0.22
Ammoniaca	405.6	112.5	72.4	0.235
Acqua	647.3	218.3	45	0.40

Tabella II.3.

Valori della costante dei gas in varie unità di misura

P	V/n	T	R
N/m^2	m^3/mole	K	8,3143 Nm/mole K
Atm	cm^3/mole	K	82,9567 Atm cm^3/mole K
mmHg	cm^3/mole	K	62363,1000 mmHg cm^3/mole K
Atm	litri/mole	K	0,0820 Atm litri/mole K
mmHg	litri/mole	K	62,3631 mmHg litri/mole K

Tabella II.4.

Calore molare a pressione costante per alcune sostanze in condizioni Standard di Temperatura e Pressione (*S T P*; T = 298,15 K, P = 1 Atm.)

	C_p cal/mole K	C_p Joule/mole K
Acqua	17,95	75,14
Alluminio	5,82	24,36
Argento	6,06	25,37
Carbonato di Calcio	19,57	81,92
Cloruro di sodio	12,07	50,52
Etano	12,50	52,32
Ferro	6,00	25,12
Ossido di Silicio	10,62	44,45
Piombo	6,18	25,87
Platino	6,21	25,99
Propano	17,40	72,84
Rame	5,84	24,25

Tabella II.5.

Coefficienti di Van der Waals per alcuni gas

	a litri atm./mole	b litri/mole
Ammoniaca	4,170	0,037
Anidride Carbonica	3,592	0,043
Argon	1,345	0,032
Azoto	1,390	0,039
Elio	0,034	0,024
Etano	5,489	0,064
Etilene	4,471	0,057
Idrogeno	0,244	0,027
Metano	2,253	0,043
Ossigeno	1,360	0,032
Propano	8,664	0,084
Vapor d'Acqua	5,464	0,030

Tabella II.6.

Tensioni di vapore per varie sostanze pure.
La tavola mostra la temperatura in gradi K a cui il vapore saturo della sostanza ha la pressione indicata in cima alla tabella

	1 mmHg	10 mmHg	100 mmHg	1 Atm.	2 Atm
Acqua	255,85	257,87	324,75	373,15	393,25
Alluminio	1557,15	1760,15	2022,15	2329,15	......
Ammoniaca	164,05	181,25	204,75	239,75	254,45
Argento	1630,15	1947,15	2138,15	2485,15	......
Argon	54,95	62,25	72,65	87,55	94,15
Anidride Carbonica	138,85	153,65	172,95	194,95	204,05
Azoto	47,05	54,05	63,45	77,35	83,95
Elio	1,45	1,85	2,85	4,55	5,15
Idrogeno	9,85	11,85	18,65	20,65	22,95
Mercurio	399,35	457,15	534,85	630,15	......
Oro	2142,15	2427,15	2794,15	3239,15	......
Ossigeno	54,05	62,55	74,35	90,19	97,15
Piombo	1246,15	1435,15	1694,15	2017,15	......
Platino	3003,15	3419,15	3987,15	4680,15	......
Rame	1901,15	2152,15	2480,15	2868,15	......

Esercizi del capitolo II

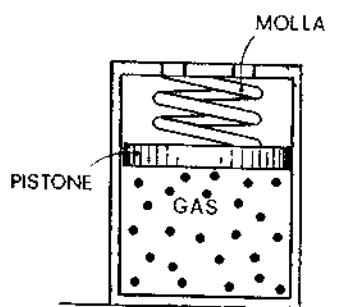
II.1. Un decimetro cubo di rame, alla pressione atmosferica, viene riscaldato da 20°C a 100°C. Che quantità di calore assorbe?
Verificare che, rispetto a Q, è trascurabile il lavoro conseguente alla dilatazione termica.
(Risposte: $274 \cdot 10^3$ J; 0,4 J)

II.2. Un cubo di ghiaccio contenuto in un involucro metallico scivola lungo una strada in discesa, e, dopo un certo tratto iniziale, esso procede a velocità uniforme poiché le forze di attrito compensano la forza attiva (componente tangenziale della forza peso). Se la strada ha una pendenza α del 10%, che percorso l dovrebbe compiere il ghiaccio per venire completamente sciolto dal lavoro delle forze di attrito? (si ammetta che il lavoro delle forze di attrito vada tutto assorbito dal ghiaccio).
(Risposta: 340 m)

II.3. Una miscela di acqua e ghiaccio alla temperatura di 0°C è formata da $m_g = 20$ g di ghiaccio e $m_a = 80$ g di acqua. Il tutto è contenuto entro un recipiente che, non essendo termicamente isolante, consente scambi di calore con l'ambiente a 20°C. Entro un certo tempo, il ghiaccio si scioglie e l'acqua così formata si porta alla temperatura $t_a = 20$°C dell'ambiente.
1) Qual'è la quantità di calore Q che il sistema ha scambiato con l'ambiente?
2) Qual'è il lavoro L compiuto durante la trasformazione?
3) Quale la variazione ΔU di energia interna?
(Risposte: $15 \cdot 10^{-3}$ J; 0; $15 \cdot 10^{-3}$ J)

II.4. Una certa quantità di azoto (biatomico, peso molecolare $M = 28$) è contenuto in un cilindro metallico con pistone di sezione $S = 10$ cm^2 e peso trascurabile. La pressione del gas, pari a quella atmosferica esterna, è inizialmente $P_0 = 1$ atm. Il volume iniziale è $V_0 = 0{,}5$ l, e la temperatura iniziale, pari a quella dell'ambiente, è $t_0 = 27$°C. Sul pistone viene disposto un peso di massa $m_0 = 10$ kg, cosicché esso si abbassa comprimendo il gas. La temperatura finale torna pari a quella dell'ambiente.
1) La trasformazione è quasi statica?
2) Quale è la massa m del gas?
3) Quale stato finale (P, V, T) raggiunge?
4) Quanto valgono ΔU, L e Q relativi alla trasformazione? Trattare l'azoto come un gas perfetto.
(Risposte: $m = 0{,}56$ g; $P = 2 \cdot 10^5$ N/m^2, $T = 300$ K, $V = 0{,}26$ l; $\Delta U = 0$, $L = 48{,}2$ J)

II.5. Risolvere l'esercizio II.4. supponendo che il cilindro, anziché metallico, sia isolante (trasformazione adiabatica anziché isoterma).
(Risposte: $\Delta U = 36{,}5$ J; $V = 0{,}323$ l; $T = 388$ K)

II.6. Un disco omogeneo di rame, girevole intorno al suo asse, è contenuto in un recipiente rigido termicamente isolante riempito con $V_0 = 3$ litri di azoto alla pressione atmosferica $P_0 = 1$ atm e alla temperatura $T_0 = 300$ K. Il raggio del disco è $R = 20$ cm e la sua massa $M = 1$ kg, ed esso ruota inizialmente alla frequenza $\nu = 9000$ giri/min. A causa del frenamento operato dal gas, il disco si porta a riposo.
1) Quanto valgono Q, L e ΔU riferiti al sistema complessivo (disco più gas)?
2) Quanto valgono Q, L e ΔU, riferiti al solo gas?
3) A che temperatura finale si porta il sistema?
4) Quale è lo stato finale P, V, T del gas?
(Risposte: 3) $T = 345{,}7$ K; 4) $P = 1{,}15$ atm)

II.7. Risolvere l'esercizio II.6., supponendo però ora che il recipiente termicamente isolato, anziché essere rigido, consenta l'espansione del gas a pressione P_0 costante pari a 1 atm.

II.8. Una miscela di idrogeno e ossigeno alla pressione atmosferica è contenuta in un recipiente termicamente isolato e rigido. Facendo scoccare una scintilla si provoca la combinazione dei due gas; la temperatura del sistema aumenta, e così pure accade alla sua pressione.
Trascurando l'energia fornita dalla scintilla, quanto vale il lavoro L compiuto dal sistema? Quanto il calore Q da esso scambiato? Commentare inoltre su ciò che accade alla sua energia interna.

II.9. Un gas biatomico (ossigeno) è contenuto dentro un cilindro con pistone di area $S = 200\ \text{cm}^2$ e peso trascurabile collegato tramite una molla a un sostegno rigido. Inizialmente il volume del gas è $V_0 = 5$ l, la pressione è pari a quella esterna $P_0 = 1$ atm (la molla è cioè nella sua posizione di riposo) e la temperatura è $T_0 = -30°\text{C}$.
Lasciando il sistema a contatto con l'ambiente esterno, esso si porta alla temperatura ambiente $T = 27°\text{C}$ e il pistone si solleva di $h = 2$ cm.
1) Quale è la massa del gas (peso molecolare $M = 32$)?
2) Quanto valgono la pressione P e il volume V finali?
3) Quale è il valore della costante elastica K della molla?
4) Quale il lavoro L compiuto durante la trasformazione?
5) Quale quantità di calore Q il sistema ha assorbito dall'ambiente? (Trattare il gas come un gas perfetto).

(Risposte: 8 g; 5,4 l e 1,3 atm; $3{,}4 \cdot 10^4$ N/m; 47,3 J; 346,3 J)

II.10. Un gas (azoto, peso molecolare 28) è contenuto dentro un cilindro con pistone (di massa trascurabile); inizialmente il gas occupa un volume $V_0 = 2$ l, la sua temperatura è $t_0 = 27°\text{C}$ e la sua pressione (pari a quella atmosferica esterna) è $P_0 = 1$ atm.
Si riscalda il gas fino a che il suo volume non diviene $V = 2{,}5$ l.
1) Quale è la massa m del gas?
2) Quale lavoro L esso compie durante la trasformazione?
3) Quanto calore Q ha assorbito? (Risposte: 2,27 g; 50,7 J; 177 J)

II.11. Una certa quantità di ossigeno alla temperatura $T_0 = 350$ K, è contenuto in un cilindro con pistone (di massa trascurabile) in equilibrio con la pressione atmosferica esterna $P_0 = 1$ atm. Il suo volume iniziale è $V_0 = 5$ l.
Al gas viene sottratta, lentamente, una quantità di calore $Q = 40$ cal.
1) Quale volume finale V e quale temperatura T raggiunge?
2) Quanto valgono il lavoro L e la variazione ΔU di energia interna relativi alla trasformazione?

(Risposte: 4,53 l e $T = 317$ K; $-47{,}6$ J e $-119{,}6$ J)

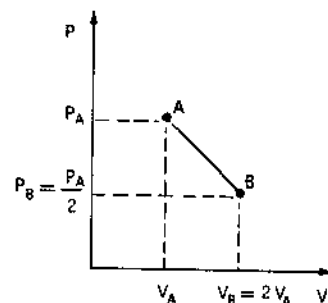
II.12. Un gas monoatomico (elio) è contenuto in un cilindro con pistone termicamente conduttore, cosicché la temperatura resta pari a quella dell'ambiente esterno $T_0 = 300$ K. Il volume iniziale è $V_0 = 5$ l e la pressione $P_0 = 20$ atm. Il gas viene lasciato espandere molto lentamente fino a che il volume diviene $V = 10$ l.
1) Quale è lo stato finale?
2) Quale è il calore Q, il lavoro L e la variazione ΔU di energia interna relativi alla trasformazione? (Risposte: $P = 10$ atm; $Q = 702$ J, $\Delta U = 0$)

II.13. Tenuto conto del valore delle costanti critiche riportate in tabella II.2, scrivere l'equazione di Van der Waals relativa a una mole di anidride carbonica

II.14. Una mole di anidride carbonica alla temperatura $T_0 = 300$ K occupa un cilindro con pistone (di massa trascurabile), cosicché si trova alla pressione dell'ambiente circostante pari a $P_0 = 1$ atm.
1) Trovare (mediante tentativi numerici) il volume occupato dal gas.
2) Se al sistema viene fornita una quantità di calore pari a 150 cal, quale diviene il suo stato finale (V, T)?
3) Quali sono il lavoro L e la variazione di energia interna ΔU relativi alla trasformazione?
(Risposte: 3) 157 J, 471 J)

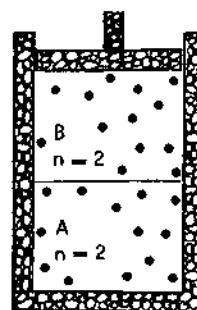
II.15. Un pallone ad aria calda si trova ad una certa altezza h dal suolo ed è trattenuto da una corda distesa liberamente a terra; una quantità di calore Q viene fornita all'aria nel pallone il cui involucro è a tenuta (la massa m di aria che contiene è costante). Supponendo che la pressione interna si mantenga uguale a quella atmosferica esterna P_0 e che le pareti del pallone siano termicamente isolanti, si calcoli la nuova altezza di equilibrio h' del pallone (h = 10 m; $P_0 = 1$ atm; T_0 = temperatura dell'atmosfera circostante = 27°C; $Q = 10^6$ J; μ = densità lineare della corda = 200 g/m; densità dell'aria circostante $\rho_A = 1{,}29$ kg/m^3).
(Risposta: 18,3 m)

II.16. Tre blocchi della stessa sostanza, di massa rispettivamente $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg ed $m_3 = 3$ kg, si trovano inizialmente alle temperature $t_1 = 10$°C, $t_2 = 20$°C e $t_3 = 30$°C. Immaginando che i tre corpi vengano posti a contatto mantenendoli isolati dall'ambiente esterno, calcolare la temperatura di equilibrio t_F che essi raggiungono.
(Risposta: 23,3°C)

II.17. Due moli di gas perfetto, a partire da uno stato iniziale A in cui la temperatura è $T_A = 273$°K, raddoppiano il loro volume e dimezzano la loro pressione, seguendo la trasformazione quasi statica lineare riportata in figura. Calcolare la quantità di calore assorbita dal gas.
(Risposta: 3403 J)

II.18. Una mole di gas perfetto monoatomico, inizialmente alla pressione $P_A = 1$ atm e volume $V_A = 8$ l, compie una trasformazione quasi statica rappresentata dall'equazione VT = costante. Il volume finale è $V_B = 2$ l. Calcolare il lavoro nella trasformazione.
(Risposta: − 2431 J)

II.19. Una certa quantità di gas perfetto compie una trasformazione quasi statica, lungo la quale il calore molare ha l'espressione $C(T) = C_V + \alpha T$.
Lo stato iniziale è caratterizzato dalla temperatura $T_A = 250$ K e dal volume $V_A = 5$ l. La temperatura dello stato finale è $T_B = 350$ K.
Essendo $\alpha = 7 \cdot 10^{-3}$ cal/mole K^2, calcolare il volume finale V_B.
(Risposta: 7,1 l)

II.20. Ricordiamo che per un gas di Van der Waals l'energia interna ha l'espressione $U(T, V) = C_V T - \dfrac{a}{V} + \text{cost.}$ (per una mole). Se un tale gas esegue una espansione libera adiabatica che ne raddoppia il volume, di quanto varia la sua temperatura?
(Risposta: $- a/2\, C_V V_i$)

II.21. Un setto conduttore fisso divide un cilindro a pareti isolanti in due parti A e B. Ciascuna parte contiene lo stesso numero di moli ($n = 2$) di gas perfetto monoatomico. La parte B ha volume variabile per la possibilità di movimento senza attrito di un pistone isolante. Il sistema è inizialmente in equilibrio alla temperatura $T_i = 270$ K.
Con un lento movimento del pistone si comprime il gas nella parte B fino a che la temperatura di equilibrio finale è $T_f = 280$ K. Trascurando la capacità termica del recipiente e del pistone, calcolare il lavoro.
(Risposta: − 120 cal)

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo II

II.1. Si veda il calore specifico del rame in tabelle II.4. e II.1. Per il calcolo del lavoro di volume, si usi il coefficiente di dilatazione volumica $\beta \simeq 3\,\alpha$, (con α, coefficiente di dilatazione lineare, dalla tabella I.2).

II.2. A regime (v = cost), il lavoro compiuto dalla forza peso è pari in modulo al lavoro delle forze di attrito; lavoro che, trasformandosi in energia termica, va a sciogliere il ghiaccio.

II.3. Si ha $L = 0$. Il calcolo di Q è ricondotto alle definizioni calorimetriche (calore latente e calore specifico).

II.4. Lo stato iniziale (P_o, V_o, T_o) è noto, per cui n (e dunque anche la massa m) può essere calcolato dall'equazione di stato. Anche lo stato finale è noto, essendo nota la temperatura T e la pressione P. ΔU ed L si calcolano direttamente, e il primo principio consente di calcolare Q.

II.5. La pressione finale è nota, e così anche la massa del gas. Gli altri due parametri possono essere calcolati usando le due equazioni rappresentate dall'equazione di stato e dal I principio (con $Q = 0$).

II.6. Il sistema complessivo (disco più gas) è isolato, e dunque $\Delta U = 0$. Ma l'energia interna essendo additiva, essa può essere scritta come somma di quella del gas e di quella del disco: e quest'ultima non è puramente termica, in quanto che, inizialmente, ad essa contribuisce un termine dato dall'energia cinetica.

II.7. Il modo più semplice per risolvere l'esercizio è quello di considerare che il gas compie una trasformazione a pressione costante e ciò consente di mettere immediatamente in relazione le sue variazioni di temperatura con l'energia da esso scambiata.

II.8. Il sistema è isolato ; l'unica cosa che accade è che l'energia interna del gas cambia forma.

II.9. Lo stato iniziale e quello finale sono completamente noti. Nota la pressione finale e l'accorciamento h della molla si calcola la costante K della molla stessa. Quando il pistone si è sollevato di un tratto y ($0 < y < h$), la pressione vale $P = P_o + \dfrac{Ky}{S}$; per cui $dL = P\,S\,dy = p_o\,dV + K\,y\,dy$, il che consente il calcolo immediato del lavoro L relativo alla trasformazione. ΔU si calcola usando la variazione di temperatura, e il primo principio consente di ricavare Q.

II.10. La trasformazione è isobara ($P = P_o$), ed essendo noto ΔV il calcolo del lavoro L è immediato. La temperatura finale si ricava dall'equazione di stato, e si può così calcolare ΔU; Q discende dal I principio.

II.11. La trasformazione è isobara ($P = P_o$); essendo noto Q, è immediato il calcolo della variazione di temperatura, il che consente di calcolare i parametri dello stato finale. Segue il calcolo di L e di ΔU; il I principio consente una verifica.

II.12. La trasformazione è quasi statica e isoterma; gli stati iniziale e finale sono noti. È quindi immediato il calcolo di ΔU e di L; e, tramite il I principio, il calcolo di Q.

II.13. L'esercizio si risolve usando le [II.39].

II.14. Si cominci col considerare il gas come un gas perfetto per trovare un valore approssimativo del volume V, e si calcoli il valore dei termini $\frac{a}{V^2}$ e b; si troverà che questi possono essere considerati come piccole correzioni, il che ne semplifica il calcolo.

II.15. La condizione di equilibrio è che la spinta di Archimede $V \rho g$ sia pari al peso del pallone più il peso del tratto di corda che non giace a terra. Confrontando la situazione di equilibrio *prima* e *dopo* che il pallone ha ricevuto il calore Q, si ha $\rho_A g \Delta V = \mu g \Delta h$. D'altra parte ΔV si ricollega a ΔT mediante l'equazione di stato; e ΔT si ricollega a Q considerando che la trasformazione avviene a pressione costante.

II.16. Il sistema è isolato, e dunque $\Delta U = 0$. U è funzione additiva (vedi Esempio E.II.10).

II.17. Per il calcolo di Q ricorrere al primo principio della termodinamica. Per i gas perfetti $U = U(T)$. Calcolare T_B e confrontarlo con T_A. $L = \int p\, dV$ può essere calcolato anche graficamente.

II.18. È opportuno esprimere la politropica VT = cost nella forma $p V^K$ = cost, cosa che può essere fatta tenendo conto che $p V = n R T$. Una volta ricavata la relazione $P = P(V)$, il calcolo del lavoro $L = \int p\, dV$ è immediato.

II.19. Occorre mettere in relazione volume e temperatura di stati che, in termini di parametri di stato, differiscono di quantità finite.
Conviene partire dalle espressioni del calore infinitesimo δQ ricavabili rispettivamente dal I principio e dal calore molare dato nel problema. Per confronto si ricava una equazione differenziale da integrare fra A e B.

II.20. Usare il I principio della termodinamica nel modo usato per interpretare l'esperienza di Joule (espansione libera dei gas perfetti).

II.21. Applicare il I principio della termodinamica al sistema $A + B$, tenendo conto del fatto che U è additiva e che, per il sistema $A + B$, la trasformazione è adiabatica. Poiché la trasformazione è lenta, le parti A e B sono sempre in equilibrio termico fra di loro.

Capitolo terzo - ꞉> N/O

Trasmissione del calore

Come abbiano visto nel precedente capitolo, il calore è la forma in cui l'energia si trasferisce in virtù di differenze di temperatura.

Conduzione, convezione, irraggiamento.

I meccanismi attraverso i quali il calore si trasmette sono sostanzialmente tre: la *conduzione*, la *convezione* e l'*irraggiamento*.

Conduzione.

Si ha conduzione quando il trasferimento avviene attraverso un mezzo materiale senza che nel mezzo vi sia trasferimento (cioè movimento macroscopico) di materia. Se il mezzo è trasparente (il significato di *trasparenza* verrà meglio specificato più avanti) la conduzione può essere accompagnata anche da trasmissione per irraggiamento. Ad esempio una parete rigida, per cui la faccia interna sia a temperatura T_1 e la faccia esterna a temperatura $T_2 < T_1$, è sede di conduzione di calore dall'interno verso l'esterno; il vetro di una finestra, oltre a trasferire calore per conduzione, trasmette però in generale anche energia termica per irraggiamento (la luce del sole).

Conduzione. Il punto di vista microscopico.

Dal punto di vista microscopico, in un corpo caldo le molecole (come abbiamo già accennato, e come vedremo meglio nel VI capitolo) si agitano, e la loro energia cinetica è proporzionale alla temperatura Kelvin T. Se il corpo è solido, il moto di agitazione termica di ogni molecola avviene attorno a una posizione di equilibrio che la molecola non può abbandonare. Quando vi è trasmissione di calore per conduzione, le molecole più calde (più energetiche) comunicano parte della loro energia alle molecole più fredde (meno energetiche), senza però che ciascuna di esse lasci la posizione media che essa occupa all'interno del solido.

Se il sistema termodinamico è un fluido (un gas o un liquido), allora in generale il trasferimento di calore è accompagnato anche da movimenti macroscopici di materia; alla conduzione del calore si accompagna allora anche la *convezione*, che diviene anzi il meccanismo dominante di trasmissione del calore. Ad esempio, se un recipiente contenente un liquido omogeneo viene riscaldato dal basso, la parte più calda, dilatandosi, tende a galleggiare per la spinta di Archimede. Essa si sposta così in alto mentre porzioni più fredde del liquido scendono sul fondo a contatto con la sorgente calda.

Convezione.

Affinché anche in un fluido resti dominante il meccanismo conduttivo è necessario evitare la convezione. Un tessuto che avvolge il nostro corpo

(o un mantello di lana di vetro nell'intercapedine attorno a un frigorifero) non fa altro che inibire i moti convettivi dell'aria (oltre a schermare l'irraggiamento, cui accenneremo fra poco) riducendo così la trasmissione del calore al solo fenomeno conduttivo che nei fluidi – e in particolare nei gas – consente solo trasferimenti di calore relativamente modesti.

Irraggiamento.

Il terzo meccanismo di trasferimento del calore è l'*irraggiamento*. Ogni carica elettrica accelerata emette onde elettromagnetiche che si propagano anche nel vuoto trasportando energia. Onde radio, microonde, radiazioni infrarosse, radiazione visibile ultravioletta, X o γ, sono tutte forme di *radiazione elettromagnetica*, diverse fra loro per la loro lunghezza di onda. Le cariche elettriche microscopiche di cui ogni corpo è costituito, in virtù dell'agitazione termica che è tanto maggiore quanto più alta è la temperatura, emettono radiazioni elettromagnetiche. Alla temperatura ambiente, si tratta di *radiazione infrarossa*. All'aumentare della temperatura, aumenta rapidamente l'intensità della radiazione emessa; contemporaneamente, la lunghezza d'onda diminuisce, spostandosi verso il visibile. A temperature di sei-settecento gradi centigradi, la radiazione emessa ha già una componente rossa, e il corpo si dice *rovente*; alla temperatura di qualche migliaio di gradi, il filamento di una lampadina emette radiazione molto più chiara, e la luce «bianca» del sole altro non è che l'energia irraggiata da un corpo la cui temperatura superficiale è di circa 6000 gradi.

Radiazione elettromagnetica.

Radiazione infrarossa.

Radiazione rossa; corpi roventi.

Radiazione bianca.

III.1. La conduzione in regime stazionario

Conduzione in regime stazionario.

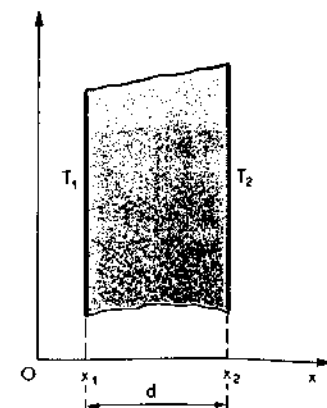
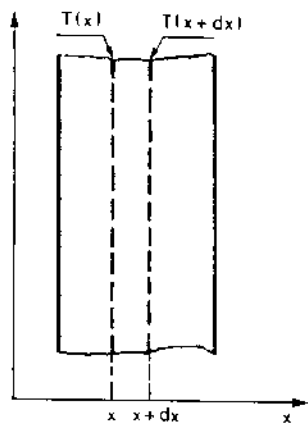
Sperimentalmente, si è riscontrato che la quantità di calore dP che attraversa nell'unità di tempo un'area dS all'interno di un materiale solido è proporzionale alla superficie dS e alla derivata della temperatura in direzione ortogonale alla superficie stessa:

$$dP = -\lambda\, dS \frac{\partial T}{\partial x} \qquad \text{[III.1]}$$

avendo supposto, per fissare le idee, che dS sia ortogonale all'asse x. Il segno meno indica che il calore fluisce nel verso in cui T decresce. Il parametro λ è detto *conducibilità*, e se il materiale è isotropo non dipende dall'orientamento della superficie. In generale λ dipende dalla temperatura, ma in molti problemi pratici la dipendenza è tanto debole da poter essere trascurata (così come noi faremo sistematicamente nel seguito). Il valore di λ per materiali di interesse pratico è riportato in tab. III.1. Se il sistema *non* è in uno stato stazionario, la temperatura in un suo punto generico dipende dal tempo; anche $\frac{\partial T}{\partial x}$, e dunque dP, dipendono in questo caso dal tempo.

Conducibilità termica.

Consideriamo però ora un sistema costituito da una lastra piana di materiale omogeneo di spessore d e superficie S; siano le dimensioni lineari di S molto grandi rispetto allo spessore d, cosicché possano essere trascurati gli effetti di bordo. Una faccia della lastra sia a contatto con una sorgente a temperatura uniforme e costante pari a T_1; l'altra faccia con una sorgente a temperatura uniforme e costante T_2 ($T_1 > T_2$).

Dopo un certo tempo la lastra raggiunge uno stato termico stazionario, in cui la temperatura (oltre a non dipendere dal tempo t) non dipende nemmeno dalle coordinate trasversali y e z, ma solo dalla coordinata x nor-

Trasmissione del calore per conduzione in regime stazionario.

male alla piastra (e ciò per l'ipotesi che siano trascurabili effetti di bordo). Integrando la [III.1] rispetto a dS, si ottiene

$$P = -\lambda S \frac{dT}{dx} \qquad \text{[III.2]}$$

La potenza termica P (cioè il calore che passa nell'unità di tempo) sarà la stessa attraverso due qualsiansi superficie S_1 ed S_2 parallele alle facce della piastra: infatti poiché lo stato della porzione di materiale compresa fra S_1 ed S_2 non cambia ($\Delta U = 0$), tanto calore entra nel sistema tanto deve uscirne (poiché $L = 0$, in virtù del I principio, se $\Delta U = 0$, deve essere $Q = Q_1 + Q_2 = 0$).

Pertanto, nella [III.2] P non dipende da x. Integrando allora rispetto a dx su tutto lo spessore della piastra, si ha

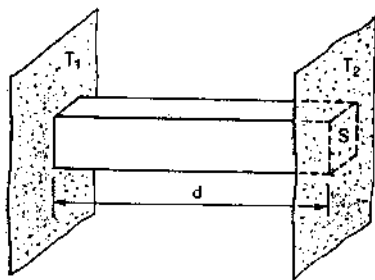
$$P(x_2 - x_1) = P \cdot d = \lambda S(T_1 - T_2)$$

ovvero

$$\boxed{P = \frac{\lambda S}{d}(T_1 - T_2)} \qquad \text{[III.3]}$$

che è la legge di *trasmissione del calore in regime stazionario*. È spesso utile introdurre il flusso di calore che attraversa nell'unità di tempo l'unità di superficie: $F = \frac{P}{S}$. In termini di F, la [III.3] può essere scritta come

$$\boxed{F = H(T_1 - T_2)} \qquad \text{[III.4]}$$

Conduttanza unitaria.

dove il parametro $H = \frac{\lambda}{d}$ *è detto conduttanza unitaria* (cioè per unità di superficie) della lastra considerata.

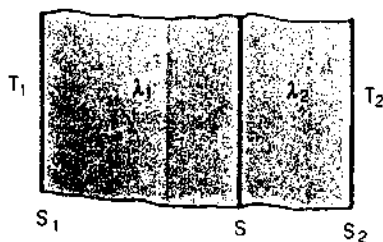
La [III.3] (o l'equivalente [III.4]) consente di calcolare immediatamente il flusso termico che attraversa in condizioni stazionarie una lastra (o parete); essa può essere applicata anche a una sbarra omogenea purché con opportuni accorgimenti (isolamento termico laterale) si faccia sì che siano trascurabili le dispersioni termiche laterali.

Supponiamo ora che il sistema sia formato da due lastre piane parallele, di spessore rispettivamente pari a d_1 e d_2 e conducibilità termica λ_1 e λ_2.

Quando il sistema ha raggiunto la condizione di stazionarietà, applicando la [III.4] possiamo calcolare il flusso termico che attraversa ciascuna delle due piastre

$$F_1 = H_1(T_1 - T_0);\ H_1 = \frac{\lambda_1}{d_1}$$
$$F_2 = H_2(T_0 - T_2);\ H_2 = \frac{\lambda_2}{d_2} \qquad \text{[III.5]}$$

dove con T_0 abbiamo indicato la temperatura della superficie di separazione delle due lastre. Con lo stesso ragionamento fatto sopra, concludiamo che in condizioni stazionarie deve essere $F_1 = F_2 = F$. Per cui le [III.5] divengono

$$F = H_1(T_1 - T_0)$$
$$F = H_2(T_0 - T_2) \qquad \text{[III.6]}$$

Eliminando T_0, si ottiene

$$F = H(T_1 - T_2) \quad \text{dove} \quad H = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \qquad \text{[III.7]}$$

Conduttanza termica di due lastre in serie.

Ponendo due lastre «in serie», le conduttanze si sommano secondo la regola $\frac{1}{H} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}$.

Dalle [III.6], eliminando F, otteniamo anche

$$\frac{T_1 - T_0}{T_0 - T_2} = \frac{H_2}{H_1} \qquad \text{[III.8]}$$

La caduta di temperatura su due lastre «in serie» è inversamente proporzionale alle rispettive conduttanze.

Caduta di temperatura su due lastre in serie.

Le [III.7] e [III.8] sono facilmente generalizzabili al caso di n lastre piane parallele «in serie». La conduttanza complessiva H è allora data da

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} + \ldots + \frac{1}{H_n} \qquad \text{[III.9]}$$

Un numero qualunque di lastre in serie.

e le cadute di temperatura sono legate alle conduttanze dalle relazioni

$$\Delta T_1 H_1 = \Delta T_2 H_2 = \ldots = \Delta T_n H_n \qquad \text{[III.10]}$$

dove con ΔT_i si è indicato $T_i - T_{i+1}$.

Esempio

E.III.1. *Una parete di area 12 m² è costituita da 15 cm di calcestruzzo protetto da 3 cm di intonaco. Se la faccia interna si trova a 18°C e quella esterna a 2°C, quale è la potenza termica dissipata? Se il rendimento dell'impianto di riscaldamento è 0,80, quale è il consumo annuo di gasolio di cui quella parete è responsabile, supponendo che per 150 giorni all'anno la situazione termica media sia quella sopra detta? A quando scendono la potenza termica e il consumo se la parete viene protetta con 5 cm di poliuretano espanso?*

Una parete costruita con più strati di materiali omogenei diversi.

La conduttanza unitaria dei tre strati è rispettivamente (vedi tab. III.1):

- calcestruzzo $H_1 = \lambda_1/d_1 = 1{,}3\,\frac{W}{\text{m}\,°\text{C}}/0{,}15\ \text{m} = 8{,}7\ W/\text{m}^2\,°\text{C}$;
- intonaco $H_2 = \lambda_2/d_2 = 0{,}80\,\frac{W}{\text{m}\,°\text{C}}/0{,}03\ \text{m} = 26{,}7\ W/\text{m}^2\,°\text{C}$;
- poliuretano $H_3 = \lambda_3/d_3 = 0{,}026\,\frac{W}{\text{m}\,°\text{C}}/0{,}05\ \text{m} = 0{,}52\ W/\text{m}^2\,°\text{C}$.

La parete non isolata ha conduttanza H data da

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2};$$

risulta

$$H = 6{,}5\,\frac{W}{\text{m}^2\,°\text{C}}.$$

La parete isolata ha conduttanza $\bar{H}$ data da

$$\frac{1}{\bar{H}} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} + \frac{1}{H_3};$$

da cui

$$\bar{H} = 0{,}48 \frac{W}{\text{m}^2\,{}^\circ\text{C}}.$$

La potenza media dissipata è
— parete non isolata:

$$P = S\,H\,(T_1 - T_2) = 12\ \text{m}^2 \cdot 6{,}5 \frac{W}{\text{m}^2\,{}^\circ\text{C}} \cdot (18 - 2){}^\circ\text{C} = 1248\ W;$$

— parete isolata:

$$\bar{P} = S\,\bar{H}\,(T_1 - T_2) = 12\ \text{m}^2 \cdot 0{,}48 \frac{W}{\text{m}^2\,{}^\circ\text{C}} \cdot (18 - 2){}^\circ\text{C} = 92{,}2\ W;$$

L'energia consumata annualmente è data, nei due casi, da:
— parete non isolata

$$E = P \cdot t = 1248 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}} \times 150\ \text{giorni} \times 24 \frac{h}{\text{giorno}} \times \frac{3600\ \text{sec}}{h} = 16{,}17 \cdot 10^9\ \text{Joule};$$

— parete isolata

$$\bar{E} = \bar{P} \cdot t = 92{,}2 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}} \times 150\ \text{giorni} \times 24 \frac{h}{\text{giorno}} \times \frac{3600\ \text{sec}}{h} = 1{,}19 \cdot 10^9\ \text{Joule}.$$

Ogni kg di gasolio sviluppa circa 10^4 kcal $= 4{,}18 \cdot 10^7 \frac{\text{Joule}}{\text{kg}}$; tenendo conto di un rendimento di 0,80, ogni kg rende disponibili $3{,}34 \cdot 10^7 \frac{\text{Joule}}{\text{kg}}$.
Per sopperire alle dissipazioni termiche, servono dunque, nei due casi, le seguenti quantità di gasolio:
— parete non isolata

$$Q = 16{,}17 \cdot 10^9\ \text{Joule} \frac{1}{3{,}34 \cdot 10^7\ \text{Joule/kg}} = 484\ \text{kg};$$

— parete isolata

$$\bar{Q} = 1{,}29 \cdot 10^9\ \text{Joule} \frac{1}{3{,}34 \cdot 10^7\ \text{Joule/kg}} = 38{,}6\ \text{kg}.$$

III.2. Conduzione in regime non stazionario

Conduzione in regime non stazionario.

Consideriamo una parete omogenea, molto estesa rispetto al suo spessore in modo che possano essere ancora trascurati gli effetti di bordo. Supponiamo ora che le temperature T_1 e T_2, uniformi sulle due facce, siano però non necessariamente costanti nel tempo. La temperatura T all'interno della parete sarà ancora indipendente da y e da z, ma in ogni punto dipenderà dal tempo. Se consideriamo due piani paralleli al piano zy, rispettivamente di coordinate x e $x + dx$, i flussi termici $P(x)$ e $P(x + dx)$ non

saranno più fra loro uguali. Poniamo l'attenzione sull'elemento di area dS della parete. Potremo scrivere, per il calore che nel tempo dt attraversa i due piani considerati (usando la [III.1])

$$Q(x) = P(x)\,dt = -\,dS\,\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x dt$$

$$Q(x+dx) = P(x+dx)\,dt = -\,dS\,\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} dt =$$

$$= -\,dS\,\lambda \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\cdot dx\right] dt\,.$$

Nella seconda di queste equazioni, abbiamo sviluppato $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$ al primo ordine in dx. La quantità di calore che l'elemento di parete considerato (elemento di area dS e spessore dx) scambia è dato da:

$$\delta Q = Q(x) - Q(x+dx) = \lambda\,dS\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,dt\,dx\,. \qquad \text{[III.11]}$$

D'altro canto, deve aversi per il primo principio della termodinamica ($\delta L = 0$):

$$\delta Q = dU$$

dove dU, per la [II.14], è dato da

$$dU = dm\,c\,dT = dS\,dx\,\rho\,c\,dT \qquad \text{[III.12]}$$

dove c è il calore specifico; dm la massa dell'elemento di volume $dS\,dx$ della parete; ρ la densità.

Uguagliando la [III.11] e la [III.12] otteniamo in definitiva

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho\,c}{\lambda}\,\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{[III.13]}$$

È questa la cosiddetta *equazione di Fourier per il caso unidimensionale* ($T = T(x, t)$). Nel caso generale in cui la temperatura oltre che dalla coordinata x, dipenda anche da y e da z, l'equazione di Fourier assume la forma più generale:

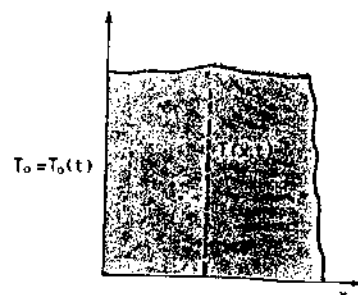
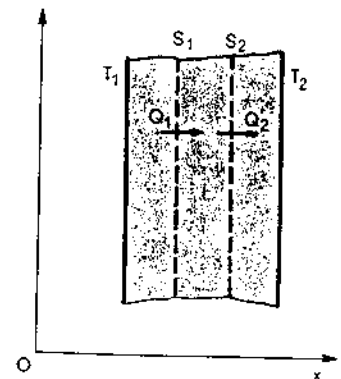
Equazione di Fourier unidimensionale.

Equazione di Fourier tridimensionale.

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho\,c}{\lambda}\,\frac{\partial T}{\partial t}} \qquad \text{[III.14]}$$

Questa equazione ammette soluzione analitica solo nel caso di geometrie e di condizioni al contorno (rappresentate dalle temperature dell'ambiente con cui il sistema scambia calore) particolarmente semplici; nel caso generale è necessario ricorrere a soluzioni numeriche approssimate.

Un caso facilmente risolubile è quello di una *parete semi-infinita*, sollecitata da una temperatura T caratterizzata da andamento sinusoidale:

$$T_0 = A + B \sin \omega t\,.$$

In questo caso, la soluzione della [III.13] è data semplicemente (come è facile verificare sostituendo nella [III.13]) da

$$T(x, t) = A + B\, e^{-ax} \cdot \sin(\omega t - ax) \qquad [III.15]$$

con

$$a = \left(\frac{\omega \rho c}{2 \lambda}\right)^{1/2}$$

La [III.15] rappresenta un'*onda di temperatura* che si propaga all'interno della parete con velocità $v = \frac{\omega}{a} = \left(\frac{2 \lambda \omega}{\rho c}\right)^{1/2}$; onda che si smorza via via che penetra nella parete con una lunghezza di attenuazione pari ad $\frac{1}{a} = \left(\frac{2 \lambda}{\omega \rho c}\right)^{1/2}$

III.3. Convezione in regime stazionario

Convezione in regime stazionario.

Come abbiamo accennato, si parla di convezione allorché lo scambio di energia termica fra le parti di un sistema è dovuta al moto di masse di fluido aventi temperature differenti. Se il moto del fluido è causato unicamente da variazioni di densità dovute a gradienti di temperatura la *convezione* è detta *naturale*; se il moto del fluido è causato essenzialmente da altri fattori (ventilatori, pompe, il vento, ecc.) la *convezione* è detta *forzata*.

Convezione naturale.

Convezione forzata.

I problemi riguardanti la convezione sono generalmente complicati, in quanto le modalità di trasmissione del calore dipendono da numerosi parametri, quali la forma e le dimensioni delle superfici che delimitano il fluido e il suo movimento, oltre naturalmente che dalle caratteristiche fisiche del fluido stesso.

Per una trattazione sistematica dell'argomento si rimanda ai testi specializzati. Qui ci limitiamo a introdurre la trattazione fenomenologica di alcuni casi che più frequentemente si incontrano nella pratica.

Numero di Rayleigh.

Nel caso della convezione naturale è innanzitutto utile introdurre una grandezza adimensionale caratteristica del sistema in esame – detta *numero di Rayleigh* – definita da

$$R_a = A(T)\, L^3\, \Delta T$$

dove ΔT è la differenza fra le temperature delle regioni tra cui interessa calcolare gli scambi termici, $A(T)$ è una funzione dipendente dalle proprietà fisiche del fluido e in particolare dalla sua temperatura media, ed L è una dimensione lineare caratteristica del sistema. Nel caso dell'aria, la funzione $A(T)$ è riportata in figura III.1. Nella stessa figura, riportiamo anche la conducibilità dell'aria (in assenza di convezione) in funzione della temperatura.

Gli scambi termici convettivi possono essere empiricamente espressi mediante una legge formalmente analoga a quella per la conduzione [III.4]:

$$\boxed{F = H_c (T_1 - T_2)} \qquad [III.16]$$

Conduttanza termica unitaria per convezione.

Il coefficiente di scambio unitario H_c (corrispondente alla conduttanza unitaria) dipende però dalla geometria e dalla temperatura. Ci limitiamo

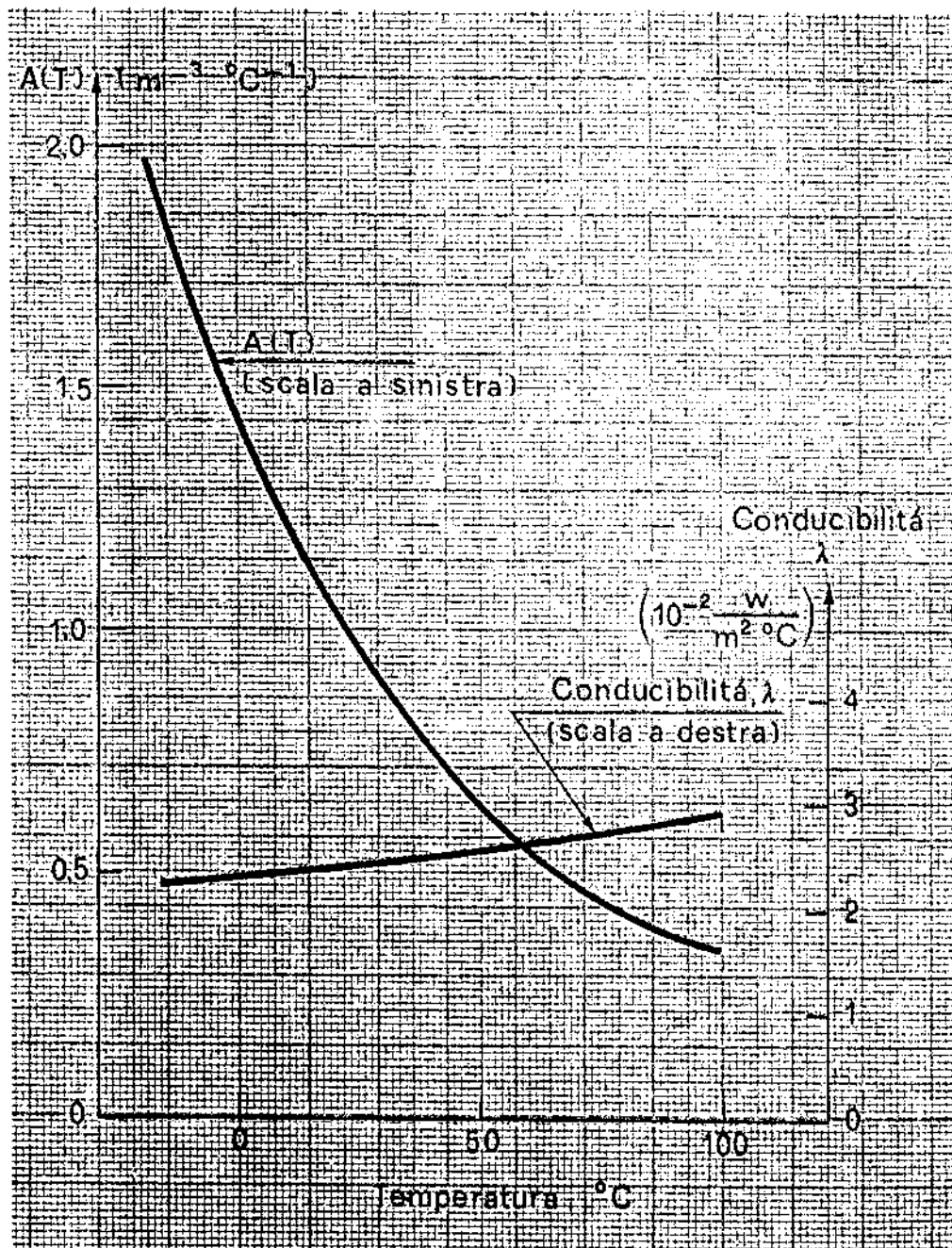
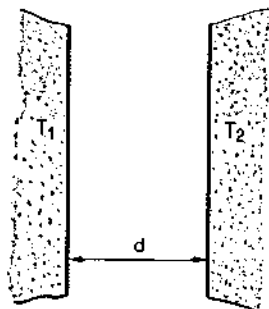



Fig. III.1. - Funzione $A\,(T)$ e conducibilità λ, in funzione della temperatura, per l'aria.

Intercapedine verticale in aria.

qui a dare l'espressione empirica di H_c per alcune geometrie particolarmente semplici e usuali:

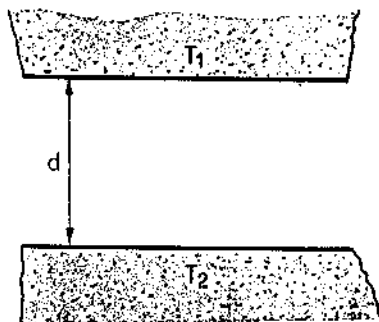
a) intercapedine di spessore d d'aria fra due pareti verticali a temperatura rispettivamente T_1 e T_2 (dimensioni lineari delle pareti molto minori *di d).*

$$\text{per } R_a < 2000 \qquad H_c = \frac{\lambda}{d}$$

$$\text{per } 2000 < R_a < 200.000 \qquad H_c = 0{,}12\,(R_a)^{1/4}\frac{\lambda}{d} \qquad \text{[III.17]}$$

$$\text{per } R_a > 200.000 \qquad H_c = 0{,}04\,(R_a)^{1/3}\frac{\lambda}{d}$$

Nel calcolo di R_a, va posto $L = d$, $T = \dfrac{T_1 + T_2}{2}$, $\Delta T = T_1 - T_2$. Per comodità, riportiamo in figura III.2 i risultati che si ottengono dalla [III.17] in intervalli di particolare interesse per L e T e ΔT.

Intercapedine orizzontale in aria.

b) intercapedine orizzontale con $T_2 > T_1$ (vedi figura); per $T_2 < T_1$ non si hanno moti convettivi ($H_c = \lambda/d$).

$$\text{per } R_a < 1000 \qquad H_c = \frac{\lambda}{d}$$

$$\text{per } 1000 < R_a < 300.000 \qquad H_c = 0{,}21\,(R_a)^{1/4}\frac{\lambda}{d} \qquad \text{[III.18]}$$

$$\text{per } R_a > 300.000 \qquad H_c = 0{,}08\,(R_a)^{1/3}\frac{\lambda}{d}$$

con lo stesso significato dei simboli rispetto alla [III.17].

Anche per questa situazione, riportiamo per comodità l'andamento di H_c in fig. III.3. Finalmente, riportiamo in figura III.4 il coefficiente di scambio termico (empiricamente ricavato) fra una parete verticale e l'ambiente circostante, in funzione della velocità v del vento. Tale coefficiente di scambio tiene conto anche di scambi termici radiativi (vedi le relative definizioni nel prossimo paragrafo) per una parete che non sia di metallo lucidato.

Esempio

Trasmissione di calore attraverso il vetro di una finestra.

E.III.2. *Una finestra di area = 2 m² è realizzata con una lastra di vetro spessa tre millimetri. Se la temperatura dell'aria dell'ambiente interno è $T_i = 20°C$, e quella dell'ambiente esterno è $T_e = 5°C$, quale è la potenza termica dissipata attraverso la finestra (trascurando le infiltrazioni d'aria) se la velocità del vento esternamente è 4 m/s?*

La finestra può essere considerata come una lastra (di superficie $S = 2$ m²) costituita di tre strati: uno strato di aria (esterna di conduttanza H_{ce}), la lastra di vetro (di conduttanza H_V), e uno strato di aria interna (di conduttanza H_{ci}). Queste tre conduttanze sono date rispettivamente da:

H_{ce}: (dalla fig. III.1, in corrispondenza di v = 4 m/sec): $H_{ce} = 20\,\dfrac{W}{m^2\,°C}$

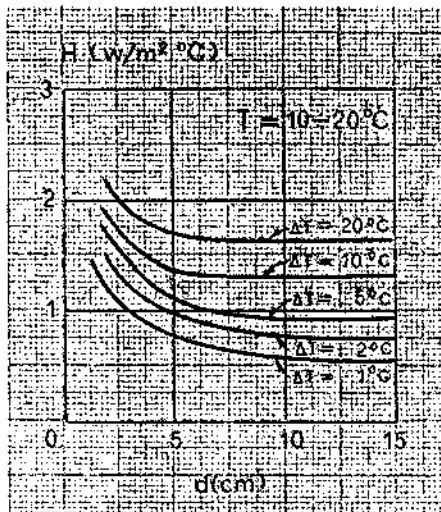



Fig. III.2. - Conduttanza convettiva unitaria per una intercapedine verticale in aria.

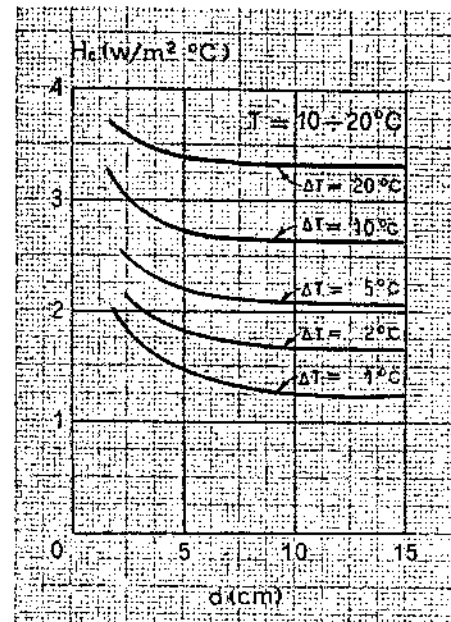



Fig. III.3. - Conduttanza convettiva unitaria per una intercapedine orizzontale in aria scaldata da sotto.

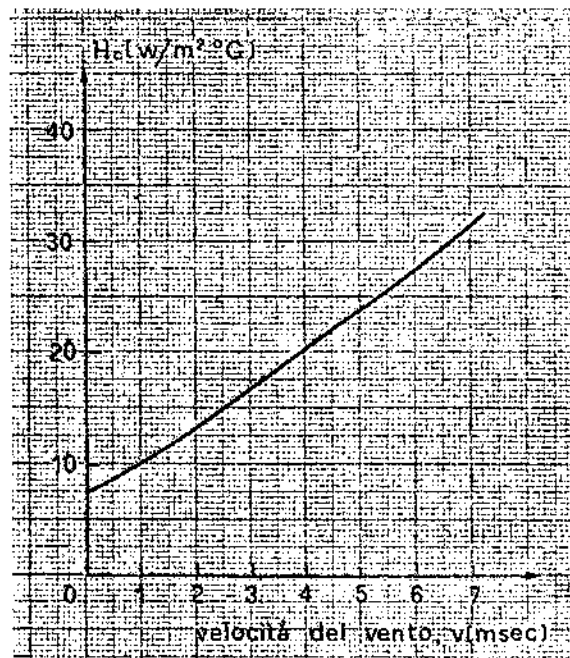



Fig. III.4. - Coefficiente di scambio termico (convettivo e radiativo) fra una parete verticale e l'ambiente circostante, in funzione della velocità del vento.

$H_v = \dfrac{\lambda}{d}$. Usando per λ il valore $\lambda = 0{,}93 \dfrac{W}{m\ ^\circ C}$, si ha

$$H_v = \frac{0{,}93}{3.10^{-3}} = 0{,}31 \cdot 10^3 \frac{W}{m^2\ ^\circ C}.$$

H_{ci}: (dalla fig. III.1, in corrispondenza di $v = 0$) $H_{ci} = 7{,}2\ W/m^2\ ^\circ C$.

La conduttanza complessiva H della finestra è data, secondo la [III.9], da:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_{ce}} + \frac{1}{H_v} + \frac{1}{H_{ci}} = \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{310} + \frac{1}{7{,}2}\right)\frac{m^2\ ^\circ C}{W}$$

Da cui

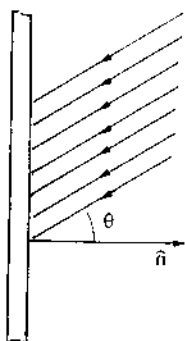
$$H = \frac{1}{0{,}0500 + 0{,}0032 + 0{,}1389} = \frac{1}{0{,}1921} \simeq 5{,}2 \frac{W}{m^2\ ^\circ C}.$$

Come si vede, la conduttanza del solo vetro sarebbe di $310 \dfrac{W}{m^2\ ^\circ C}$; essa scende a $5{,}2\ W/m^2\ ^\circ C$ soprattutto in virtù dello strato d'aria interno, dove per l'assenza di vento la conduttanza convettiva è relativamente modesta.

La potenza termica dissipata è:

$$P = S\,H\,(T_i - T_e) = 2\ m^2 \cdot 5{,}2 \frac{W}{m^2\ ^\circ C} \cdot (20 - 5)^\circ C \simeq 156\ W.$$

III.4. Scambi termici per irraggiamento

Scambi termici per irraggiamento.

III.4.1. **Corpo nero.** Consideriamo un corpo C realizzato con un materiale qualunque; per semplicità, supponiamo che la sua forma sia quella di una lastra piana. Supponiamo che il corpo sia investito da radiazione elettromagnetica (luce, o radiazione infrarossa, ecc.) di lunghezza d'onda λ, e che tale radiazione incida con angolo θ rispetto alla normale $\hat{n}$ alla superficie del corpo.

Se indichiamo con I l'intensità della radiazione (cioè l'energia incidente per unità di tempo sull'unità di superficie ortogonale alla direzione in cui la radiazione viaggia) in generale una certa frazione di I con intensità I_R viene riflessa, una certa frazione con intensità I_T attraversa il corpo, e una certa frazione con intensità I_A viene assorbita dal corpo stesso.

Per la conservazione dell'energia si ha:

$$I = I_R + I_T + I_A \qquad \text{[III.19]}$$

da cui

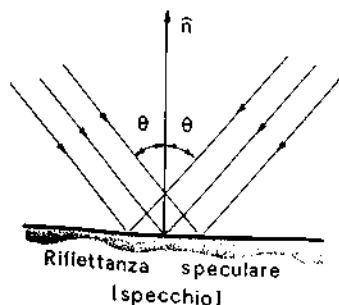
$$1 = \frac{I_R}{I} + \frac{I_T}{I} + \frac{I_A}{I}$$

I rapporti

$$\frac{I_R}{I},\ \frac{I_T}{I},\ \frac{I_A}{I}$$

dipendono in generale sia dalla lunghezza d'onda λ della radiazione che dall'angolo di incidenza θ. Essi vengono indicati usualmente con

$$\frac{I_R}{I} = r(\lambda,\theta);\ \frac{I_T}{I} = t(\lambda,\theta)\ \text{e}\ \frac{I_A}{I} = a(\lambda,\theta)$$

Riflettanza speculare (specchio)

e vengono detti rispettivamente *riflettanza, trasparenza*, e *assorbanza* del corpo in esame per radiazione di lunghezza d'onda λ incidente secondo l'angolo θ.

Riflettanza diffusa (superficie bianca)

Se la radiazione riflessa è riflessa allo stesso angolo si parla di *riflettanza speculare*; altrimenti si parla di *riflettanza diffusa*.

La [III.19] può essere scritta come:

$$r + t + a = 1 \qquad [III.20]$$

Un corpo per cui $r(\lambda, \theta) = 1$ (e dunque $t(\lambda, \theta) = 0$ e $a(\lambda, \theta) = 0$) viene detto *perfettamente riflettente* (speculare o diffondente a seconda dei casi) per radiazione di quella lunghezza d'onda incidente a quell'angolo; un corpo per cui $t(\lambda, \theta) = 1$ (e dunque $r(\lambda, \theta) = 0$; $a(\lambda, \theta) = 0$) viene detto *perfettamente trasparente*; un corpo per cui $a(\lambda, \theta) = 1$ ($t(\lambda, \theta) = 0$; $r(\lambda, \theta) = 0$) viene detto *perfettamente assorbente* per quella lunghezza d'onda incidente a quell'angolo.

Riflettanza.
Superfici riflettenti e diffondenti.
Trasparenza.
Superfici trasparenti.
Assorbanza.
Superfici assorbenti.

Le proprietà ottiche a, t ed r di un corpo dipendono in generale anche dalla sua temperatura.

Si dice che un corpo è nero se esso assorbe completamente la radiazione elettromagnetica di qualsivoglia lunghezza d'onda incidente su di esso a qualunque angolo ($a(\lambda, \theta) = 1$ per ogni λ e per ogni θ).

Corpo nero.

III.4.2. **Potere emissivo di un corpo nero.** È stato osservato sperimentalmente – ed è stato teoricamente dedotto da M. Planck – che un corpo nero emette (isotropicamente in ogni direzione) radiazione elettromagnetica secondo lo spettro:

Spettro di corpo nero.

$$f_n(\lambda) = \frac{C_1}{\lambda^5 (\exp(C_2/\lambda T) - 1)} \qquad \begin{aligned} C_1 &= 3{,}7405 \cdot 10^{-16}\ W\mathrm{m}^2 = 8\pi h c \\ C_2 &= 0{,}0143879\ \mathrm{m\,K} = hc/k \end{aligned} \qquad [III.21]$$

Funzione di Planck.

con h costante di Planck, k costante di Boltzmann, c velocità della luce. Il significato della [III.21] è che la $f_n(\lambda)$, calcolata per un certo valore $\bar{\lambda}$ di λ e moltiplicata per $d\lambda$, fornisce la quantità di energia che il corpo nero irraggia per unità di superficie nell'unità di tempo e nell'intervallo di lunghezza d'onda compresa fra $\bar{\lambda}$ e $\bar{\lambda} + d\lambda$:

$$f_n(\bar{\lambda}) \cdot d\lambda = E(\bar{\lambda} \div \bar{\lambda} + d\lambda). \qquad [III.22]$$

potere emissivo spettrale del corpo nero

Come si vede, la *funzione di Planck* [III.21] dipende dalla temperatura Kelvin T del corpo. Il suo andamento con λ, per alcuni valori della temperatura, è quello mostrato in figura.

Integrando la [III.21] rispetto a λ per un dato valore di T si trova l'energia F_n complessivamente irraggiata nell'unità di tempo dal corpo nero (unità di superficie) a quella temperatura su tutte le lunghezze d'onda. Tralasciando il calcolo, si trova

$$F_n = \int_0^\infty f_n(\lambda)\, d\lambda = \sigma T^4$$

$$\boxed{P_n = S F_n = S \sigma T^4} \qquad [III.23]$$

P_n è la potenza irraggiata da tutta la superficie del corpo, S è la superficie del corpo, T la sua temperatura assoluta e σ è una costante universale (di

Legge di Stefan Boltzmann.

Stefan Boltzmann) che vale $\sigma = 5{,}6697 \cdot 10^{-8}$ W/m² K⁴. La [III.23] è detta *legge di Stefan Boltzmann.* Come risulta dalla III.23, la potenza unitaria $F_n = \frac{P_n}{S} = \sigma T^4$ aumenta molto rapidamente all'aumentare della temperatura assoluta. Ad esempio, per $T = 300$ K la potenza (energia per unità di tempo) irraggiata per unità di superficie è $F_n(300) \simeq 460$ W/m²; per $T = 1000$ K, $F_n(1000) \simeq 56{,}7$ kW/m².

Energia irraggiata dal sole.

L'intensità della radiazione emessa dal sole (la cui temperatura superficiale è circa 6000 gradi) è di oltre 10 MW/m²; ma alla distanza a cui si trova la terra (circa $150 \cdot 10^6$ km) l'intensità è scesa a circa 1350 W/m², e diviene circa 1000 W/m² dopo aver attraversato perpendicolarmente l'atmosfera a cielo sereno.

Derivando la $f(\lambda)$ [III.21] rispetto a λ ed uguagliando a zero, si ottiene il valore di λ (λ_{max}) in corrispondenza del quale lo spettro di corpo nero ha il suo massimo di intensità. Si ottiene

$$\lambda_{max} = \frac{2897{,}8\ \mu m \cdot K}{T} \qquad [III.24]$$

Legge di Wien.

La [III.24] rappresenta la cosiddetta *legge di Wien*, che mostra come all'aumentare della temperatura il massimo dello spettro di emissione (e tutto lo spettro nel suo insieme) si sposti verso le piccole lunghezze d'onda. Ad esempio per $T = 300$ K ($\simeq 27$°C) il massimo dello spettro si presenta per $\lambda \simeq 9.7$ μm (spettro infrarosso). Per $T = 1000$ K ($\simeq 727$°C) il massimo si ha per $\lambda \simeq 3$ μm: lo spettro è ancora composto soprattutto da radiazione infrarossa, tuttavia il suo bordo inferiore già entra nella zona del visibile e il corpo (*rovente*) appare rosso. Per $T = 6000$ K (spettro solare) il massimo è a circa 0.5 μm $\simeq$ 5000 Å, ed è dunque centrato col suo massimo in mezzo alla cosiddetta *banda visibile* (che è compresa fra 0.38 μm del violetto e 0.78 μm del rosso).

Scambi termici radiativi.

Emittanza spettrale.

III.4.3. **Emittanza spettrale e scambi termici radiativi.** Le caratteristiche di emissione di un corpo qualunque (non nero) sono specificate da una sua proprietà detta *emittanza spettrale*. L'*emittanza spettrale* è un numero puro $\varepsilon(\lambda)$ funzione della lunghezza d'onda, definito dalla relazione

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{f_n(\lambda)} \qquad [III.25]$$

$\varepsilon(\lambda)$ è cioè *il rapporto fra lo spettro* $f(\lambda)$ *emesso dal corpo in esame e quello* $f_n(\lambda)$ *emesso da un corpo nero alla stessa temperatura.* Si dimostra che l'emittanza $\varepsilon(\lambda)$ è pari alla assorbanza $a(\lambda)$ che il corpo presenta a quella temperatura integrata su tutto l'angolo solido Ω $\left(a(\lambda) = \int a(\lambda, \theta)\, d\Omega\right)$

Legge di Kirchoff.

(*legge di Kirchoff*) (*):

$$\varepsilon(\lambda) = a(\lambda) \qquad [III.26]$$

(*) La legge di Kirchoff si dimostra facilmente per assurdo: mettendo un corpo a temperatura T all'interno di una cavità alla stessa temperatura T, se il corpo avesse emittanza ε minore della sua assorbanza a esso si riscalderebbe (e viceversa se fosse $\varepsilon > a$) e ciò – come vedremo – è contrario al secondo principio della termodinamica perché non possono aversi trasferimenti di calore fra due corpi posti inizialmente alla stessa temperatura.

Se l'emittanza spettrale non dipende dalla lunghezza d'onda, il corpo si dice *grigio* ($\varepsilon(\lambda) = \varepsilon$ = cost).

Corpo grigio.

Il calcolo degli scambi termici radiativi fra due corpi può essere effettuato con relativa semplicità quando si tratti di corpi grigi; la potenza termica scambiata dipende (oltre che dalle temperature T_1 e T_2 dei due corpi), dalle loro emittanze ε_1 ed ε_2, dalle aree S_1 ed S_2 sotto cui un corpo «vede» l'altro (vedi figura), e dalla loro distanza relativa r. Più precisamente, si ha che la potenza termica scambiata P (da quello più caldo a temperatura T_1 a quello più freddo a temperatura T_2) è data da:

Scambi termici radiativi fra corpi grigi.

$$P = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2} + \dfrac{1}{F}} \qquad \text{[III.27]}$$

dove

$$F = \int_{S_1}\int_{S_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \, dS_1 dS_2}{\pi r^2}$$

Alla [III.27] si arriva integrando la potenza irraggiata da S_1 che colpisce S_2 e viene da essa assorbita, e sottraendo a questa la potenza irraggiata da S_2 che colpisce S_1 e viene da questa assorbita.

Due casi notevoli semplici e importanti sono i seguenti:

a) *Superfici piane parallele estese di area S* (dimensioni lineari grandi rispetto alla loro distanza).

La [III.27] si riduce a

Scambi termici radiativi fra superfici piane parallele.

$$F = \frac{P}{S} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1} \qquad \text{[III.28]}$$

Se T_1 non è molto diverso da T_2 $\left(T_1 - T_2 << \bar{T}\text{, dove } \bar{T} = \dfrac{T_1 + T_2}{2}\right)$ la [III.28] può essere scritta approssimativamente come:

$$\left.\begin{aligned} F &\simeq H_r (T_1 - T_2) = H_r \Delta T \\ H_r &= \frac{4\sigma \bar{T}^3}{\dfrac{1}{\sigma_1} + \dfrac{1}{\sigma_2} - 1} \end{aligned}\right\} \qquad \text{[III.29]}$$

Alla [III.29] si arriva ponendo nella [III.28]

$$T_1 = \bar{T} + \frac{\Delta T}{2}; \; T_2 = \bar{T} - \frac{\Delta T}{2}$$

e trascurando termini di ordine superiore al primo in $\dfrac{\Delta T}{\bar{T}}$

Per $\bar{T} \simeq 300$ K, H_r risulta dell'ordine di $5 \dfrac{W}{m^2\,°C}$.

b) *Corpo piccolo di temperatura T_1 immerso dentro una grande cavità a temperatura T_2 ($S_1 << S_2$).*

$$P = S_1 \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \qquad [III.30]$$

dove S_1 è la superficie del corpo immerso nella cavità ed ε_1 la sua emittanza. Nel caso che $T_1 - T_2 << \bar{T}$, possiamo scrivere (analogamente alla [III.29]):

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{P}{S_1} = H_r (T_1 - T_2) \\ H_r &= \varepsilon_1 4 \sigma \bar{T}^3 \end{aligned}\right\} \qquad [III.31]$$

L'emittanza media di un certo numero di materiali a temperatura ambiente è riportata in tabella III.2.

Esempio

Scambi termici radiativi attraverso una finestra con doppi vetri.

E.III.3. *Una finestra monta doppi vetri. Se i due vetri si trovano rispettivamente a temperatura di 10°C e 20°C, quale potenza termica si scambiano per irraggiamento per unità di superficie? A quanto scende tale potenza se uno dei due vetri è trattato, internamente, con ossido di stagno?*

Dalla [III.28] si ha:

$$F = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \frac{(293^4 - 283^4 K^4)}{\dfrac{1}{0{,}9} + \dfrac{1}{0{,}9} - 1} = 44{,}6 \frac{W}{m^2}$$

Usando la [III.29] si ha invece:

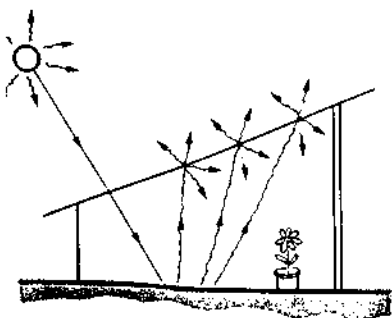
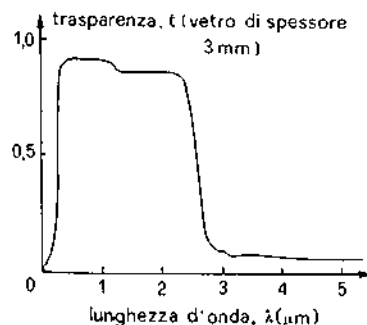
$$H_r = 4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \frac{288^3 K^3}{\dfrac{1}{0{,}9} + \dfrac{1}{0{,}9} - 1} = 4{,}46 \frac{W}{m^2 K}$$

Se uno dei vetri è trattato con ossido di stagno, si ha $\sigma_1 = 0{,}9$ ma $\sigma_2 = 0{,}2$; H_r si riduce pertanto a $1{,}06 \dfrac{W}{m^2 K}$; e dunque $F = 10{,}6$ W/m².

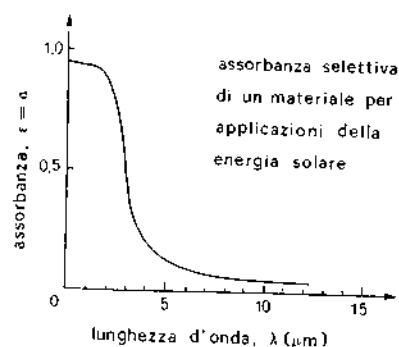
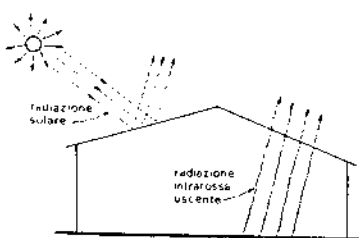
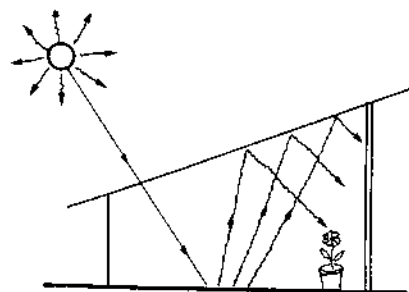
III.5. Materiali selettivi

Un materiale le cui proprietà ottiche (assorbanza a uguale alla emittanza ε; trasparenza t; riflettanza r) dipendono dalla lunghezza d'onda λ viene comunemente detto un materiale *selettivo*.

I materiali selettivi hanno alcune notevoli applicazioni.

Una lastra sottile di vetro (così come di molti materiali plastici, come plexiglass, PVC, ecc.) presenta una trasparenza selettiva: essa è trasparente per $\lambda \leq 2.5\ \mu m$ ($t \simeq 0.85$), mentre diviene opaca ($t = 0$) per $\lambda > 3\ \mu m$. Essa può essere pertanto impiegata per il cosiddetto *effetto serra*: essa lascia entrare in una serra la radiazione solare, ma «intrappola» la radiazione infrarossa che l'ambiente interno, a temperatura dell'ordine di 300 K, emette su lunghezze d'onda centrate intorno a $\simeq 10\ \mu m$ (vedi figura),

L'effetto serra sarebbe ancora più efficace se il vetro fosse trattato internamente con ossido di stagno, riflettente la radiazione infrarossa. Mentre infatti in una serra di vetro normale la radiazione infrarossa in uscita viene assorbita dal vetro, e poi riemessa in parte verso l'interno ma in parte anche verso l'esterno, in una serra di vetro trattato con ossido di stagno la radiazione uscente viene riflessa quasi tutta verso l'interno (vedi figura).

Sono state sperimentate anche *serre inverse*: un film sottile di materiale plastico (polietilene) trasparente alla radiazione infrarossa, se colorato con opportuni pigmenti bianchi, riflette la radiazione solare in ingresso ma lascia uscire la radiazione infrarossa in uscita, mettendo così l'ambiente interno in interazione termica con il cielo freddo (vedi § III.6.). Un ambiente ombreggiato con un telone realizzato con tale materiale può risultare *naturalmente condizionato*.

Altre superfici selettive vengono usate nelle *applicazioni dell'energia solare*. Una lastra nera (a = 1 per ogni lunghezza d'onda) assorbe la radiazione solare e così si riscalda; ma avendo anche ε = 1, via via che la sua temperatura sale esso irraggia una quantità crescente di radiazione infrarossa; e la sua temperatura di equilibrio è solo poche decine di gradi superiore rispetto alla temperatura ambiente. Se l'assorbanza a (e dunque anche l'emittanza ε) ha l'andamento mostrato in figura, la superficie assorbe ancora la radiazione solare; ma emette molto poca radiazione infrarossa. All'equilibrio la superficie raggiunge una temperatura di molte decine di gradi; e se essa è protetta frontalmente da un vetro, che assicura l'effetto serra, essa può raggiungere una temperatura dell'ordine di duecento gradi.

III.6. Il bilancio termico della terra

Il bilancio termico della terra.

Il bilancio termico della terra, che è immersa nello spazio vuoto e non è dunque soggetta a scambi termici conduttivi né convettivi, è determinato dai suoi scambi termici radiativi: essa riceve energia dal sole, ed emette radiazione infrarossa verso lo spazio cosmico che è equivalente a un corpo nero alla temperatura T_0 di circa 3 gradi assoluti (*) (dunque invia verso la terra nell'unità di tempo una quantità di energia la cui densità per m², pari a σT_0^4, è praticamente trascurabile).

Come abbiamo già anticipato, l'intensità I_S della radiazione solare, quando arriva alla distanza di circa $150 \cdot 10^6$ km cui la terra si trova, è di circa 1350 W/m². Essendo il raggio della terra circa 6300 km, essa è «vista» dalla radiazione solare come un disco di area $S_n = \pi R^2 = 3{,}14\ (6300 \cdot 10^3)^2\ \mathrm{m}^2 \simeq 125 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}^2$, ed intercetta dunque una potenza (energia per unità di tempo) pari a $I_S \cdot S_n \simeq 170 \cdot 10^{15}\ W$.

Energia solare intercettata dalla terra.

Tuttavia una frazione di questa energia ($\simeq$ 25%) viene assorbita dall'atmosfera; e di quella che arriva sulla terra, una certa frazione ($\simeq$ 30%) viene riflessa, non essendo la superficie terrestre nera per la radiazione

(*) Ci potremmo aspettare che lo spazio vuoto avesse una temperatura di 0 gradi assoluti, cioè che non fornisse alcuna energia radiante assorbendo invece tutta quella ad esso inviata. In realtà è stato dimostrato sperimentalmente che lo spazio cosmico è uniformemente riempito dalla radiazione cosiddetta *fossile*, cioè dal residuo della primitiva esplosione («Big Bang») da cui ha avuto origine il presente ciclo di vita dell'universo: ciò fornisce ad esso una temperatura equivalente che non è rigorosamente nulla, pur essendo assai bassa, intorno ai 3 K.

Potenza termica irraggiata dalla terra.

solare. La potenza solare W_S assorbita dalla terra è dunque pari circa a $W_S \simeq 65 \cdot 10^{15}$ W. La potenza termica W_T che la terra irraggia è invece data da

$$W_T = \varepsilon \sigma S T^4 \simeq 0{,}9 \cdot 6 \cdot 4\pi R^2 \cdot T^4 \simeq 2{,}5 \cdot 10^7 T^4 W$$

All'equilibrio, ci aspettiamo che sia $W_S = W_T$, da cui ricaviamo per la temperatura della superficie terrestre

Temperatura di equilibrio della terra.

$$T^4 = \frac{65 \cdot 10^{15}}{2{,}5 \cdot 10^7} \mathrm{K}^4; \ T = \sqrt[4]{26 \cdot 10^8} = 226 \mathrm{~K} \simeq -47°\mathrm{C}$$

Questa temperatura è molto più bassa di quella reale, che come sappiamo si aggira intorno a 290 K. La discrepanza è dovuta al fatto che l'*atmosfera che avvolge la terra realizza intorno ad essa una sorta di effetto serra*: essa è infatti piuttosto ben trasparente per la radiazione solare che entra, ma è invece piuttosto opaca per la radiazione infrarossa che esce.

La trasparenza dell'atmosfera in funzione della lunghezza d'onda λ è mostrata in figura.

Finestra di trasparenza atmosferica.

Come si vede, oltre i 3 μm, la trasparenza è pittosto ridotta, se si esclude la banda di lunghezza d'onda compresa fra 8 e 13 μm (*finestra di trasparenza atmosferica*). Poiché attraverso la finestra di trasparenza un corpo esposto al cielo sereno interagisce anche con lo spazio freddo, il cielo stesso equivale a un corpo con temperatura più bassa rispetto a quella dell'aria ambiente.

L'inverno nucleare.

Il bilancio termico della terra dipende in maniera assai critica dalla trasparenza atmosferica. Se si avesse un fenomeno di immissione di polvere nell'atmosfera (così come è stato osservato, se pure su aree geografiche limitate, per conseguenza di violente eruzioni vulcaniche) diminuirebbe la trasparenza alla radiazione solare, e la temperatura ambiente diminuirebbe. È stato calcolato che i grandi «funghi» di pulviscolo sollevati dalle esplosioni provocherebbe, in caso di guerra nucleare, un lungo micidiale rigidissimo inverno su tutto il pianeta.

Inquinamento termico da anidride carbonica.

Viceversa, l'immissione in atmosfera di altri inquinanti (fra cui alcuni non nocivi dal punto di vista chimico, come l'anidride carbonica) diminuirebbe la trasparenza infrarossa dell'atmosfera stessa, rendendo così più pronunciato il suo effetto serra: la terra si riscalderebbe con conseguenze ancora una volta deleterie sull'equilibrio degli ecosistemi, e con pericoli per la stessa sopravvivenza di molte specie animali e vegetali.

III.7. Il bilancio termico di un corpo umano

Bilancio termico del corpo umano.

Anche il bilancio termico di un sistema vivo – e in particolare del corpo umano – è regolato dalle leggi della termodinamica. Poiché la temperatura del corpo umano è costante (pari a circa 37°C), la sua energia interna è costante; e dunque – in virtù del primo principio della termodinamica – il bilancio dell'energia scambiata con l'ambiente deve andare in pareggio.

Il *metabolismo* (cioè in sostanza la combustione che il corpo compie del «combustibile» contenuto nei cibi) fornisce in continuazione energia. In condizioni di riposo, in un corpo di taglia media il metabolismo fornisce una potenza W_m di circa 110 W; quando il corpo compie qualche attività

tale potenza aumenta, e per tempi sufficientemente brevi (ad esempio durante una corsa veloce) può raggiungere il livello di molte centinaia di watt (vedi figura).

Questa energia deve essere dissipata dal corpo verso l'ambiente esterno attraverso i meccanismi della conduzione (che per altro, essendo il corpo immerso normalmente nell'aria, contribuisce in misura trascurabile), della convezione e dell'irraggiamento.

Come abbiamo visto nei paragrafi III.4. e III.5., gli scambi termici convettivi e radiativi possono essere descritti, per piccoli valori della differenza di temperatura ΔT, attraverso il coefficiente di scambio convettivo H_c $\left(\text{il cui valore è dell'ordine di } 1{,}5 \frac{W}{m^2\,°C}\right)$ e il coefficiente di scambio radiativo H_r $\left(H_r \simeq 5 \frac{W}{m^2\,°C}\right)$.

Pertanto il bilancio termico del corpo (nudo) può essere scritto come:

$$W_m = S\,(H_c + H_r)\,\Delta T \quad (S \text{ superficie del corpo}).$$

Il valore ottimale di ΔT è dato dunque da:

$$\Delta T = \frac{W_m}{(H_c + H_r)\,S}$$

Se il corpo è a riposo ($W_m \simeq 110\ W$), e per un corpo di taglia normale ($S \simeq 1{,}5\ m^2$), ΔT ottimale è dato da:

$$(T_{\text{corpo}} - T_{\text{ott.}}) = \Delta T_{\text{ott}} = \frac{110}{6{,}5 \cdot 1{,}5} = 11°C\,.$$

La temperatura ambiente ottimale T_{ott} è dunque

Temperatura ambiente ottimale.

$$T_{\text{ott}} = T_{\text{corpo}} - 11°C \simeq 26°C\,.$$

Se la temperatura ambiente è più bassa, il corpo dissipa troppa energia e tende a raffreddarsi: o ci si copre con indumenti più o meno pesanti, o il metabolismo deve intensificarsi e si avverte disagio. Coi vestiti usati normalmente in inverno nelle case, la temperatura di confortevolezza è di circa 20°C. Se la temperatura è troppo bassa e non ci si può coprire, si può arrivare al punto che il funzionamento dell'organismo vada in crisi.

Quando si compie una intensa attività fisica, occorre dissipare una maggiore quantità di energia; la temperatura ambiente corrispondente alla confortevolezza fisiologica diviene più bassa, e a parità di temperatura si sente l'esigenza di scoprirsi.

Va notato che il bilancio termico del corpo è dominato dagli scambi radiativi: la confortevolezza è determinata dunque non solo dalla temperatura dell'aria, ma anche e soprattutto da quella delle pareti dell'ambiente in cui ci si trova, pareti con le quali si scambia calore per irraggiamento. In vicinanza di una grande parete vetrata (fredda), ad esempio, si avverte in inverno sensazione di freddo anche se la temperatura dell'aria non è inferiore a 20°C.

Quando la temperatura dell'aria sale al di sopra di 27°C, si comincia ad avere sensazione di caldo. Il corpo emette sudore in modo che l'evapora-

zione (un processo che è *endotermico*, cioè ha luogo assorbendo calore) aiuti la dissipazione di calore da parte del corpo. La confortevolezza è favorita in queste condizioni anche da movimenti dell'aria (ventilazione), che aumentano il valore del coefficiente di scambio termico per convenzione ed evaporazione. *Quando la temperatura ambiente supera i 30°C, il* meccanismo dominante di dissipazione del calore resta l'evaporazione. Poiché l'evaporazione è tanto più rapida quanto meno elevato è il tasso di umidità presente nell'aria, il parametro dominante a determinare la confortevolezza fisiologica diviene – ancor più che la temperatura – l'umidità relativa dell'aria nell'ambiente.

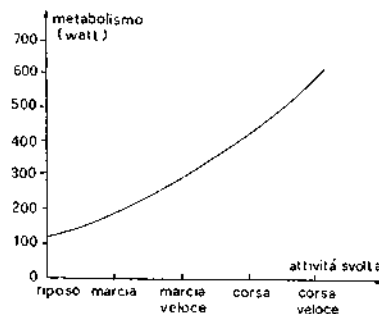



Tabella III.1

Conducibilità, Calore specifico e Densità di alcuni materiali di interesse

Materiale	Conducibilità W/m °C	Calore specifico J/Kg °C	Densità Kg/m^3
Metalli			
Acciaio (0,1% C)	45,4	478	7850
Alluminio	209	896	2700
Ferro	58	435	7850
Ghisa (4% C)	52	540	7250
Ottone	99	381	8500
Piombo	35	130	11300
Rame	349	385	8900
Zinco	110	393	7100
Materiali da costruzione			
Ardesia	1,98	920	2700
Arenaria	1,63	921	2250
Argilla secca	0,93	921	1780
Calce	0,9	837	2000
Calcestruzzo			
armato	1,51	800	2400
cellulare	0,23	837	600
magro	0,93	850	1800
ordinario	1,28	879	2200
Ceramica	1,16	922	2400
Gesso			
normale	0,43	8088	1240
cellulare	0,064	1088	200
in pannelli leggeri	0,24	1088	65
Gomma per pavimenti	0,30	1423	1200
Granito	3,14	712	2500
Gres	1,10	920	1900
Intonaco			
calce e sabbia	0,80	837	1800
gesso e sabbia	0,81	963	1670
cemento e sabbia	1,4	837	2200
Laterizi	0,9	700-900	1900
Linoleum	0,186		1200
Marmo	3,37	795	2700

Segue: **Tabella III.1**

Conducibilità, Calore specifico e Densità di alcuni materiali di interesse

Materiale	Conducibilità W/m °C	Calore specifico J/Kg °C	Densità Kg/m³
segue: *Materiali da costruzione*			
Mattoni	0,8	837	1800
Porcellana	1,05	921	2600
Terracotta piastrelle	0,93		1800
Terreno			
secco	0,80	1840	2580
bagnato	2,3	3010	2580
Tufo	0,6	900	1500
Vetro	0,93	750	2500
Materiali isolanti			
Amianto cartone	0,20	1045	970
Carta macerata per riempimento	0,040	1340	56
Cenere di legno	0,16	837	500
Feltri di crine e cotone	0,047	1340	270
Fibra di vetro	0,035	837	70
Gomma schiuma	0,030		70
Gesso e vermiculite	0,10		500
Legno (segatura o fibre compresse)	0,06	2510	300
Lana di roccia	0,035	750	150
Perlite			
sfusa	0,044		140
con cemento	0,10		500
Pomice conglomerata con cemento cellulare	0,17	837	650
Polistirolo espanso	0,035	837	25
Poliuretano espanso	0,026	837	35
Stiferite	0,023		40
Sughero e catrame	0,060	2010	150
Torba in lastra	0,060	1880	100
Vermiculite			
espansa	0,07		120
conglomerata con cemento	0,09		300
Vetro cellulare espanso	0,056	837	140
Aria (1 atm)	0,026	1010	1,29

Tabella III.2

Emittanza media di diversi materiali di uso comune (a temperatura ambiente)

Materiale		Emittanza $\bar{\varepsilon}$
Acciaio	lucidato	0,30
	ossidato	0,90
	zincato	0,28
Acqua		0,96
Alluminio	lucidato	0,05
	ossidato	0,20
	anodizzato a 540°C	0,94
Argento	lucidato	0,01
Asfalto		0,93
Carbonio		0,80
Carta	bianca	0,90
Cartone	per copertura	0,93
Cemento-amianto rosso		0,90
Cromo	lucidato	0,08
Ferro	lucidato	0,06
	ossidato	0,63
	zincato	0,25
Ghiaccio		0,97
Intonaco		.92
Lacca di alluminio		0,65
Legno		0,90
Molibdeno		0,06
Mattoni		0,90
Marmo		0,95
Nerofumo		0,96
Neve		0,96
Ottone	lucidato	0,10
	ossidato	0,61
Pitture ad olio		0,94
Rame	lucidato	0,04
	ossidato	0,87
Smalto		0,95
Vetro		0,90
Zinco	lucidato	0,02
Ossido di stagno (trasparente)		0,20

Tabella III.3

Assorbanza approssimata per alcuni materiali, integrata su tutto lo spettro di corpo nero alla temperatura indicata

	Intervallo di temp. T, K	Assorbanza
Metalli lucidati		
Alluminio	523 ÷ 873	0,039 ÷ 0,057
Cromo	323 ÷ 823	0,080 ÷ 0,260
Ferro	423 ÷ 1273	0,050 ÷ 0,370
Nichel	293 ÷ 623	0,045 ÷ 0,087
Ottone	523 ÷ 673	0,033 ÷ 0,037
Rame	373	0,018
Zinco	523 ÷ 623	0,045 ÷ 0,053
Filamenti		
Molibdeno	1023 ÷ 2873	0,096 ÷ 0,290
Platino	303 ÷ 1473	0,036 ÷ 0,190
Tantalio	1573 ÷ 3273	0.190 ÷ 0,310
Tungsteno	303 ÷ 3573	0,032 ÷ 0,350
Altri materiali		
Amianto	313 ÷ 623	0,930 ÷ 0,950
Ghiaccio (umido)	273	0,970
Nerofumo	293 ÷ 623	0,950
Gomma (grezza)	298	0,860

Tabella III.4

Fattori di conversione di unità di misura per la conducibilità termica

	$\frac{\text{watt}}{\text{cm K}}$	$\frac{\text{watt}}{\text{m K}}$	$\frac{\text{cal}}{\text{cm sec K}}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{m sec K}}$
$\frac{\text{watt}}{\text{cm K}}$	1	100	0,239	86,04
$\frac{\text{watt}}{\text{m K}}$	1×10^{-2}	1	$2,39 \times 10^{-3}$	0,8604
$\frac{\text{cal}}{\text{cm sec K}}$	4,184	418,4	1	360,0
$\frac{\text{kcal}}{\text{m sec K}}$	$1,162 \times 10^{-2}$	1,162	$2,778 \times 10^{-3}$	1

Esercizi del capitolo III

III.1. Una parete è costituita di tre strati: uno strato di mattoni, di spessore d_1 = 10 cm; uno strato di poliuretano espanso, di spessore d_2 = 8 cm; e uno strato di mattoni intonacati di spessore complessivo pari a 12,5 cm. Calcolare la conduttanza unitaria.
Se la faccia esterna si trova a temperatura T_1 = 20°C e la faccia interna a T_2 = 5°C, quale è il flusso W di potenza termica a regime attraverso l'unità di area? Quali sono le temperature T_3 e T_4 sulle superfici di separazione dei vari strati? (Risposte: 0,30 W/m^2 °C; 4,5 W/m^2; 19,3°C e 5,5°C)

III.2. Una parete ha una intercapedine d'aria di spessore d = 10 cm. Se le due facce dell'intercapedine si trovano rispettivamente a temperatura T_1 = 15°C e T_2 = 8°C, quale è la potenza termica W, riferita all'unità di area, che si scambia fra le due facce rispettivamente per convezione e per irraggiamento? (Risposte: 8,4 W/m^2; 30,1 W/m^2)

III.3. Risolvere l'esercizio III.1. nell'ipotesi che lo strato di poliuretano espanso sia sostituito con una intercapedine d'aria di pari spessore.
(Risposte: 2,16 W/m^2 °C; 32,4 W; 14,9°C e 9,1°C)

III.4. Calcolare la potenza che si scambia fra le due facce della intercapedine di cui all'esercizio III.2. nell'ipotesi che al centro dell'intercapedine sia disposto uno schermo di cartone di spessore trascurabile (emittanza 0.90).
(Risposta: 18,9 W/m^2)

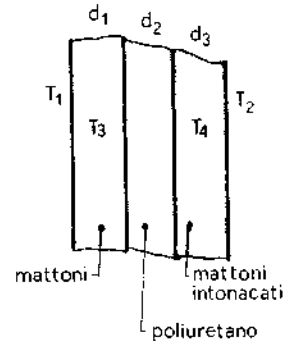
III.5. Calcolare la potenza che si scambia fra le due facce dell'intercapedine di cui all'esercizio III.4. nell'ipotesi che lo schermo sia ora di alluminio lucidato.
(Risposta: 4,9 W/m^2)

III.6. Una parete molto spessa di cemento armato affaccia su un ambiente la cui temperatura $T(t)$ varia con legge sinusoidale intorno a un valor medio T_0 15°C, con una ampiezza ΔT = 7°C e un periodo τ di 24 ore. Calcolare l'andamento della temperatura – a regime – su una superficie parallela alla faccia esterna e disposta a d = 30 cm da essa all'interno della parete.

III.7. Una finestra ha un vetro di spessore d = 5 mm. All'interno la temperatura è T_i = 20°C e l'aria è calma; all'esterno la temperatura è T_e = 0°C e spira un vento con velocità v = 20 km/h.
Calcolare la potenza termica W trasmessa dall'unità di area della finestra.
(Risposta: 106 W/m^2)

III.8. Calcolare la potenza termica W trasmessa attraverso l'unità di area della finestra di cui all'esercizio III.7, nell'ipotesi che essa sia dotata di doppi vetri a una distanza di 3 cm uno dall'altro (si tenga conto sia della convezione che dell'irraggiamento). (Risposta: 43 W/m^2)

III.9. Calcolare la potenza termica dissipata dalla finestra di cui all'esercizio III.8. nell'ipotesi che fra i due vetri venga fatto il vuoto.
(Risposta: 37 W/m^2)

III.10. Calcolare la potenza termica dissipata dalla finestra nell'ipotesi che venga applicato uno strato di ossido di stagno:
a) sulla faccia del vetro esterno che affaccia verso l'ambiente esterno;
b) sulla faccia del vetro interno che affaccia verso l'ambiente interno;
c) sulla faccia del vetro interno che affaccia verso il vetro esterno;
d) su entrambe le facce dei due vetri che affacciano fra di loro.
(Risposte: 42,8; 31,3; 25,8; 22,8 W/m^2)

III.11. Due lastre piane parallele di alluminio lucidato, separate da aria, sono disposte orizzontalmente a una distanza $d = 10$ cm; quella inferiore si trova a $T_1 = 10$°C; quella superiore a $T_2 = 30$°C. Calcolare la potenza termica W che si scambiano per unità di area in virtù dei meccanismi di conduzione, convezione e irraggiamento. (Risposta: 7,6 W/m^2)

III.12. Calcolare la potenza che si scambiano le due lastre di cui al precedente esercizio nel caso che quella superiore sia fredda e quella inferiore calda. (Risposta: 72,5 W/m^2)

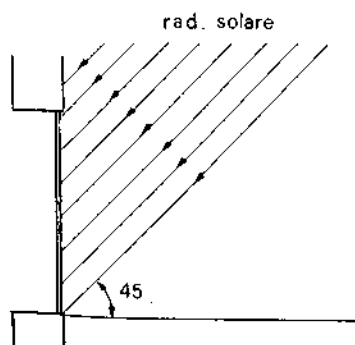
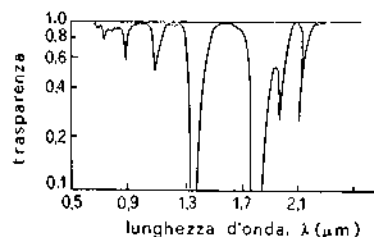
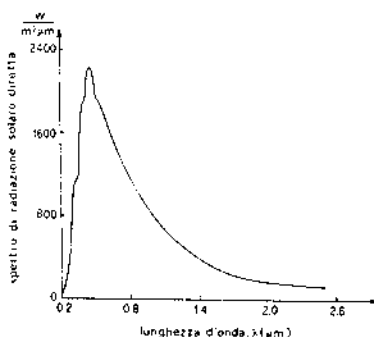
III.13. Calcolare la potenza che si scambiano le due lastre di cui al precedente esercizio nel caso che esse vengano anodizzate. (Risposta: 166 W/m^2)

III.14. Un uomo, correndo al piccolo trotto alla velocità di 10 km/h, ha un metabolismo di circa 250 W. Se anziché alimentarsi di normale cibo si alimentasse con gasolio (il cui calore di combustione è di circa 10.000 kcal/kg), quanti chilometri percorrerebbe quell'uomo con un kg di gasolio? (Risposta: 465 Km)

III.15. Il raggio equivalente del Sole è di circa $R_s = 700.000$ km, e la sua temperatura superficiale è $T_s = 5760$ K. Quale è la potenza totale W_s che esso emette per irraggiamento? Quale frazione F di essa è intercettata dalla Terra il cui raggio è circa $R_T = 6300$ km, e la cui distanza media dal Sole è circa $d_S = 150 \cdot 10^6$ km)? (Risposte: $3{,}6 \cdot 10^{26}$ W; $4{,}4 \cdot 10^{-10}$)

III.16. L'irradianza spettrale del sole (intensità per unità di intervallo di lunghezza d'onda) al di fuori della atmosfera terrestre è quella mostrata in figura. Calcolare in maniera approssimata la frazione di energia contenuta all'interno dello spettro visibile ($0{,}38\ \mu\mathrm{m} \leq \lambda \leq 0{,}78\ \mu\mathrm{m}$).

III.17. La trasparenza tipica dell'atmosfera serena a radiazione di lunghezza d'onda compresa fra 0,5 μm e 2 μm è quella mostrata in figura (le «bande» di assorbimento sono dovute a vapor d'acqua). Valutare come lo spettro solare viene modificato a livello del suolo, tenendo conto anche di una attenuazione per un fattore 0,9 dovuta alla diffusione dei raggi solari come effetto aggiuntivo rispetto all'assorbimento da vapor d'acqua.

III.18. Una radiazione solare di intensità $\Phi = 700$ W/m^2 incide su un vetro di finestra con un angolo di incidenza $\theta = 45°$. Se il 15% della radiazione viene assorbito dal vetro, calcolare la temperatura di regime raggiunta dal vetro se la temperatura dell'ambiente (sia interno che esterno) è di 20°C. (Si usi il coefficiente di scambio di figura III.4. in corrispondenza di una velocità del vento nulla). (Risposta: 25°C)

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo III

III.1. Vedi l'esempio E.III.1.

III.2. Si veda la «conduttanza convettiva» di una intercapedine verticale in figura III.2; e per l'irraggiamento si usi la [III.29].

III.3. L'esercizio si risolve come l'esercizio III.1, usando per l'intercapedine la conduttanza ricavata nell'esercizio III.2.

III.4. Il calcolo si fa considerando l'intercapedine come una «serie» delle due intercapedini in cui essa è divisa dal setto.

III.5. L'esercizio è simile all'esercizio III.4, con la differenza che l'emittanza ε dell'alluminio lucidato è assai minore che non per l'intonaco (vedi tab. III.2).

III.6. Si tratti la parete come una parete semiinfinita, per cui vale la (III.14).

III.7. Vedi l'esempio E.III.2.

III.8. La finestra può essere trattata come una serie di vari elementi, di cui uno è rappresentato dall'intercapedine fra i due vetri.

III.9. La conduttanza dell'intercapedine è ora dovuta al solo meccanismo radiativo.

III.10. L'ossido di stagno ha una emittanza di circa 0,2, e viene pertanto modificata la «conduttanza radiativa» dell'elemento della serie cui esso viene applicato.

III.11. Usare la [III.29] per il contributo radiativo. Il contributo convettivo è assente.

III.12. Rispetto al caso dell'esercizio III.11, si aggiunge il contributo convettivo che può essere calcolato con l'aiuto della figura III.3.

III.13. Anodizzando l'alluminio viene modificata la sua emittanza (vedi tab. III.2).

III.14. La soluzione dell'esercizio è assai semplice; è stato inserito per fornire un confronto diretto fra l'energia consumata dai mezzi di trasporto normalmente usati e quella consumata dal corpo umano.

III.15. L'esercizio si risolve ricorrendo alle leggi dell'irraggiamento di par. III.4.2.

III.16. Va ricordato che l'energia relativa a uno spettro di radiazione è rappresentata graficamente dall'area sottesa alla curva.

III.17. L'esercizio si risolve in maniera grafica approssimata usando le due figure rappresentative rispettivamente della trasparenza dell'atmosfera e dello spettro solare extraatmosferico.

III.18. A regime, devono essere fra di loro uguali la radiazione solare assorbita dal vetro e l'energia termica dissipata verso l'ambiente.

Capitolo quarto

Secondo principio della termodinamica

Secondo principio della termodinamica.

Il primo principio della termodinamica stabilisce la conservazione dell'energia imponendo un vincolo a calore e lavoro, secondo la relazione $\Delta U = Q - L$.

In particolare, tutte le volte in cui la energia interna non varia ($\Delta U = 0$), si ha $Q = L$. Tale relazione, per quanto riguarda il primo principio della termodinamica, è del tutto simmetrica, nel senso che lavoro può essere trasformato integralmente in calore e viceversa.

Tale simmetria, compatibile con il primo principio, *non è verificata in natura*

Esempi

L'energia meccanica può sempre essere trasformata in energia termica.

E.IV.1. È esperienza comune che, sfregando tra di loro due corpi, dopo un certo tempo essi si riscaldano (aumentano di temperatura). Se però, durante lo sfregamento, entrambi i corpi sono mantenuti a contatto con una sorgente ad una certa temperatura T (peraltro comunque elevata), ciò che si osserva è che la temperatura dei corpi non varia, perché si realizza un continuo flusso di calore dai corpi alla sorgente con cui sono a contatto. Alla fine del processo i due corpi non hanno cambiato stato e pertanto la loro energia interna non è variata ($\Delta U = 0$). Tutto ciò che è avvenuto è che del *lavoro meccanico* (attrito) *si è trasformato integralmente in calore* ($L = Q$). In certo senso, il sistema termodinamico (i due corpi) ha funzionato esclusivamente da tramite per questa trasformazione di lavoro in calore.

Si può concludere, da questo esempio, che, con opportuni accorgimenti, lavoro meccanico può essere trasformato in calore in modo integrale ed a temperature comunque elevate.

Gli scambi di calore non avvengono in maniera simmetrica.

E.IV.2. Consideriamo due corpi, A e B, inizialmente a temperature diverse (rispettivamente t_A e t_B con con $t_A > t_B$). Sappiamo che, mettendo i due corpi a contatto termico, si raggiunge una situazione di equilibrio in cui la temperatura t è compresa fra t_A e t_B. Lo scambio termico fra i due corpi è controllato dal primo principio della termodinamica, nel senso che il sistema è isolato dall'esterno ($Q = 0$),

non viene compiuto lavoro ($L = 0$), per cui $\Delta U_{sistema} = 0$. Dunque, il primo principio impone esclusivamente che l'energia interna del sistema non cambi nella trasformazione.

In questo senso, per il primo principio, sarebbe perfettamente realizzabile una trasformazione inversa secondo la quale i due corpi, partendo dallo stato di equilibrio a temperatura $\bar{t}$, si riportassero, senza interventi dall'esterno (sistema isolato) alla situazione iniziale con il corpo A a temperatura t_A ($> \bar{t}$) ed il corpo B a temperatura t_B ($< \bar{t}$).

L'esperienza mostra che la trasformazione inversa non avviene spontaneamente.

Se calore fluisce spontaneamente da A a B, non è possibile che esso fluisca spontaneamente da B a A.

Da questa, e *da moltissime* altre *osservazioni sperimentali, si deve concludere che non tutte le trasformazioni che soddisfano la conservazione dell'energia* (primo principio della termodinamica) *possono effettivamente avvenire*. Con il *secondo principio della termodinamica* si dà un assetto formale ai vincoli che la natura pone al procedere di certi fenomeni termodinamici. In particolare si chiariranno le limitazioni esistenti alla trasformazione di calore in lavoro, laddove si è visto che non esistono limitazioni alle trasformazioni di lavoro in calore.

È da osservare che la conversione di calore in lavoro è la base del funzionamento delle *macchine termiche* (macchina a vapore, *motori a combustione interna*). Anche per questo aspetto applicativo, la termodinamica connessa col secondo principio è particolarmente importante.

Il secondo principio enuncia delle *impossibilità*.

Proprio perché il secondo principio vuole formalizzare leggi naturali per cui certi fenomeni, possibili per il primo principio, non avvengono in realtà, non deve sorprendere che i suoi enunciati siano delle negazioni.

IV.1. Enunciati del secondo principio

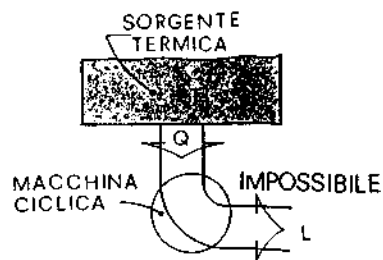
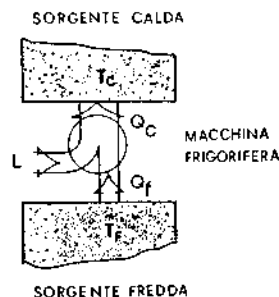
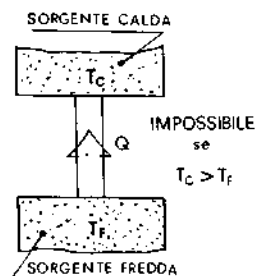
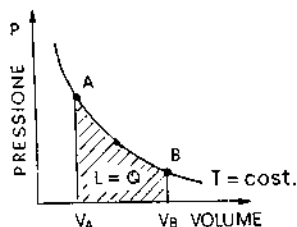
Esistono due enunciati storici, fra di loro equivalenti, del secondo principio.

a) *Enunciato di Clausius:* **è impossibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia quello di far passare calore da un corpo a temperatura inferiore ad un corpo a temperatura superiore.**

Ovviamente un frigorifero – che pure sottrae calore dalla cella frigorifera fredda per cederlo ad un ambiente più caldo – non contraddice l'enunciato di Clausius: non è quello infatti l'*unico* risultato; esso richiede del lavoro esterno L per funzionare. Nel suo funzionamento calore Q_f è sottratto alla sorgente fredda e calore Q_c è ceduto alla sorgente calda.

b) *Enunciato di Kelvin-Planck:* **è impossibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia quello di assorbire calore da una sola sorgente e di trasformarlo integralmente in lavoro.**

In modo equivalente si può dire che è impossibile realizzare un motore capace di trasformare in lavoro con continuità tutto il calore sottratto ad una sola sorgente termica (*impossibilità del moto perpetuo di secondo tipo*). Un motore che lavora con continuità indica di fatto una *macchina ciclica*, la quale, dopo aver trasformato in lavoro tutto il calore estratto da una sorgente, si riporta poi nelle condizioni iniziali, pronta a ripetere nuovamente l'operazione.

Ricordiamo che l'espansione isoterma quasi statica e senza attrito di un gas perfetto ($\Delta U = 0$) trasforma completamente in lavoro il calore sottratto ad una sola sorgente a temperatura $T (L = Q)$. Ma alla fine lo stato del

Il più semplice fra i motori termici opera con due sorgenti.

gas è cambiato, in quanto è cambiato il volume. Dunque la trasformazione non ha come *unico* risultato quello di trasformare integralmente in lavoro il calore sottratto da una singola sorgente.

Se si volesse chiudere il ciclo, riportando isotermicamente e reversibilmente il gas dal volume V_B al volume iniziale V_A, si ripercorrerebbe all'inverso la trasformazione iniziale ed il lavoro complessivo sarebbe nullo ($L_{A \to B} = -L_{B \to A}$). Contemporaneamente la sorgente riassorbirebbe nel tratto $B \to A$ la stessa quantità di calore che aveva ceduto nel tratto $A \to B$.

Segue dunque dall'enunciato di Lord Kelvin che *il più semplice fra i motori termici realizzabili opera con due sorgenti termiche.* Anticipiamo qui in termini qualitativi – per ritornare approfonditamente sull'argomento più avanti – come può funzionare un tale motore.

Funzionamento schematico di un motore termico.

Dopo aver prodotto lavoro L_c nell'espansione assorbendo calore $Q_c > 0$ dalla sorgente calda a temperatura T_c, il gas viene raffreddato alla temperatura T_f della sorgente fredda. *Se si vuole che le sorgenti siano solo due* (e che il gas non scambi dunque calore mentre la sua temperatura varia con continuità da T_c a T_f), *il processo di raffreddamento non può che essere adiabatico* (espansione). Ora che il gas è più freddo, per comprimerlo isotermicamente è necessario un lavoro L_f minore rispetto a quello che il gas aveva compiuto espandendosi; e ciò facendo esso cede alla sorgente fredda una quantità di calore $Q_f < 0$ il cui modulo $|Q_f|$ è minore di Q_c.

Se il lavoro L_c era stato usato ad esempio per mettere in movimento un volano, si può sottrarre all'energia cinetica del volano stesso quanto serve per compiere il lavoro di compressione L_f. Riscaldando infine il gas nuovamente alla temperatura T_c (*compressione adiabatica*) si chiude il ciclo, riportando la macchina nelle condizioni iniziali, pronta a ricominciare un nuovo ciclo.

Complessivamente, su tutto il ciclo, si ha $\Delta U = 0$, cioè non si è avuta variazione di energia interna; per cui il lavoro totale L_T è espresso dal primo principio come

Lavoro compiuto da un motore termico.

$$L_T = Q_c + Q_f = |Q_c| - |Q_f| > 0 \qquad [IV.1]$$

Nello scrivere il terzo membro della [IV.1] abbiamo usato una *convenzione* usuale, nei testi di termodinamica, laddove si parla di motori: cioè quella *di esprimere i moduli delle quantità di calore*, in modo che i segni compaiano esplicitamente nelle formule, e non implicitamente all'interno del simbolo Q così come accade ad esempio nel secondo membro della stessa [IV.1].

IV.2. Equivalenza fra i due enunciati del secondo principio

Equivalenza fra i due enunciati del II principio.

Si può mostrare facilmente l'*equivalenza fra i due enunciati a e b del secondo principio* mostrando che se non valesse a) non varrebbe, per conseguenza, b); e viceversa la non validità di b) comporterebbe la non validità di a).

Immaginiamo dunque che non valga l'enunciato di Clausius. Presa una macchina termica ciclica che assorbe calore Q_c alla sorgente calda S_c cedendo Q_f alla sorgente fredda S_f – mentre la differenza $|Q_c| - |Q_f|$ viene trasformata tutta in lavoro – non valendo a) potremmo poi trasportare $|Q_f|$ da S_f a S_c. La sorgente fredda non entrerebbe allora nel processo (tanto calore ha ricevuto dalla macchina, tanto essa ne cede a S_c); in complesso avremmo una macchina ciclica che trasforma in lavoro tutto il calore $|Q_c| - |Q_f|$ che è stato sottratto alla sorgente calda.

Viceversa, immaginiamo che non valga l'enunciato di Lord Kelvin, e che possiamo dunque realizzare una macchina che trasformi completamente in lavoro L il calore Q_f sottratto da una sorgente fredda S_f. Poiché non esiste vincolo alla trasformazione di lavoro in calore a qualsivoglia temperatura, potremo cedere il lavoro L alla sorgente calda in forma di calore. Avremo così trasportato una quantità di calore $|Q_f|$ dalla sorgente S_f alla sorgente S_c; e sarebbe questo l'unico risultato della trasformazione, perché, essendo la macchina ciclica, essa si sarebbe riportata nelle condizioni iniziali.

L'equivalenza fra i due enunciati è così dimostrata.

Va notato che il processo di trasferimento di calore da una sorgente calda a una sorgente fredda *non* è una trasformazione quasi statica (poiché le due sorgenti *non* sono in equilibrio termico fra di loro); e l'enunciato di Clausius sancisce la sua irreversibilità.

Dunque l'unica possibilità che una trasformazione termodinamica ha per essere reversibile è quella di essere quasi statica; essa deve inoltre essere senza attriti, perché la trasformazione di lavoro in calore è a sua volta irreversibile in virtù dell'enunciato di Lord Kelvin.

Equivalenza fra trasformazioni reversibili e trasformazioni quasi statiche senza attrito.

Mettendo questa conclusione insieme alla dimostrazione – da noi data nel § 4.2. del cap. II – che una trasformazione quasi statica senza attrito è necessariamente reversibile, resta dimostrata la *piena equivalenza fra trasformazioni quasi statiche (senza attrito) e trasformazioni reversibili*, così come avevamo anticipato nel § 7 del cap. I.

Da qui in avanti, le due locuzioni («trasformazioni quasi statiche senza attrito» e «trasformazioni reversibili») saranno usate indifferentemente.

IV.3. Il più semplice fra i motori termici: il ciclo di Carnot

Il più semplice possibile fra i motori termici è stato studiato diffusamente da Sadi Carnot in via teorica. Si tratta di un motore ideale, in quanto che esso è supposto operare per trasformazioni quasi statiche senza attrito e il fluido termodinamico è un gas perfetto; tuttavia i risultati di Carnot sono di grande interesse oltreché teorico anche pratico, perché essi forniscono, come vedremo, un limite superiore alle prestazioni di qualunque motore reale.

Ciclo di Carnot.

Il *motore di Carnot* opera con due sole sorgenti, a temperature rispettivamente T_c e T_f. Pertanto, in base ai ragionamenti fatti nel § IV.1., risulta che il ciclo compiuto dal fluido è formato da due isoterme e da due adiabatiche.

Sull'intero ciclo di Carnot, come su qualunque ciclo, si ha $\Delta U = 0$; per cui il primo principio della termodinamica si scrive:

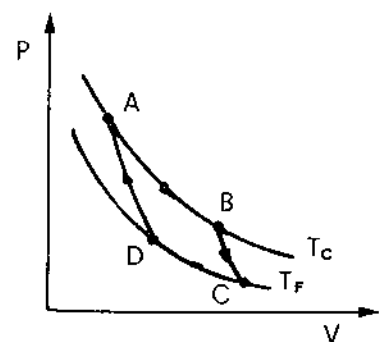
$$Q - L = 0$$

ovvero

$$Q = L \qquad \text{[IV.2]}$$

Indicando con $|Q_c|$ e $|Q_f|$ i moduli delle quantità di calore che il fluido scambia con le due sorgenti lungo le isoterme calda e fredda rispettivamente, si ha $Q = |Q_c| - |Q_f|$, e quindi la [IV.2] si scrive

$$L = |Q_c| - |Q_f| \qquad \text{[IV.3]}$$

secondo quanto avevamo già anticipato nel § IV.1.

Per definizione, si chiama *rendimento* η di un motore *il rapporto fra il lavoro L che esso compie e il calore $Q_c = |Q_c|$ che esso assorbe dalla sorgente calda*

Rendimento di un motore.

$$\boxed{\eta = \frac{L}{|Q_c|}} \qquad [IV.4]$$

ed usando la [IV.3]:

$$\eta = \frac{|Q_c| - |Q_f|}{|Q_c|} = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|} \qquad [IV.5]$$

Rendimento del ciclo di Carnot.

Calcoliamo ora il rendimento [IV.5] in funzione dei valori che i parametri termodinamici T e V assumono negli stati A, B, C e D del ciclo.

Per la espansione isoterma quasi statica da A a B, dal primo principio si ha:

$Q_c = L_{AB}$ (infatti per una isoterma di un gas perfetto $\Delta U = 0$)

Ma

$$L_{AB} = \int_A^B P\,dV = n\,R\,T_c \int_A^B \frac{dV}{V} = n\,R\,T_c \log \frac{V_B}{V_A}.$$

Essendo $V_B > V_A$, $L_{AB} > 0$; e dunque

$$|Q_c| = Q_c = n\,R\,T_c \log \frac{V_B}{V_A}. \qquad [IV.6]$$

Analogamente, per la compressione da C a D abbiamo:

$$Q_f = L_{CD} = n\,R\,T_f \log \frac{V_D}{V_C}.$$

Essendo $V_D < V_C$, risulta $Q_f < 0$; per cui:

$$|Q_f| = -\,Q_f = n\,R\,T_f \log \frac{V_C}{V_D}. \qquad [IV.7]$$

Dividendo la [IV.7] per la [IV.6] si ha:

$$\frac{|Q_f|}{|Q_c|} = \frac{T_f}{T_c} \frac{\log (V_C/V_D)}{\log (V_B/V_A)}. \qquad [IV.8]$$

Il rendimento del ciclo di Carnot è indipendente dal rapporto di compressione.

Mostriamo ora che il rapporto [IV.8] è indipendente dai «rapporti di compressione» V_C/V_D e V_B/V_A. Infatti, applicando l'equazione della adiabatica reversibile alle trasformazioni $A\,D$ e $B\,C$, si ha:

$$V_A\, T_c^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_D\, T_f^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$V_B\, T_c^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_C\, T_f^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Dividendo membro a membro si ha $(V_B/V_A) = (V_C/V_D)$ che sostituita nella [IV.8] dà:

$$\frac{|Q_f|}{|Q_c|} = \frac{T_f}{T_c}. \quad [IV.9]$$

In definitiva, l'espressione del rendimento del ciclo di Carnot diviene:

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|} = 1 - \frac{T_f}{T_c}} \quad [IV.10]$$

Rendimento del ciclo di Carnot:

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

Il ciclo di Carnot è un ciclo reversibile. Dunque, se esso viene percorso in senso inverso, le energie scambiate con le sorgenti cambiano semplicemente segno: viene assorbito lavoro meccanico di modulo pari ad $|L|$, viene assorbito dal sistema una quantità di calore $|Q_f|$ prelevata dalla sorgente fredda, e viene ceduta alla sorgente calda una quantità di calore Q_c il cui modulo è pari a:

$$|Q_c| = |Q_f| + |L| \quad [IV.11]$$

Il ciclo di Carnot diviene allora un *ciclo frigorigeno*: la corrispondente macchina è detta *macchina frigorifera* o *pompa di calore.*

Macchina frigorifera o pompa di calore.

Così come le prestazioni di un motore termico sono caratterizzate dal rendimento $\frac{L}{Q_c}$, così le prestazioni di una pompa di calore sono caratterizzate da un parametro detto *coefficiente di prestazioni* o *COP* definito come:

COP: coefficiente di prestazioni.

$$\boxed{\text{COP} = \frac{|Q_f|}{|L|} = \frac{|Q_f|}{|Q_c| - |Q_f|}} \quad [IV.12]$$

Usando la [IV.9] il coefficiente di prestazioni di un ciclo frigorigeno di Carnot risulta:

$$\boxed{\text{COP} = \frac{T_f}{T_c - T_f}} \quad [IV.13]$$

COP di un ciclo frigorigeno di Carnot:

$$\text{COP} = \frac{T_f}{T_c - T_f}.$$

Va notato che mentre il rendimento η è sempre compreso fra 0 e 1 (un limite, quest'ultimo, cui η si approssima per $T_c \to \infty$ o per $T_f \to 0$ Kelvin), il COP è compreso fra 0 (per $T_c \to \infty$, ovvero per $T_f \to 0$ Kelvin) ed ∞ limite cui COP si approssima per $T_c \to T_f$).

V.4. Teorema di Carnot e temperatura termodinamica assoluta

Abbiamo già anticipato che la macchina di Carnot rappresenta un caso limite per le macchine reali.

Teorema di Carnot.

In effetti esiste un importante teorema – detto *teorema di Carnot* – che si enuncia come segue: *date due sorgenti a temperatura rispettivamente T_c e T_f, una macchina termica qualunque funzionante fra tali temperature avrà*

rendimento minore o uguale al rendimento della macchina di Carnot funzionante fra le stesse temperature; il segno di uguale valendo se la macchina considerata è anch'essa reversibile. In formule, il teorema di Carnot può essere espresso per un ciclo «motore» (cioè operante con $Q_c > 0$, in modo da *produrre* lavoro) dalla relazione:

$$1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c} \qquad [IV.14]$$

dove $|Q_f|$ e $|Q_c|$ rappresentano le quantità di calore (in modulo) che il motore considerato scambia con le sorgenti a temperatura rispettivamente T_f e T_c. Il caso di un ciclo frigorigeno verrà discusso fra poco, e ci porterà alla [IV.15].

Il teorema di Carnot può essere dimostrato attraverso un semplice ragionamento.

Rappresentiamo schematicamente due cicli motori così come in figura.

Sia G un motore generico ed R un motore reversibile. Ammettendo per assurdo che $\eta_G > \eta_R$ ciò significa che - a parità di $|Q_c|$ - la macchina G produrrebbe un lavoro L_G maggiore del lavoro L_R prodotto dalla macchina reversibile (così come rappresentato in figura, dove la larghezza di ogni striscia dà una misura della grandezza indicata).

Ma essendo, per ipotesi, la macchina R reversibile, ciò significa che essa può funzionare all'inverso assorbendo lavoro $|L_R|$, cedendo alla sorgente calda una quantità di calore $|Q_c^R|$ ed assorbendo calore $|Q_f^R|$ dalla sorgente fredda. Alimentando (come schematizzato in figura) la macchina R con parte del lavoro L_G, la sorgente calda diverrebbe inutile: infatti la macchina R lavorando all'inverso, le fornirebbe tutto il calore che da essa preleva la macchina G ($|Q_c^G| = |Q_c^R|$).

Fissate le temperature delle sorgenti, ogni macchina reale ha rendimento minore, o al limite uguale, rispetto a una macchina reversibile.

La sorgente fredda avrebbe in complesso ceduto la quantità di calore $(|Q_f^R| - |Q_f^G|)$. Ora il lavoro residuo disponibile $(|L_G| - |L_R|)$ si può scrivere come:

$$|L_G| - |L_R| = (|Q_c^G| - |Q_f^G|) - (|Q_c^R| - |Q_f^R|) = |Q_f^R| - |Q_f^G|$$

In questo modo si sarebbe realizzata una macchina termica ciclica, funzionante con una sola sorgente (la sorgente fredda) e capace di trasformare integralmente in lavoro il calore sottratto alla sorgente stessa, senza che avvengano altri fenomeni.

L'ipotesi $\eta_G > \eta_R$ porterebbe dunque a contraddire il secondo principio; per conseguenza, non può che essere $\eta_G \leq \eta_R$.

Se G fosse anch'essa reversibile, il ragionamento potrebbe essere ripetuto scambiando i ruoli delle due macchine: se ne concluderebbe $\eta_G \geq \eta_R$. Dunque, se entrambe le macchine sono reversibili non resta che la possibilità $\eta_G = \eta_R$.

Resta dimostrato l'assunto [IV.14], con il segno di uguale nel caso che la macchina sia un motore reversibile.

Se al posto di due motori consideriamo due macchine frigorifere, con ragionamento analogo a quello fatto sopra si conclude

$$COP_G \leq COP_R$$

Cioè il COP della macchina generica G è sempre minore o uguale al COP della macchina reversibile R.

Usando la [IV.12] e la [IV.13] si ha:

$$\frac{|Q_f|}{|Q_c|-|Q_f|} \leq \frac{T_f}{T_c - T_f} \qquad \text{[IV.15]}$$

Ancora una volta – e lo stesso varrà per tutte le diseguaglianze che scriveremo nel seguito – il segno di uguale vale se il ciclo è reversibile.
Dalla [IV.14] e dalla [IV.15] ricaviamo:

$$\begin{aligned} \frac{|Q_f|}{|Q_c|} &\geq \frac{T_f}{T_c} \text{ ciclo motore} \quad (Q_c > 0;\ Q_f < 0) \\ \frac{|Q_f|}{|Q_c|} &\leq \frac{T_f}{T_c} \text{ ciclo frigorifero} \quad (Q_c < 0;\ Q_f > 0) \end{aligned} \qquad \text{[IV.16]}$$

Introducendo le quantità con segno Q_c e Q_f si ottiene dalle [IV.16]:

$$\boxed{\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0} \qquad \text{[IV.17]}$$

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$

valida per qualunque tipo di ciclo (sia esso frigorifero o motore); mentre per qualsivoglia ciclo reversibile (qualunque sia il fluido usato) si ha

$$\frac{|Q_c|}{|Q_f|} = \frac{T_c}{T_f} \qquad \text{[IV.18]}$$

Fino ad ora, la definizione operativa di temperatura (in particolare di scala Kelvin) era stata data facendo riferimento al termometro a gas perfetto; e dunque non era valida quando la temperatura stessa scendeva al di sotto – o in prossimità – del punto critico di tutti i gas esistenti in natura. La [IV.18] ci consente invece di estendere la definizione anche laddove i gas perfetti non esistono più.

Scelta la temperatura di una certa sorgente S_c come temperatura T_c di riferimento (si potrà scegliere ghiaccio al punto triplo, ed assegnare ad esso T_c = 273,16 K), la temperatura T di un altro corpo S è definta tramite la [IV.18]) come:

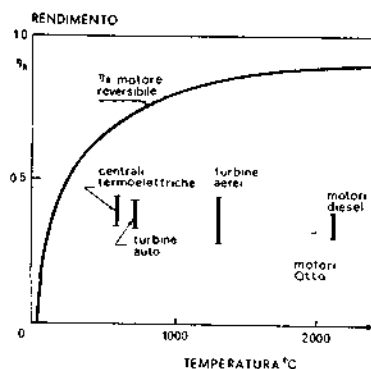
Temperatura termodinamica assoluta.

$$T = T_c \frac{|Q|}{|Q_c|} \qquad \text{[IV.19]}$$

dove $|Q|$ e $|Q_c|$ sono le quantità di calore (in modulo) che vengono scambiate con S ed S_c da qualunque ciclo reversibile operante fra esse. In virtù della opportuna scelta del valore di T_c, la temperatura così definita – detta temperatura *termodinamica assoluta* – coincide con quella dei gas perfetti laddove esistano gas reali che si comportino praticamente come gas perfetti.

A temperature molto basse, prossime allo zero della scala assoluta (detto *zero assoluto*), le misure di temperatura divengono in pratica estremamente difficoltose. Tuttavia in laboratorio sono state raggiunte, e misurate tramite la [IV.19], temperature inferiori al millesimo di grado Kelvin.

IV.5. Il rendimento dei motori reali

Rendimento dei motori reali.

Nella pratica, quando si voglia realizzare un motore termico - il cui rendimento, come risulta dalla [IV.14], aumenta all'aumentare della temperatura T_c e al diminuire della temperatura T_f - la più conveniente fra le sorgenti fredde è rappresentata dall'aria ambiente, verso cui viene scaricato il calore di scarto Q_f; talvolta, specialmente per postazioni fisse ma anche ad esempio per le motonavi, si può far ricorso a una sorgente rappresentata da un corso d'acqua, o dall'acqua del mare. Indicativamente, possiamo dire che T_f non è inferiore di norma a una ventina di gradi centigradi.

Se la temperatura T_c fosse allora, ad esempio, di 100°C, la [IV.14] ci dice che nemmeno il motore ideale reversibile potrebbe funzionare con rendimento superiore a circa il 20%. Fissata T_f, il rendimento η_R del motore ideale aumenta abbastanza rapidamente all'aumentare di T_c. Nella figura, abbiamo indicato η_R in funzione di T_c (gradi centigradi), supposto T_f = 20°C. Nella stessa figura abbiamo anche indicato con delle barrette verticali la zona entro cui varia il rendimento di alcuni motori reali tipici. I motori per auto, siano essi a benzina (ciclo Otto) o a gasolio (ciclo Diesel) sono di norma motori a *combustione interna*: la sorgente calda è cioè rappresentata da un combustibile che brucia all'interno stesso del cilindro (potremmo dire che brucia il gas che costituisce anche il «fluido di lavoro» del motore). In questo caso la temperatura T_c può essere molto elevata, dell'ordine di 2000°C; la temperatura del gas è infatti molto superiore rispetto alla temperatura delle pareti meccaniche del motore, che a temperature così elevate sarebbero irrimediabilmente danneggiate anche scegliendo i materiali più opportuni. Si tratta di motori particolarmente semplici e flessibili; tuttavia, come si vede, il loro rendimento non è superiore in pratica a circa un terzo rispetto a quello di un motore ideale che lavori a pari temperatura.

Motori a combustione interna.

Motori a combustione esterna.

Nei motori a turbina a *combustione esterna*, il rendimento - rapportato a quella della macchina ideale alla stessa temperatura - può essere notevolmente superiore, dell'ordine della metà o addirittura prossimo a 2/3 (nel caso delle grandi postazioni fisse, come le centrali termoelettriche). Tuttavia, a tutt'oggi la temperatura della loro sorgente calda non può superare i 600-700 gradi. Come si vede, il rendimento tipico resta così compreso - per la maggior parte dei motori - fra 0,25 e 0,40. I notevoli margini di miglioramento disponibili rispetto al limite teorico rappresentano tuttavia obiettivi tutt'altro che facili da raggiungere, sia dal punto di vista strettamente tecnologico che da quello economico.

IV.6. Integrale di Clausius ed entropia

Il secondo principio della termodinamica, per quanto finora trattato, prende atto del fatto che certi fenomeni, pur rispettando la conservazione dell'energia, non avvengono in realtà. Così il calore non fluisce spontaneamente da un corpo freddo ad uno caldo; così un freno può agire su un volano inizialmente in rotazione fino a fermarlo ed alla fine il volano ed il freno sono più caldi che all'inizio, ma non succede che, partendo da fermo, il volano si raffredda ed inizia a ruotare; così certe reazioni chimiche evolvono in una direzione e non nella direzione opposta; ecc.

La sostanza del secondo principio, espressa negli enunciati di Kelvin e Clausius, ha trovato una prima formalizzazione matematica col teorema di Carnot nella [IV.17] valida per macchine che usano due sorgenti:

$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$ (con il segno di uguaglianza per cicli reversibili);

$\sum \frac{Q}{T} \leq 0$ (dove le quantità Q hanno il loro segno algebrico).

Almeno per quanto riguarda cicli a due sorgenti, *si può dire che la reversibilità delle trasformazioni si manifesta con l'uguaglianza a zero della quantità* $\sum \frac{Q}{T}$, *mentre l'irreversibilità si manifesta con la disuguaglianza* $\sum \frac{Q}{T} < 0$. Si vedrà subito che questa è una proprietà generale di tutti i cicli, indipendentemente dal numero di sorgenti che vengono utilizzate. Da questa proprietà si procederà ad introdurre la formalizzazione quantitativa che descrive la scelta che la natura opera per l'evoluzione dei fenomeni.

Esempio

E.IV.3. Supponiamo di avere una macchina termica in cui il fluido termodinamico sia un gas perfetto che scambia calore con tre sole sorgenti a temperatura T_1, T_2 e T_3. Supponiamo che il ciclo si possa rappresentare nel diagramma di Clapeyron, nell'ipotesi che tutte le trasformazioni siano reversibili, come descritto in figura. Decomponiamo il ciclo disegnato in figura in due cicli di Carnot reversibili: $ABCGA$, che lavora fra T_1 e T_2, e $GDEFG$, che lavora fra T_2 e T_3. (Le trasformazioni BC, DE, FG, GA sono adiabatiche).

Macchina con tre sorgenti.

Per il ciclo $ABCGA$ si ha:

$$\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CG}}{T_2} = 0,$$

da cui

$$\frac{Q_{CG}}{T_2} = -\frac{Q_{AB}}{T_1}.$$

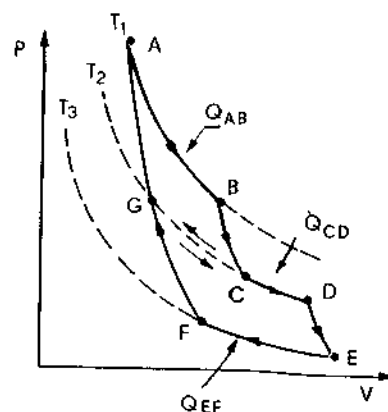
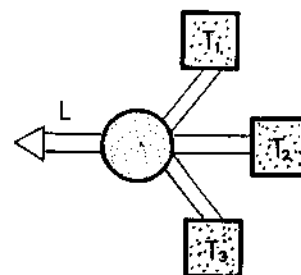
Per il ciclo $GDEFG$ si ha:

$$\frac{Q_{GC} + Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} = 0,$$

da cui

$$\frac{Q_{GC}}{T_2} + \frac{Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} = 0.$$

Ma

$$\frac{Q_{GC}}{T_2} = -\frac{Q_{CG}}{T_2} = \frac{Q_{AB}}{T_1}.$$

per cui in conclusione si ha

$$\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} = 0\,,$$

ovvero

$$\sum \frac{Q}{T} = 0\,.$$

Nel caso in cui il ciclo sia *irreversibile* (in almeno una delle trasformazioni che lo compongono), si può scrivere:

ciclo $A\,B\,C\,G\,A$:

$$\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CG}}{T_2} < 0\,,$$

da cui

$$\frac{Q_{AB}}{T_1} < -\frac{Q_{CG}}{T_2}\,.$$

ciclo $G\,D\,E\,F\,G$:

$$\frac{Q_{GC} + Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} < 0\,,$$

da cui

$$\frac{Q_{GC}}{T_2} + \frac{Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} < 0\,.$$

Essendo

$$\frac{Q_{GC}}{T_2} = -\frac{Q_{CG}}{T_2} > \frac{Q_{AB}}{T_1}\,,$$

(con $\frac{Q_{GC}}{T_2}$ positivo perché Q_{GC} viene assorbito dal sistema), la relazione ottenuta sostituendo $\frac{Q_{GC}}{T_2}$ con $\frac{Q_{AB}}{T_1}$ seguita a valere:

$$\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} < 0\,,$$

ovvero

$$\sum \frac{Q}{T} < 0\,.$$

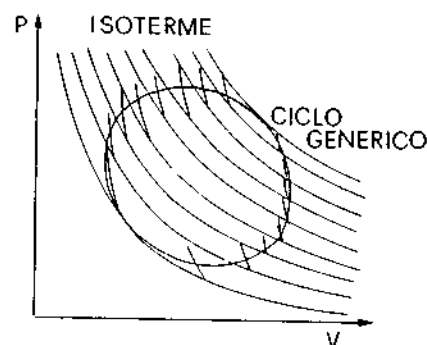
In modo analogo si sarebbe proceduto se il ciclo a 3 sorgenti fosse stato del tipo mostrato in figura.

Nel caso in cui un ciclo operi con un numero qualsivoglia di sorgenti a temperature $T_i\,(i = 1, 2, ..., n)$, scambiando quantità di calore Q_i, si può scrivere:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0} \qquad \text{[IV.20]}$$

Del resto, un ciclo qualsiasi può essere approssimato da un insieme di cicli di Carnot operanti con sorgenti a temperature di poco diverse fra di loro. Al limite, la temperatura delle sorgenti può variare con continuità e se con δQ si indica la quantità di calore elementare che nel ciclo viene scambiata con la sorgente a temperatura T, la [IV.20] diventa:

Disuguaglianza di Clausius.

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \qquad \text{[IV.21]}$$

La [IV.20] e la sua generalizzazione [IV.21] si chiama *disuguaglianza di Clausius.*

Tale disuguaglianza permette di introdurre una nuova funzione di stato, l'*entropia*, di notevolissima importanza nella termodinamica.

Nel caso particolare che si abbia a che fare con un *ciclo reversibile*, si ha:

$$\oint_{(\mathrm{REV})} \frac{\delta Q}{T} = 0 \qquad \text{[IV.22]}$$

Come ogni quantità il cui integrale ciclico sia nullo, la quantità $\frac{\delta Q}{T}$ (quando venga calcolata su una trasformazione reversibile) rappresenta dunque il differenziale esatto di una funzione di stato; in altri termini, l'integrale

$$\int_{A\,(\mathrm{REV})}^{B} \frac{\delta Q}{T}$$

effettuato fra gli stati A e B *lungo una trasformazione reversibile* può essere scritto come differenza fra i valori che una funzione di stato S assume rispettivamente negli stati A e B:

La funzione di stato entropia.

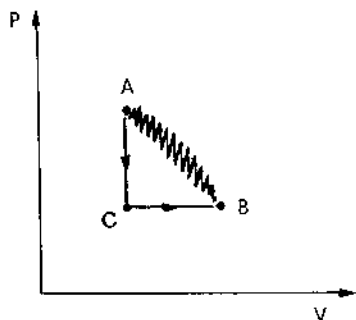
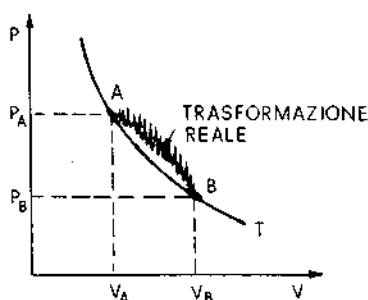
$$\int_{A(\mathrm{REV})}^{B} \frac{\delta Q}{T} = S(B) - S(A) \qquad \text{[IV.23]}$$

A questa conclusione, a partire dalla [IV.22], si arriva con lo stesso ragionamento da noi fatto nel § II.2. per dimostrare il fatto che la quantità $Q - L$ può essere scritta come $U(B) - U(A)$.

La funzione S definita dalla [IV.23] (con l'accento sulla condizione che l'integrale venga calcolato lungo una trasformazione reversibile) viene detta entropia del sistema termodinamico considerato. S risulta definita dalla [IV.23] a meno di una costante arbitraria. Notiamo che l'entropia è una funzione estensiva: cioè l'entropia di un sistema costituito da più parti può essere scritta come somma dell'entropie delle sue parti.

L'entropia è una funzione additiva.

L'entropia è un parametro estensivo.

La definizione [IV.23] dell'entropia consente ovviamente di calcolare la variazione di entropia relativamente a qualunque trasformazione porti il sistema dallo stato iniziale di equilibrio A allo stato finale di equilibrio B, variazione che dipende solo dagli stati A e B e non dalla trasformazione. Per il calcolo, si tratta semplicemente di scegliere una arbitraria trasformazione reversibile che colleghi gli stati A e B.

Esempi

Variazione di entropia nell'espansione libera di un gas perfetto.

E.IV.4. *Calcolare la variazione di entropia relativa ad una espansione libera che raddoppi il volume di n moli di gas perfetto.*

La trasformazione non è quasi statica (né reversibile) ma gli stati A e B sono stati di equilibrio. I parametri di stato sono rispettivamente:

stato A:	P_A	V_A	T
stato B:	$P_B = \dfrac{P_A}{2}$	$V_B = 2\,V$	T

Per il calcolo di $\Delta S = S(B) - S(A)$ occorre scegliere una qualunque trasformazione reversibile che porti da A a B: la più semplice fra queste è la trasformazione isoterma quasi statica (ramo di iperbole equilatera) per la quale si ha:

$$\Delta S = \int_{A(\mathrm{REV})}^{B} \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int_A^B \delta Q = \frac{1}{T}\int_A^B (dU + P\,dV) = \frac{1}{T}\int_A^B P\,dV =$$

$$= \frac{1}{T}\int_A^B \frac{n\,R\,T}{V}\,dV = n\,R\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = n\,R\ln 2 > 0\,.$$

Nei passaggi, si è tenuto conto che nella trasformazione reversibile è T = cost e (per conseguenza, trattandosi di gas perfetto), $dU = 0$.

Osserviamo che nella trasformazione, spontanea, da A a B, l'entropia è cresciuta ($\Delta S > 0$).

Per il calcolo di ΔS avremmo potuto scegliere qualunque altra trasformazione reversibile che colleghi A con B: per esempio una trasformazione isocora da A a C, seguita da una isobara da C a B. In questo caso il calcolo avrebbe proceduto come segue:

$$\Delta S = \underset{(\mathrm{REV})}{\int_A^C} n\,C_V\frac{dT}{T} + \underset{(\mathrm{REV})}{\int_C^B} n\,C_V\frac{dT}{T} = n\,C_V\ln\frac{T_c}{T} + n\,C_P\ln\frac{T}{T_c} =$$

$$= n\,(C_P - C_V)\ln\frac{T}{T_c} = n\,R\ln\frac{V_B}{V_A}\,.$$

Nei passaggi, abbiamo tenuto conto dei fatti che

$$C_P - C_V = R \quad \text{e} \quad \frac{T}{T_c} = \frac{V_B}{V_A} \quad (\text{essendo } P_C = P_B).$$

È appena il caso di rilevare che le trasformazioni reversibili usate per il calcolo sono trasformazioni ideali che niente hanno a che vedere con la trasformazione reale, se non per il fatto che hanno in comune con essa stato iniziale e stato finale.

Trasferimento di calore da una sorgente calda a una sorgente fredda.

E.IV.5. *Calcolare la variazione di entropia associata al trasferimento di una quantità di calore $|Q|$ da una sorgente a temperatura T_c a una sorgente a temperatura T_f ($T_c > T_f$).*

Il processo considerato è spontaneo e irreversibile. Il sistema è costituito da due parti (la sorgente T_c e la sorgente T_f) isolate nel loro insieme, che però scambiano calore fra di loro. La variazione di entropia del sistema è la somma delle variazioni di entropia relative alle due sorgenti considerate separatamente:

$$\Delta S = \Delta S_c + \Delta S_f$$

$$\Delta S_c = \int \frac{\delta Q}{T_c} = \frac{Q_c}{T_c} = -\frac{|Q|}{T_c}$$

$$\Delta S_f = \int \frac{\delta Q}{T_f} = \frac{Q_c}{T_f} = \frac{|Q|}{T_c}$$

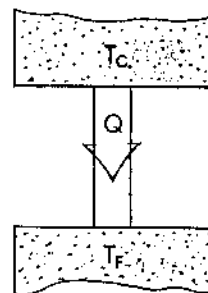
Notare che benché le due sorgenti scambino la stessa quantità di calore Q (in modulo), tale quantità è negativa dal punto di vista della sorgente calda ($Q_c = -|Q|$; la sorgente calda *cede* calore) ma è positiva dal punto di vista della sorgente fredda che *riceve* calore ($Q_f = |Q|$); per conseguenza $\Delta S_c < 0$ e $\Delta S_f > 0$.

$$\Delta S = -\frac{|Q|}{T_c} + \frac{|Q|}{T_f} = |Q|\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_c}\right) > 0 \quad (\text{poiché } T_c > T_f).$$

Osserviamo che anche in questa trasformazione spontanea l'entropia complessiva è aumentata.

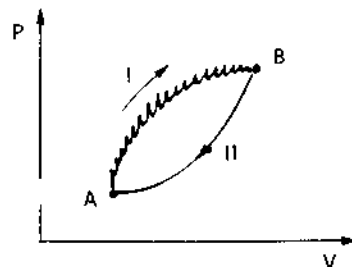
In questi esempi di trasformazioni spontanee, abbiamo notato che l'entropia è aumentata; questa è una legge generale, come dimostreremo nel prossimo paragrafo.

Osserviamo che le trasformazioni spontanee considerate implicano anche una riduzione della capacità del sistema a compiere lavoro.

Il gas compresso aveva la capacità di trasformare in lavoro, espandendosi isotermicamente e reversibilmente, il calore che in questa trasformazione avrebbe assorbito dall'ambiente; e questa capacità è andata persa nella espansione libera senza che sia stato compiuto alcun lavoro. Analogamente il passaggio di calore da T_c a T_f, che potrebbe comportare una parziale trasformazione di calore in lavoro impiegando un motore termico, nella trasformazione spontanea è avvenuto senza alcuna produzione di lavoro.

IV.7. L'entropia e il secondo principio della termodinamica

Consideriamo ora una qualunque trasformazione reale I di un sistema termodinamico che porti il sistema dallo stato A allo stato B. Immaginiamo poi di riportare il sistema nuovamente allo stato iniziale attraverso una trasformazione reversibile II.

Applicando la [IV.21] all'intero ciclo così costruito:

$$0 \geq \oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{A\,(I)}^{B} \frac{\delta Q}{T} + \int_{B\,(II)}^{A} \frac{\delta Q}{T} \qquad \text{[IV.24]}$$

Ma $\int_{B\,(II)}^{A} \frac{\delta Q}{T}$, essendo effettuato su una trasformazione reversibile, è pari a $\Delta S = S(A) - S(B)$ per cui la [IV.24] diviene:

$$\boxed{S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T}} \qquad \text{[IV.25]}$$

Integrale di Clausius.

Alla quantità $\int_A^B \frac{\delta Q}{T}$ si da il nome di *integrale di Clausius*: l'integrale di Clausius coincide con la variazione di entropia solo se la trasformazione lungo la quale lo si calcola è reversibile.

In particolare, se la trasformazione I compiuta dal sistema è una trasformazione adiabatica, il secondo membro della [IV.25] diviene nullo; per cui:

$$S(B) - S(A) \geq 0 \qquad [IV.26]$$

Se un sistema qualunque compie una trasformazione adiabatica che lo porta dallo stato A allo stato B, l'entropia dello stato finale B è maggiore o uguale dell'entropia dello stato iniziale A (il segno di uguale valendo se la trasformazione è reversibile).

In una qualunque trasformazione spontanea l'entropia non può diminuire.

In particolare, ciò vale per le trasformazioni dei sistemi isolati: *in qualunque trasformazione spontanea di qualunque sistema termodinamico l'entropia non può diminuire.*

L'entropia complessiva di un sistema e delle sue sorgenti non può diminuire.

Come abbiamo già osservato, qualunque sistema, insieme alle sue sorgenti (se esse sono sorgenti solo di quel sistema), costituisce un sistema isolato. Dunque: **in qualunque trasformazione, la somma dell'entropia del sistema e delle sue sorgenti non può diminuire.**

È questo un altro modo di enunciare il secondo principio della termodinamica; il significato fisico di questo enunciato sarà meglio chiarito dall'interpretazione microscopica che daremo dell'entropia nel cap. VI.

L'uso dell'entropia – e di altre funzioni termodinamiche con essa connesse che introdurremo nel cap. V – consente di formalizzare in termini rigorosi ed efficaci le condizioni imposte dal secondo principio della termodinamica alle trasformazioni dei sistemi macroscopici.

IV.8. Entropia di alcuni sistemi termodinamici notevoli

La funzione di stato entropia è definita dalla relazione [IV.23], con la condizione che l'integrale sia eseguito su una trasformazione reversibile. Ma come abbiamo visto, dire *trasformazione reversibile* è equivalente a dire *trasformazione quasi statica senza attriti*; ovvero è equivalente a scrivere δQ in funzione dei parametri di stato applicando il I principio della termodinamica a trasformazioni elementari in cui venga suddivisa la trasformazione finita, e nell'ipotesi che l'unica forma di lavoro L_R sia da forze conservative:

$$\delta Q = dU + \delta L_R \quad (L_R \text{ lavoro } \textit{reversibile})$$

La quantità $\dfrac{\delta Q}{T} = \dfrac{dU + \delta L_R}{T}$ deve dunque rappresentare un differenziale esatto, e precisamente il differenziale della funzione di stato entropia S:

Espressione generale dell'entropia.

$$dS = \frac{dU + \delta L_R}{T} \qquad [IV.27]$$

Quando sia nota l'espressione dell'energia interna di un sistema (*) e sia nota anche l'espressione del lavoro reversibile δL_R in funzione dei para-

(*) Come già anticipato nel § II.6., dimostreremo più avanti (§ V.2.) che l'espressione dell'energia interna può essere ricavata una volta noti C_V e l'equazione di stato del sistema considerato.

metri di stato, l'entropia S può essere calcolata semplicemente integrando la [IV.27]

$$S(P) = \int_A^P \frac{dU + \delta L_R}{T} + \text{cost.} \qquad [IV.28]$$

dove P rappresenta il generico stato e A un qualunque *stato di riferimento.*

IV.8.1. *Entropia di un corpo solido*

Entropia di un corpo solido.

Nell'ipotesi che il calore specifico c sia indipendente dalla temperatura e trascurando il lavoro dovuto alla dilatazione, si ha (vedi § II.2.):

$$dU = m\,c\,dT$$

$$\delta L_R = 0$$

che sostituite nella [IV.28] forniscono:

$$S = \int \frac{m\,c\,dT}{T} + \text{cost} = m\,c \log T + \text{cost.} \qquad [IV.29]$$

IV.8.2. *Entropia di un gas perfetto*

Entropia di un gas perfetto.

Per un gas perfetto abbiamo (vedi § II.4.):

$$dU = n\,C_V\,dT$$

$$\delta L_R = P\,dV = \frac{n\,R\,T}{V}\,dV$$

che sostituite alla [IV.28] forniscono:

$$S = n\,C_V \log T + n\,R \log V + \text{cost} \qquad [IV.30]$$

IV.8.3. *Entropia di un gas di Van der Waals*

Entropia di un gas di Van der Waals.

In questo caso (vedi § II.5.) per una mole, si ha:

$$dU = C_V\,dT + \frac{a}{V^2}\,dV$$

$$L = P\,dV = \left(\frac{R\,T}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) dV$$

Sostituendo nella [IV.27] si ha, per una mole:

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + \frac{R\,dV}{V-b}$$

Integrando e moltiplicando per il numero di moli:

$$S = n\,C_V \log T + n\,R \log (V-b) + \text{cost} \qquad [IV.31]$$

IV.8.4. *Entropia di una sbarretta omogenea solida in uno stato stazionario lontano dall'equilibrio termico*

Entropia di una sbarretta omogenea in uno stato stazionario lontano dall'equilibrio termico.

Consideriamo una sbarretta omogenea solida la cui temperatura, indipendente dal tempo, vari linearmente fra le temperature T_0 e T_1 dei suoi estremi. Sia M la massa e L la lunghezza della sbarretta (la cui densità lineare è allora $\lambda = M/L$); c il suo calore specifico.

Per un corpo di massa m, che si trovi alla temperatura T, la differenza S di entropia rispetto a una situazione $\bar{T}(\Delta S = S(T) - S(\bar{T}))$ risulta dalla [IV.29]:

$$\Delta S = m\,c \log \frac{T}{\bar{T}}$$

Prendendo come temperatura di riferimento il valor medio fra T_0 e T_1 $\left(\bar{T} = \dfrac{T_0 + T_1}{2}\right)$, e dividendo la sbarretta in tanti tratti elementari di lunghezza dx, ognuno di questi tratti elementari fornisce a ΔS un contributo pari a:

$$d\,\Delta S = dM\,c \log \frac{T(x)}{\bar{T}} = c\,\frac{M}{L}\,dx \log \frac{\bar{T} + a\,x}{\bar{T}}$$

avendo posto

$$a = \frac{T_1 - T_0}{L} \quad \left(-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}\right).$$

Integrando su x si ha:

$$\Delta S = \frac{c\,M}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \log \left(\frac{\bar{T} + a\,x}{\bar{T}}\right) \qquad \text{[IV.32]}$$

Mediante la sostituzione

$$y = \frac{\bar{T} + a\,x}{\bar{T}}$$

e ricordando che

$$\int \log y\, dy = y\,(\log y - 1)\,,$$

la [IV.32] diviene:

$$\Delta S = S(T(x) - S(\bar{T})) =$$
$$= \frac{c\,M}{T_1 - T_0} \left(T_1 \log \frac{T_1}{\bar{T}} - T_0 \log \frac{T_1}{\bar{T}} - (T_1 - T_0)\right) \qquad \text{[IV.33]}$$

dove con $S(T(x))$ abbiamo indicato l'entropia della sbarretta nella configurazione in cui la sua temperatura varia linearmente con x fra T_0 e T_1

Esempi

E.IV.6. *Una mole di gas di Van der Waals alla temperatura iniziale T_i = 300 K compie una espansione libera che ne porta il volume da V_i = 1 litro a V_f = 2 litri. Determinare la variazione di entropia.*

Variazione di entropia nell'espansione libera di un gas di Van der Waals.

Essendo $Q = 0$ ed $L = 0$, si ha ancora $\Delta U = 0$. Ricordando che (vedi § II.5.) $U = C_V T - \frac{a}{V}$ + cost., segue:

$$U(f) - U(i) = \left(C_V T_f - \frac{a}{V_f}\right) - \left(C_V T_i - \frac{a}{V_i}\right) = 0 .$$

Poiché sappiamo che $V_f = 2\,V_i$, inserendo nella precedente relazione possiamo trovare:

$$T_f - T_i = \frac{a}{C_V}\left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i}\right) = \frac{a}{C_V}\,\frac{V_i - V_f}{V_i V_f} = -\frac{a}{2\,V_i C_V}$$

$$T_f = T_i - \frac{a}{2\,V_i C_V} .$$

Conoscendo ora sia V_i, T_i che V_f,T_f, inserendo nella [IV.31] ricaviamo:

$$\Delta S = C_V \log\left(1 - \frac{a}{2\,T_i V_i C_V}\right) + R \log\left(\frac{2\,V_i - b}{V_i - b}\right)$$

E.IV.7. *Due corpi solidi dello stesso materiale aventi la stessa massa m si trovano rispettivamente alle temperature T_1 e T_2; essi vengono poi posti a contatto termico fino a che raggiungono, all'equilibrio, la stessa temperatura T_f. Se durante la trasformazione essi sono mantenuti isolati dall'ambiente esterno, quale è la temperatura T_f? Quale è la variazione di entropia?*

Due corpi solidi a temperature inizialmente diverse evolvono verso l'equilibrio termico.

Inizialmente, l'energia interna del sistema è (in virtù della sua additività):

$$U_i = m\,c\,T_1 + m\,c\,T_2 + \text{cost.} = m\,c\,(T_1 + T_2) + \text{cost}.$$

Nello stato finale, invece:

$$U_f = 2\,m\,c\,T_f + \text{cost}.$$

Essendo il sistema isolato, $\Delta U = 0$, cioè $U_f = U_i$; da cui si ricava:

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Dalla [IV.29] si ricava la variazione di entropia:

$$S_i = m\,c \log T_1 + m\,c \log T_2 + \text{cost.} = m\,c \log T_1 T_2 + \text{cost.}$$

$$S_f = 2\, m\, c \log \frac{T_1 + T_2}{2} + \text{cost.} = m\, c \log \left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2 + \text{cost.}$$

$$\Delta S = S_f - S_i = m\, c \log \left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2 - \log T_1\, T_2 = m\, c \log \frac{(T_1 + T_2)^2}{4\, T_1\, T_2}$$

Notare che $\Delta S \geq 0$. Per dimostrarlo, basta mostrare che $\frac{(T_1 + T_2)^2}{4\, T_1\, T_2} \geq 0$.

Le seguenti relazioni sono fra di loro equivalenti:

$$\frac{(T_1 + T_2)^2}{4\, T_1\, T_2} \geq 0$$

$$(T_1 + T_2)^2 \geq 4\, T_1\, T_2$$

$$T_1^2 + T_2^2 + T_1\, T_2 \geq 4\, T_1\, T_2$$

$$T_1 + T_2 - 2\, T_1\, T_2 \geq 0$$

$$(T_1 - T_2)^2 \geq 0$$

L'ultima di queste relazioni, essendo il primo membro un quadrato, è evidentemente vera (il segno di uguale vale quando $T_1 = T_2$, cioè quando lo stato iniziale e quello finale coincidono).

Una sbarretta omogenea evolve spontaneamente da uno stato stazionario allo stato di equilibrio.

E.IV.8. *A partire dallo stato iniziale descritto nel § IV.8.4., una sbarretta omogenea viene lasciata isolata fino a che non raggiunge uno stato di equilibrio. Quale è la variazione di entropia?*

Essendo isolata, all'equilibrio la sbarretta raggiunge una temperatura

$$T_{\text{finale}} = \bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

La variazione di entropia è dunque data dalla [IV.33] cambiata di segno, perché rispetto ad essa sono semplicemente scambiati lo stato iniziale ($T = T(x)$) e lo stato finale ($T = \bar{T}$).

Si ha pertanto:

$$\Delta S = S(\bar{T}) - S(T(x)) = \frac{c\, m}{T_0 - T_1} \left(T_1 \log \frac{T_1}{\bar{T}} - T_0 \log \frac{T_0}{\bar{T}} - (T_1 - T_0)\right)$$

Ancora una volta risulta $\Delta S \geq 0$.

La condizione $\Delta S \geq 0$ equivale a:

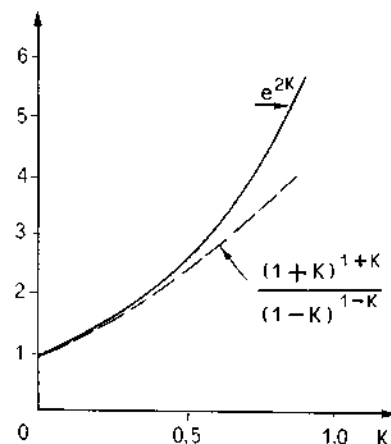
$$\frac{m\, c}{T_1 - T_0} \left(T_1 \log \frac{T_1}{\bar{T}} - T_0 \log \frac{T_0}{\bar{T}} - (T_1 - T_0)\right) \leq 0$$

$$\log \left[\left(\frac{T_1}{\bar{T}}\right)^{\frac{T_1}{T_1 - T_0}} \cdot \left(\frac{T_0}{\bar{T}}\right)^{-\frac{T_0}{T_1 - T_0}}\right] - 1 \leq 0$$

$$\log\left[\left(\frac{\bar{T}+\alpha}{\bar{T}}\right)^{\frac{\bar{T}+\alpha}{2\alpha}}\cdot\left(\frac{\bar{T}}{\bar{T}-\alpha}\right)^{\frac{\bar{T}-\alpha}{2\alpha}}\right]\leq 1 \quad \left(\text{con } \alpha = \frac{T_1 - T_0}{2}\right)$$

$$\left(1+K\right)^{\frac{1+K}{2K}}\left(\frac{1}{1-K}\right)^{\frac{1-K}{2K}} \leq e \quad \left(K = \frac{\alpha}{\bar{T}};\ 0 \leq K \leq 1\right)$$

$$\frac{(1+K)^{1+K}}{(1-K)^{1-K}} < e^{2K}$$

La validità di questa disuguaglianza può essere dimostrata analiticamente; noi tuttavia preferiamo, qui, dimostrarla numericamente graficando nella figura a lato il suo primo e il suo secondo membro.

IV.9. L'entropia come parametro di stato

Il fatto che l'entropia S sia una funzione di stato implica l'esistenza di una relazione funzionale fra l'entropia stessa e i parametri di stato usuali.

$$S = S(P, V, T, ...)$$

L'inversione di questa funzione permette di esprimere uno qualunque dei parametri di stato in funzione degli altri parametri di stato e dell'entropia. In tal modo l'*entropia può essere considerata come un parametro di stato (estensivo).* Per esempio nel caso di un gas perfetto si ha per l'entropia S l'espressione

$$S(V, T) = n R \ln V + n C_V \ln T + \text{cost.}$$

Diagramma entropico.

che costituisce un legame funzionale fra S, V e T. Tale relazione può essere considerata come una equazione di stato fra le variabili di stato S, V e T, analoga alla equazione $PV = nRT$ (fra le variabili P, V e T).

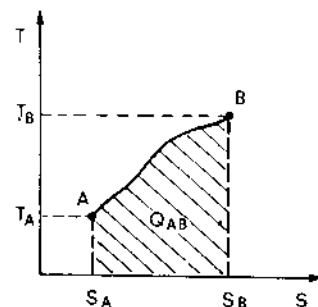
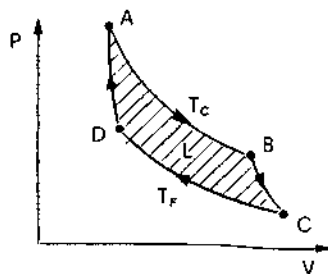
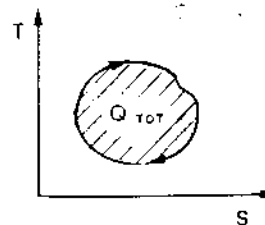
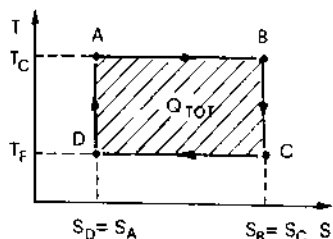
In particolare, lo stato di un sistema termodinamico descrivibile mediante due soli parametri di stato (come ad esempio un gas) può essere descritto tramite i parametri S e T. Il diagramma (T, S) su cui si può visualizzare uno stato o una trasformazione di un tale sistema viene detto *diagramma entropico.*

Nel diagramma entropico, l'area tratteggiata racchiusa dalla figura $S_A\,A\,B\,S_B$ rappresenta la quantità di calore scambiata nella trasformazione $A \rightarrow B$ (reversibile):

$$Q_{AB} = \int_{A\ (\text{REV})}^{B} T\, dS \qquad \text{[IV.34]}$$

La [IV.23] può infatti essere scritta, in forma differenziale:

$$\frac{\delta Q}{T} = dS; \quad \delta Q = T\, dS$$

da cui la [IV.34]. È appena il caso di ricordare che nel diagramma (P, V) di Clapeyron l'area racchiusa sotto la curva rappresentativa di una trasformazione quasi statica rappresentava il lavoro $L = \int_A^B P\, dV$.

Nel caso di un ciclo termodinamico, l'area racchiusa dalla curva rappresentativa nel diagramma entropico rappresenta la quantità di calore complessivamente scambiata dal sistema, così come nel piano di Clapeyron essa rappresentava il lavoro.

A titolo di esempio, nelle figure a fianco è rappresentato un ciclo di Carnot (reversibile) nel diagramma di Clapeyron e nel diagramma entropico. Nel diagramma (T, S) le adiabatiche reversibili $B\,C$ e $D\,A$ (che sono isoentropiche) sono rappresentate da tratti verticali; le isoterme sono invece rappresentate da tratti orizzontali. L'area del ciclo è $(T_C - T_F)\ (S_B - S_A)$, ed è pari alla quantità di calore $Q_{TOT} = |Q_{AB}| - |Q_{CD}|$ che il fluido termodinamico scambia con le sorgenti lungo il ciclo, come è facile verificare usando la [IV.30] e le [IV.6] e [IV.7].

Variazioni di Entropia dell'universo in seguito a trasformazioni naturali

Tipo di irreversibilità	Trasformazione irreversibile	Variazione di entropia del sistema	Variazione di entropia dell'ambiente circostante	Variazione di entropia dell'universo
Irreversibilità meccanica esterna	Dissipazione isoterma a temperatura T di lavoro W attraverso un sistema in energia interna di un serbatoio	0	$\frac{W}{T}$	$\frac{W}{T}$
	Dissipazione adiabatica di lavoro in energia interna di un sistema (temperatura finale $T_f > T_i$ temperatura iniziale)	$C_P \ln (T_f/T_i)$	0	$C_P \ln (T_f/T_i)$
Irreversibilità meccanica interna	Espansione libera di un gas ideale (volume finale $V_f > V_i$ volume iniziale)	$n\,R \ln (V_f/V_i)$	0	$n\,R \ln (V_f/V_i)$
Irreversibilità termica esterna	Trasmissione di calore attraverso un mezzo da un serbatoio caldo ad uno più freddo, isolati dall'ambiente ($T_1 > T_2$)	$\frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1}$	0	$\frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1}$
Irreversibilità chimica	Diffusione di due diversi gas ideali inerti che occupano inizialmente volume uguale	$2\,R \ln 2$	0	$2\,R \ln 2$

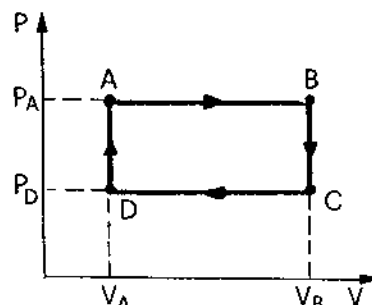
Esercizi del capitolo IV

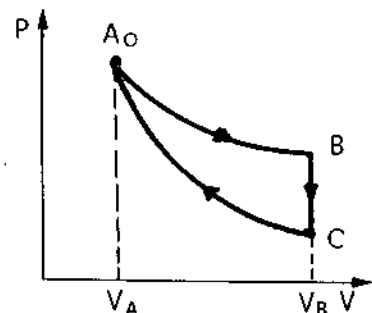
IV.2. Una macchina di Carnot opera tra due sorgenti a temperature T_c = 500 K e T_f = 300 K. Calcolare:
a) il rendimento della macchina. Calcolare anche il rendimento della macchina nei casi in cui:
b) T_c sia aumentato di ΔT = 20 K e T_f resti al valore di 300 K;
c) T_c resti al valore di 500 K e T_f sia diminuito di ΔT = 20 K.

(Risposte: η = 0,40; 0,42; 0,44)

IV.2. Una macchina di Carnot lavora tra una sorgente a temperatura t_c = 700°C ed una sorgente fredda a temperatura t_f = 0°C, realizzata con ghiaccio fondente. Durante il funzionamento della macchina si osserva che il ghiaccio della sorgente fredda fonde al ritmo di 5 g/s. Ricordando che il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda \simeq$ 80 cal/g, calcolare la potenza sviluppata dalla macchina.

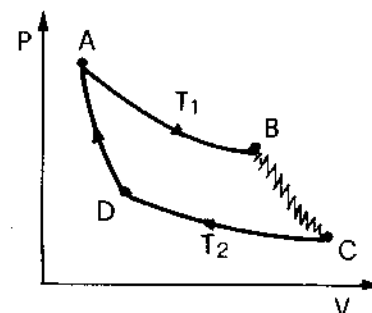
(Risposta: W = 4,3 kW)

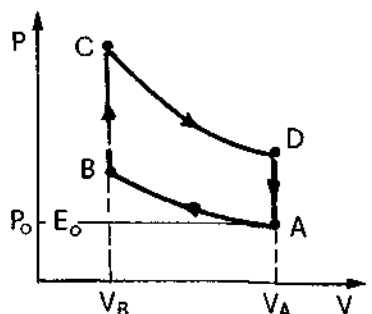
IV.3. Calcolare il rendimento del ciclo reversibile eseguito da un gas perfetto monoatomico e costituito da due isocore e da due isobare, come mostrato in figura.
(P_A = 4 atm, P_D = 2 atm, V_A = 1 l, V_B = 4 l) (Risposta: η = 0,188)

IV.4. Calcolare il rendimento del ciclo reversibile rappresentato in figura, nell'ipotesi che il fluido termodinamico sia un gas perfetto biatomico.
La trasformazione $A\,B$ è isoterma, la $B\,C$ isocora e la $C\,A$ adiabatica. Il rapporto di compressione V_B/V_A vale 3.

(Risposta: η = 0,19)

IV.5. Una macchina può lavorare tra una sorgente a temperatura t_c = 100°C ed una sorgente a temperatura t_f = 0°C, costituita da una massa m = 20 kg di ghiaccio a 0°C. Utilizzando la sorgente fredda fino a che tutto il ghiaccio è fuso, calcolare il massimo lavoro ottenibile da una macchina del tipo descritto ($\lambda \simeq$ 80 cal/g).

(Risposta: $L = 5{,}9 \cdot 10^5$ cal)

IV.6. Una macchina termica a gas perfetto, operante tra due sorgenti a temperatura T_1 = 500 K e T_2 = 200 K, esegue il ciclo indicato in figura. La trasformazione $A\,B$ è un'isoterma reversibile a temperatura T_1, la $B\,C$ è un'adiabatica irreversibile, la $C\,D$ un'isoterma reversibile a temperatura T_2 e la $D\,A$ una adiabatica reversibile.
Sapendo che V_B/V_A = 2 e che V_C/V_D = 2,3 calcolare:
a) il rapporto tra i lavori eseguiti nei due rami adiabatici ($B\,C$ e $D\,A$);
b) il rendimento del ciclo;
c) il rendimento di una macchina di Carnot (reversibile) operante tra le stesse sorgenti.

(Risposte: − 1; 0,52; 0,60)

IV.7. Un ciclo Otto ideale (schematizzazione del motore a benzina a quattro tempi) è costituito dall'insieme di trasformazioni riportate in figura (tutte reversibili).
Le trasformazioni $A\,B$ e $C\,D$ sono adiabatiche, le $B\,C$ e $D\,A$ isocore. La $E\,A$ rappresenta l'immissione isobara di miscela aria-benzina, mentre la $A\,E$ rappresenta l'espulsione isobara dei gas combusti.
Calcolare il rendimento del ciclo nell'ipotesi che il fluido termodinamico sia un gas perfetto biatomico (γ = 1,4) e che il rapporto di compressione V_A/V_B valga 8.

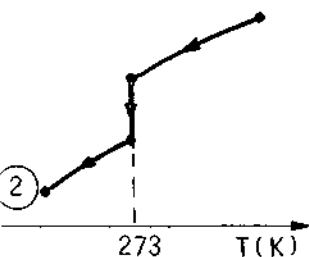
(Risposta: 0,56)

IV.8. Una macchina termica a gas perfetto monoatomico esegue un ciclo reversibile costituito da:
– una trasformazione politropica $P V^k$ = costante, che porta da uno stato A, di volume V_A, ad uno stato B, di volume $V_B = 2\ V_A$;
– una trasformazione isobara che porta da B a C con $V_C = V_A$;
– una trasformazione isocora a volume V_A dallo stato C allo stato A, in modo che il ciclo si chiuda.
Calcolare il rendimento del ciclo nel caso in cui si abbia $k = 0{,}5$.

(Risposta: $\eta = 6{,}4\%$)

IV.9. Il lavoro erogato da una macchina di Carnot, operante tra una sorgente calda a temperatura $T_c = 373$ K ed una sorgente a temperatura ambiente $T_a = 293$ K, viene usato per far funzionare una pompa di calore, realizzata ancora con una macchina di Carnot, che preleva calore da una cella frigorifera a temperatura $T_f = 263$ K e cede calore all'ambiente ($T_a = 293$ K). Se dalla cella frigorifera viene prelevata la quantità di calore $Q_f = 100$ cal, quanto calore Q_c viene corrispondentemente prelevato dalla sorgente calda? Quanto calore Q_a scambia complessivamente la sorgente a temperatura ambiente?

(Risposte: $Q_c = 53{,}2$ cal; $Q_a = 153{,}2$ cal)

2

273 T(K)

ntropia nei cambiamenti di ato: il passaggio da una fase ll'altra avviene, per un dato lore della pressione, a temperatura costante con scambio i calore con l'esterno (calore tente).

IV.10. Una massa $m = 100$ g di acqua, inizialmente a temperatura $t_1 = 30$°C, è raffreddata a pressione atmosferica fino a diventare ghiaccio a temperatura $t_2 = 0$°C.
Calcolare la variazione di entropia dell'acqua sapendo che il calore specifico dell'acqua in fase liquida vale $c_l = 1$ cal/g °C; il calore specifico dell'acqua in fase solida (ghiaccio) vale $c_s = 0{,}5$ cal/g °C; il calore latente di fusione vale $\lambda \simeq 80$ cal/g. Si può supporre che i calori specifici non varino nell'intervallo di temperatura considerato.

(Risposta: $\Delta S = -0{,}042\ \dfrac{\text{cal}}{\text{K}}$)

IV.11. Calcolare:
a) la variazione di entropia ΔS_a di una massa $m = 2$ kg di acqua, inizialmente a temperatura $t_1 = 10$°C, posta a contatto con una sorgente a temperatura $t_2 = 100$°C fino a che la temperatura dell'acqua raggiunge quella della sorgente.
b) Quanto vale la variazione ΔS_s di entropia della sorgente?
c) Di quanto varia l'entropia dell'universo?

(Risposte: $\Delta S_a = 552$ cal/K; $\Delta S_s = -483$ cal/K; $\Delta S_{un} = 69$ cal/K)

IV.12. Una massa $m = 1$ kg. inizialmente a temperatura $t_1 = 90$°C viene gettata in uno stagno la cui temperatura è $t_2 = 20$°C.
Calcolare la variazione di entropia dell'universo.

(Risposta: $\Delta S_{un} = 24{,}7$ cal/K)

IV.13. Come visto al Cap. II, fig. II.1, il calore specifico molare dell'alluminio varia leggermente con la temperatura nell'intervallo 100°C ÷ 400°C. Supponendo, limitatamente a questo intervallo, di rappresentare l'andamento del calore molare con la temperatura mediante un'espressione lineare del tipo:

$$C(T) = A + B\,T \quad \text{(con } A \text{ e } B \text{ costanti)},$$

con le condizioni: $C(100°) = 6{,}1$ cal/mole °C e $C(400°C) = 6{,}8$ cal/mole °C, calcolare la variazione di entropia di 10 moli di alluminio che passano dalla temperatura $t_1 = 150$°C alla temperatura $t_2 = 350$°C

(Risposta: 24,9 cal/K)

IV.14. Una macchina termica opera reversibilmente scambiando calore con tre sorgenti a temperature $T_A = 500$ K, $T_B = 373$ K e $T_C = 273$ K rispettivamente. La macchina assorbe calore $Q_A = 200$ cal dalla sorgente a temperatura T_A e calore $Q_B = 300$ cal dalla sorgente a temperatura T_B.
Calcolare il rendimento del ciclo.

(Risposta: $\eta = 34{,}4\%$)

IV.15. Una macchina termica scambia calore con due sole sorgenti a temperature $T_c = 500$ K e $T_f = 300$ K rispettivamente. In un certo intervallo di tempo la macchina produce un lavoro $L = 100$ J con un rendimento $\eta = 0{,}20$. Calcolare la corrispondente variazione di entropia dell'universo.

(Risposta: $\Delta S_{un} = 0{,}33$ J/K)

IV.16. Un fluido termodinamico esegue un ciclo di Carnot (reversibile) operando tra due sorgenti le cui temperature differiscono di 200 K. La variazione di entropia lungo la trasformazione isoterma alla temperatura inferiore è $\Delta S_f = -20$ cal/K. Calcolare il lavoro compiuto nel ciclo.

(Risposta: $L = 1{,}67 \cdot 10^4 J$)

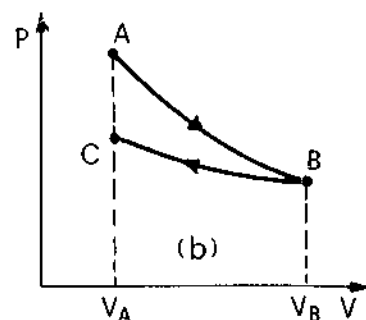
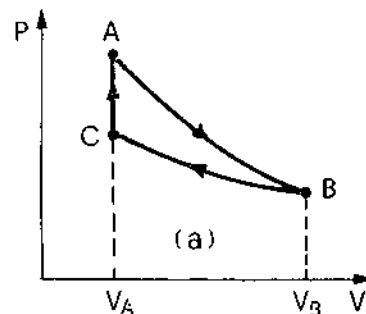
IV.17. Un ciclo termodinamico reversibile, relativo ad una mole di gas perfetto monoatomico, è composto da una trasformazione AB isoterma a temperatura $T_1 = 300$ K, da una isocora BC che porta il gas a temperatura $T_2 = 200$ K e da una adiabatica CA che chiude il ciclo.
a) Come si rappresenta il ciclo nel diagramma entropico (T, S)?
b) Quanto vale la variazione di entropia ΔS_{AB} nella isoterma AB?

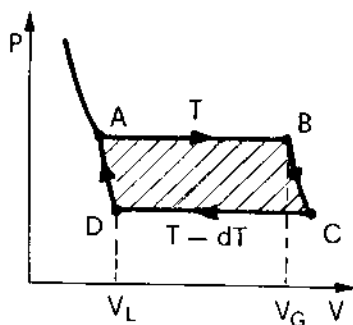
(Risposta: $\Delta S_{AB} = 1{,}22$ cal/K)

IV.18. Una mole di gas perfetto monoatomico esegue un ciclo reversibile costituito da una trasformazione adiabatica AB, da un'isoterma BC a temperatura $T_B = 300$ K e da un'isocora CA.
Il rapporto di compressione vale $V_B/V_A = 3$. Calcolare il lavoro del ciclo nel caso in cui:
a) la trasformazione reversibile CA è realizzata fornendo calore a volume costante mediante infiniti contatti termici a temperature via via crescenti di infinitesimi da T_C a T_A;
b) la trasformazione isocora CA è realizzata isolando termicamente il recipiente e mettendo in movimento un mulinello al suo interno per un tempo adeguato.

(Risposte: a) $L = +322$ cal; b) $L = -659$ cal)

IV.19. Una massa $m = 1$ kg di acqua inizialmente a temperatura $t_i = 0$°C viene portata a 100°C in tre modi diversi:
a) ponendola direttamente a contatto con una sorgente a temperatura $t_f = 100$°C; oppure
b) ponendola prima a contatto con una sorgente a temperatura intermedia $t_2 = 50$°C e, dopo che un primo equilibrio si è raggiunto a 50°C, ponendo l'acqua a contatto con la sorgente a temperatura $t_f = 100$°C; oppure
c) ponendo l'acqua prima a contatto con la sorgente a temperatura $t_2 = 50$°C, ponendola poi a contatto con una sorgente a temperatura $t_3 = 75$°C fino ad equilibrio a temperatura t_3, e, per ultimo, ponendo l'acqua a contatto con la sorgente a 100°C fino all'equilibrio finale.
Calcolare la variazione dell'entropia dell'universo nei tre casi.

(Risposte: $\Delta S_{un}^{(a)} = 44{,}0$ cal/K; $\Delta S_{un}^{(b)} = 23{,}2$ cal/K; $\Delta S_{un}^{(c)} = 18{,}5$ cal/K)

IV.20. Una massa $m = 0{,}5$ kg di rame inizialmente a temperatura ambiente ($t_i = 20°C$) viene messo a contatto con una sorgente S a temperatura $t_s = 100°C$ fino a che non ne raggiunge la temperatura.
A questo punto il blocco viene gettato nelle acque di un lago L a temperatura $t_L = 20°C$, dove resta fino al raggiungimento del nuovo equilibrio termico. Sapendo che il calore specifico del rame è $c = 0{,}09$ cal/g K, calcolare:
a) l'integrale di Clausius per il blocco di rame;
b) la variazione di entropia per l'intero sistema (rame + sorgente + lago)

(Risposte: a) $-2{,}64$ cal/K; b) $+2{,}64$ cal/K)

Equazione di Clausius-Clapeyron.

IV.21. Consideriamo un ciclo infinitesimo di Carnot che utilizzi come fluido termodinamico la massa m di una data sostanza e che sia costituito dalla seguente sequenza di trasformazioni reversibili:
AB: la sostanza passa dallo stato liquido (volume V_L) allo stato gassoso (volume V_G) a temperatura costante T;
BC: il vapore passa in modo adiabatico dalla temperatura T alla temperatura $T - dT$ aumentando di una quantità infinitesima il volume;
CD: la sostanza torna allo stato liquido con una compressione isoterma a temperatura $T - dT$;
DA: il liquido passa adiabaticamente dalla temperatura ($T - dT$) alla temperatura iniziale T, diminuendo di una quantità infinitesima il suo volume.
Supponendo noti V_L, V_G, T e λ_{ev} (calore latente di evaporazione) e trascurando le variazioni di volume nelle adiabatiche, ricavare l'espressione della differenza dP tra le tensioni di vapore saturo relative alle temperature T e $T - dT$ rispettivamente.

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo IV

IV.1. Per macchina di Carnot si intende una macchina che opera tra due sole sorgenti con ciclo reversibile. Usare il teorema di Carnot e ricordare l'espressione del rendimento, in funzione delle temperature delle sorgenti, ricavata nel caso di ciclo reversibile che usi come fluido termodinamico un gas perfetto.

IV.2. Il rendimento della macchina (reversibile) si ricava dalle temperature delle sorgenti. Calori scambiati e lavoro vanno considerati relativamente all'unità di tempo.

IV.3. $L = \int P\,dV$ è facilmente ricavabile per integrazione grafica nel diagramma di Clapeyron. Individuare i due rami del ciclo in cui il calore è assorbito dal gas.

IV.4. Esprimere il rendimento in funzione di $|Q_{CED}|$ e $|Q_{ASS}|$.

IV.5. Ricordare il teorema di Carnot ed individuare le caratteristiche della macchina che rende massimo il rendimento. Poi procedere come per il problema IV.2.

IV.6. a) Applicare il primo principio della termodinamica alle trasformazioni adiabatiche BC e DA e ricordare che, per gas perfetti, $U = U(T)$.
b) Osservare che, a differenza del caso di ciclo reversibile di Carnot, $(V_B/V_A) \neq (V_C/V_D)$.

IV.7. Basta applicare la formula $\eta = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{|Q_{ASS}|}$ notando che gli scambi di calore avvengono sulle isocore reversibili e che temperature e volumi sono legati dalla relazione delle adiabatiche reversibili.

IV.8. Il calore scambiato (in modulo e segno) lungo la politropica può essere calcolato a partire dall'espressione generale, già ricavata, per il calore molare per le politropiche.

IV.9. a) Si tratta di macchine reversibili collegate in modo che il lavoro positivo del motore venga utilizzato con segno negativo nel frigorifero. Nello svolgimento può risultare conveniente considerare i moduli delle grandezze in gioco.
b) Si può considerare il sistema isolato costituito dalle tre sorgenti e dai due fluidi delle macchine di Carnot. In tale sistema si svolgono processi reversibili. Ricordare la disequazione di Clausius tenendo conto che i fluidi delle macchine compiono trasformazioni cicliche.

IV.10. Il processo in questione può essere ritenuto reversibile e separabile in tre processi parziali:
a) raffreddamento reversibile da 30°C a 0°C;
b) passaggio di stato liquido → solido a t = 0°C = cost. (sottrazione di calore)
c) raffreddamento del ghiaccio da 0°C a − 10°C.

IV.11. a) L'acqua compie una trasformazione irreversibile; per il cacolo di ΔS_a scegliere un'opportuna trasformazione reversibile.
b) La sorgente scambia, in modo isotermo, la quantità di calore ricavata dall'acqua.
c) L'entropia è funzione di stato additiva.

IV.12. Nel processo di mescolamento l'universo è costituito dalla massa m e dall'acqua dello stagno. Lo stagno, a causa della sua grande massa, non cambia apprezzabilmente la sua temperatura.

IV.13. Determinare le costanti A e B e poi sviluppare analiticamente l'integrale dell'entropia.

IV.14. Essendo nota la quantità totale di calore assorbita, per calcolare il rendimento basta calcolare la quantità di calore ceduta alla sorgente a temperatura T_c. Si tratta di un ciclo reversibile.

IV.15. Il rendimento della macchina risulta inferiore a quello di una macchina di Carnot (reversibile) che operi tra le stesse sorgenti. Ricordare che l'entropia è una funzione additiva.

IV.16. È conveniente rappresentare il ciclo nel diagramma entropico (T, S) e ricordare il significato dell'area racchiusa dal ciclo.

IV.17. a) Ricavare l'espressione esplicita $T = T(S)$ per una isocora reversibile di gas perfetto.
b) Si può procedere tenendo conto che si tratta di un ciclo e che l'entropia è funzione di stato.

IV.18. a) Il lavoro lungo CA è nullo. Tenere conto che gli stati A e B si trovano su un'adiabatica reversibile.
b) Analizzare il lavoro lungo la trasformazione CA, a volume costante e con gas termicamente isolato, e confrontarlo con quello relativo all'adiabatica AB.

IV.19. Procedere come nel problema IV.11, osservando che, per quanto riguarda l'acqua, i tre diversi modi di riscaldamento producono lo stesso effetto complessivo.
Per l'ultima domanda ricordare che l'universo è un sistema isolato al cui interno avvengono trasformazioni per cui vale la disequazione di Clausius.

IV.20. Per il calcolo dell'integrale di Clausius del rame ricordare che il sistema (rame + sorgente + lago) è isolato. Il lago si comporta come una sorgente a temperatura T_L.

IV.21. Il lavoro del ciclo è pari all'area del parallelogramma ($\sim$ rettangolo) $A\,B\,C\,D$. Tale lavoro può anche essere espresso tramite il rendimento del ciclo e la quantità di calore assorbita dalla sorgente calda.

Capitolo quinto

Funzioni termodinamiche

La trattazione di molti problemi di termodinamica è facilitata dall'introduzione di un certo numero di *funzioni termodinamiche*, ottenute combinando opportunamente funzioni o parametri di stato già noti:

Funzioni termodinamiche.

- energia interna U;
- entropia S;
- pressione P;
- volume V;
- temperatura T.

Le ulteriori funzioni termodinamiche che introdurremo, e di cui ricaveremo alcune proprietà utili nelle applicazioni, sono:

- *entalpia* $H = U + PV$;
- *funzione di Helmoltz* o energia libera $F = U - TS$;
- *funzione di Gibbs* o entalpia libera $G = U + PV - TS = H - TS$.

In sostanza, l'uso delle funzioni termodinamiche consente di porre in modo sintetico, per i vari processi, le condizioni che il primo e il secondo principio della termodinamica impongono all'evoluzione delle trasformazioni termodinamiche.

Cominceremo col discutere alcune proprietà dell'energia interna che non potevano essere discusse nel cap. II quando ancora non avevamo introdotto la funzione di stato di entropia.

V.1. Energia interna

È interessante in termodinamica la valutazione della velocità di variazione di una grandezza al variare di un'altra quando tutti gli altri parametri siano tenuti costanti. Matematicamente, tali velocità di variazione sono evidentemente rappresentate da derivate parziali, e possono essere calcolate quando siano note le relazioni funzionali fra le grandezze considerate.

Energia interna.

Derivate parziali dell'energia interna.

Tuttavia, nella pratica, molto spesso si è di fronte ad un'esigenza opposta: cioè quella di ricostruire la forma di una funzione di stato a partire dalla conoscenza delle sue derivate parziali. A causa della difficoltà di determinare sperimentalmente alcune derivate parziali, tornano quindi molto utili delle relazioni tra derivate parziali che consentono di conoscerne alcune in funzione di altre (o di semplici parametri di stato) di più facile determinazione sperimentale.

Diamo qui due esempi riguardanti l'energia interna.

La quantità $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$ esprime la variazione di energia interna al variare del volume del sistema quando la trasformazione sia *isoentropica, cioè a entropia costante* (il che accade ad esempio se la trasformazione è adiabatica e reversibile).

Riferendoci a trasformazioni quasi statiche elementari possiamo scrivere (supponendo che il lavoro sia solo lavoro reversibile di volume):

(primo principio) $$dU = \delta Q - P dV \qquad [V.1]$$

(definizione di entropia) $$dS = \frac{\delta Q}{T} \text{ (cioè } \delta Q = T\,dS) \qquad [V.2]$$

Sostituendo la [V.2.] nella [V.1.] si ha:

$dU = T\,dS - P\,dV$

$$\boxed{dU = T\,dS - P dV} \qquad [V.3]$$

D'altra parte, scegliendo come variabili indipendenti V ed S, deve aversi:

$U = U(S, V)$

$$U = U(S, V)$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV \qquad [V.4]$$

Confrontando la [V.3] e la [V.4] si ha:

$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T$

$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = P$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T$$
$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -P \qquad [V.5]$$

Dunque $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$, così come $\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$, risultano essere di facile determinazione, essendo riconducibili a una misura rispettivamente di pressione e di temperatura.

$U = U(V, T)$

$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$

Consideriamo, ora, la variazione di U rispetto al volume V quando la temperatura T sia mantenuta costante $\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right)$. Nel caso di un gas perfetto, l'esperienza di Joule ci ha consentito di concludere che U dipende solo dalla temperatura, per cui $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$.

Nel caso generale la misura di $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ presenta però notevoli difficoltà perché consiste nel valutare la variazione di U corrispondente a una determinata variazione di V, mentre viene somministrato calore al sistema in modo da mantenerne costante la temperatura.

Il seguente ragionamento consente di esprimere $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ in termini di quantità più facilmente misurabili.

Consideriamo un ciclo elementare di Carnot fra due sorgenti a temperatura rispettivamente T e $T - dT$. Il lavoro su un ciclo (rappresentato nel piano di Clapeyron dall'area della figura compresa entro il ciclo) può essere espresso - nel caso di ciclo elementare - a meno di infinitesimi di ordine superiore, approssimando la figura con un parallelogramma; ottenendo:

$$\delta L = dP \cdot dV \qquad \text{[V.6]}$$

D'altra parte il lavoro δL può anche essere espresso in termini del calore δQ assorbito nell'espansione isoterma da A a B:

$$\delta L = \eta\, \delta Q \qquad \text{[V.7]}$$

dove η è il rendimento del ciclo di Carnot

$$\eta = 1 - \frac{T - dT}{T} = \frac{dT}{T} \qquad \text{[V.8]}$$

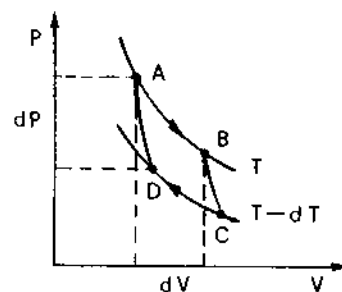
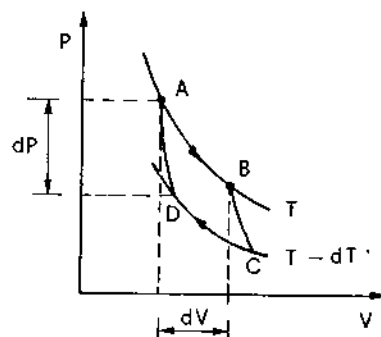
Inserendo la [V.8] nella [V.7] si ha:

$$\delta L = \delta Q \frac{dT}{T} \qquad \text{[V.9]}$$

Per confronto fra la [V.9] e la [V.6]:

$$dP \cdot dV = \delta Q \cdot \frac{dT}{T} \qquad \text{[V.10]}$$

Dalla figura si vede che ciò che noi abbiamo indicato con dP è in realtà la variazione di pressione dP corrispondente a una variazione dT di temperatura, ma mantenendo costante il volume (a meno di infinitesimi di ordine superiore):

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT \qquad \text{[V.11]}$$

Inserendo la [V.11] nella [V.10] si ha:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \cdot dT \cdot dV = \delta Q \cdot \frac{dT}{T}$$

da cui:

$$\delta Q = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV \qquad [V.12]$$

Applicando il primo principio alla espansione isoterma da A a B si ha, tenendo conto della [V.12] e del fatto che lungo una isoterma $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$:

$$dU = \delta Q - \delta L$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV - P\,dV \qquad [V.13]$$

da cui infine l'espressione cercata:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \qquad [V.14]$$

La quantità $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ è di facile misura perché rappresenta la variazione di pressione corrispondente a una variazione unitaria di temperatura, quando il volume del sistema è mantenuto costante. Nel paragrafo V.3 ricaveremo in altro modo la [V.14].

Qualora sia nota l'equazione di stato del sistema considerato (cioè sia nota P in funzione di V e T) la stessa [V.14] consente di calcolare $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ e quindi anche di determinare l'espressione dell'energia interna una volta noto C_V, considerato che già sappiamo (vedi § II.6.) che:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = n\,C_V \qquad [V.15]$$

Energia interna di un gas perfetto.

Nel caso di un gas perfetto,

$$P = \frac{n\,R\,T}{V} \qquad [V.16]$$

da cui:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{n\,R}{V} \qquad [V.17]$$

Inserendo la [V.16] e la [V.17] nella [V.14] si ha:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{n\,R\,T}{V} - \frac{n\,R\,T}{V} = 0 \qquad [V.18]$$

il che comporta $U = U(T)$.

L'espressione generale [II.48]:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

diviene dunque per un gas perfetto (in virtù delle [V.15] e [V.18]):

$$dU = \frac{\partial U}{dT}\, dT = n\, C_V\, dT$$

così come nel § II.4.4. era stato ricavato a partire da considerazioni puramente fenomenologiche (esperimento di Joule).

Per un gas di Van der Waals, dall'equazione di stato [II.38] si ha:

Energia interna di un gas di Van der Waals.

$$P = \frac{R\,T}{V-b} - \frac{a}{V^2} \qquad [V.19]$$

da cui

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b} \qquad [V.20]$$

Inserendo la [V.19] e la [V.20] nella [V.14] si ha:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\frac{R}{V-b} - \frac{R\,T}{V-b} + \frac{a}{V^2} = \frac{a}{V^2} > 0 \qquad [V.21]$$

A temperatura costante, al crescere del volume l'energia interna aumenta. Ciò è dovuto al fatto che all'aumentare del volume aumenta la distanza media intermolecolare e quindi deve essere fatto un lavoro di allontanamento contro le forze di attrazione reciproca delle molecole.

Integrando la [V.21] rispetto al volume V, si ha:

$$U = \int \frac{a}{V^2}\, dV + C(T) = -\frac{a}{V} + C(T) \qquad [V.22]$$

La costante di integrazione C della [V.22] può infatti dipendere da T, considerato che la [V.21] ci dice che derivando da [V.22] rispetto a V a temperatura T costante dobbiamo ottenere $\frac{a}{V^2}$. Derivando la [V.22] rispetto a T a volume costante (e tenuto conto della [V.15]) abbiamo:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{dC(T)}{dT} = C_V \quad \text{(per una mole)}$$

che, integrata rispetto a T, fornisce:

$$C(T) = C_V\, T + \text{costante} \qquad [V.23]$$

Inserendo la [V.23] nella [V.22] abbiamo infine:

$$\boxed{U = -\frac{a}{V} + C_V\, T + \text{costante}}$$

Per un gas di Van der Waals.
$U = -\frac{a}{V} + C_V\, T + \text{costante}$.

che dimostra la [II.40] che avevamo allora anticipato senza dimostrazione.

V.2. La funzione di stato entalpia H

Funzione di stato entalpia.

Quando un sistema termodinamico subisce una trasformazione, per definizione cambia il suo stato; e per conseguenza varia di solito la sua energia interna. Ciò comporta di norma la necessità che il sistema scambi con le sorgenti, e più in generale con l'ambiente, energia e in particolare calore.

Poniamo la nostra attenzione su trasformazioni quasi statiche in cui $\delta L = \delta L_R = P\,dV$, cosicché il primo principio – riferito alla trasformazione elementare – possa essere scritto come

$$\delta Q = dU + P\,dV \qquad [V.24]$$

Su una trasformazione a volume costante per cui il lavoro L sia solo lavoro di volume. $Q = \Delta U$.

Se la trasformazione avviene a volume costante ($dV = 0$) la [V.24] ci mostra che *il calore che il sistema scambia con l'ambiente è direttamente legato alla variazione di energia interna:*

$$\delta Q = dU \qquad Q = \Delta U \quad \text{trasformazioni a volume costante} \qquad [V.25]$$

Molto spesso tuttavia la trasformazione non avviene a volume costante. È molto comune nella pratica il caso che una trasformazione (sia essa fisica o chimica) avvenga a *pressione costante*; in particolare capita sovente che un sistema si trasformi alla pressione dell'ambiente. In questi casi, il calcolo del calore che il sistema assorbe (o cede) dall'ambiente è facilitato usando la *entalpia H*, definita come:

$$\boxed{H = U + PV} \qquad [V.26]$$

Differenziando la [V.26] abbiamo:

$$dH = dU + P\,dV + V\,dP \qquad [V.27]$$

Sempre nell'ipotesi di trasformazioni quasi statiche senza attrito, inserendo l'equazione del primo principio [V.24] nella [V.27] si ha:

Su una trasformazione a pressione costante per cui il lavoro L sia solo lavoro di volume. $Q = \Delta H$.

$$dH = \delta Q + V\,dP \qquad [V.28]$$

e nell'ipotesi di *trasformazione a pressione costante* (P = costante; $dP = 0$):

$$\delta Q = dH \qquad Q = \Delta H \quad \text{trasformazione a pressione costante} \qquad [V.29]$$

La quantità di calore che il sistema fornisce (assorbe) in una trasformazione a pressione costante è pari alla sua diminuzione (aumento) di entalpia.

Segue in particolare dalla [V.29]

$$C_P = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P \qquad [V.30]$$

Esempio

E.V.1. *Calcolare il calore specifico molare C_P a pressione costante per un gas perfetto.*

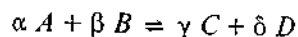
Calcolo di C_P per un gas perfetto.

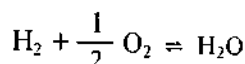
Dalla [V.26], tenuto conto che per un gas perfetto $U = n C_V T + \text{cost.}$, $PV = nRT$, si ha $H = n C_V T + n R T + \text{cost.}$ Derivando rispetto a T e dividendo per n (come vuole la [V.30]), si ottiene

$$C_P = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = C_V + R$$

Nella pratica, molte reazioni chimiche avvengono a pressione costante (ad esempio alla pressione atmosferica). Le quantità di calore messe in gioco nella reazione e i loro segni (reazioni eso- o endo-termiche) sono di notevole interesse teorico e pratico, e il loro calcolo è facilitato dall'impiego della funzione entalpia.

Si consideri – ad esempio – una reazione chimica del tipo:

$$\alpha A + \beta B \rightleftharpoons \gamma C + \delta D$$

dove le quantità α, β, γ, δ sono i cosiddetti *coefficienti stechiometrici* della reazione (numeri interi o frazionari), A e B sono i simboli dei costituenti iniziali e C e D i simboli dei prodotti della reazione. Per esempio, nella reazione:

$$H_2 + \frac{1}{2} O_2 \rightleftharpoons H_2O$$

si ha $A = H_2$; $B = O_2$; $C = H_2O$; D mancante.

Inoltre $\alpha = 1$; $\beta = \frac{1}{2}$; $\gamma = 1$; $\delta = 0$.

Mentre la reazione si sviluppa, i numeri di moli dei costituenti iniziali che hanno reagito, e il numero di moli di prodotti di reazione che si sono formati, vanno cambiando in modo tale da restare proporzionali ai coefficienti stechiometrici. Nell'esempio precedente n_1 moli di H_2 reagiscono con $n_2 = \frac{n_1}{2}$ moli di O_2, e si formano $n_3 = n_1$ moli di H_2O.

Dunque

$$\frac{n_1}{\alpha} = \frac{n_2}{\beta} = \frac{n_3}{\gamma}.$$

In generale in un intervallo di tempo elementare dt, la reazione procede in modo che i costituenti iniziali che hanno reagito e i prodotti di reazione che si sono formati stiano nei rapporti

$$\frac{dn_1}{\alpha} = \frac{dn_2}{\beta} = \frac{dn_3}{\gamma} = \frac{dn_4}{\delta}.$$

Tale rapporto (che è lo stesso per i vari costituenti coinvolti nella reazione) è detto *grado di avanzamento della reazione*. Quando la reazione è avanzata di 1 mole

Grado di avanzamento di una reazione.

$$\left(\frac{\Delta n_1}{\alpha} = \frac{\Delta n_2}{\beta} = \frac{\Delta n_3}{\gamma} = \frac{\Delta n_4}{\delta} = 1 \text{ mole}\right),$$

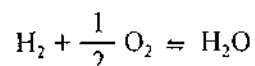
Entalpia molare di reazione.

la corrispondente variazione di entalpia viene detta *entalpia molare di reazione* e la si indica usualmente col simbolo ΔH_r. Per quanto detto sopra, ΔH_r (calcolato per un certo valore della temperatura e della pressione) fornisce il *calore molare della reazione a pressione costante* per quel valore della temperatura e della pressione. In chimica si conviene di scegliere dei valori standards di temperatura e pressione (usualmente t = 25°C e P = 1 atm) per la tabulazione delle entalpie molari (ricavate da misure calorimetriche) dette *entalpie molari standard* (ΔH_r°).

Calore molare di reazione a pressione costante.

Entalpia molare standard.

Risulta utile, per quello che segue, introdurre il concetto di *reazione di formazione*. Si tratta di un sottogruppo delle reazioni chimiche, nel quale i costituenti iniziali sono elementi (molecole) e i prodotti di reazione si riducono a un solo composto. L'esempio precedente

$$H_2 + \frac{1}{2} O_2 \rightleftharpoons H_2O$$

è in realtà una reazione di formazione (dell'acqua, a partire dagli elementi chimici H_2 e O_2). Si ha in questi casi l'*entalpia molare di formazione* ΔH_f e – alle condizioni standard – l'*entalpia molare standard di formazione* ΔH_f°.

Entalpia molare standard di formazione.

L'entalpia molare standard di una qualunque reazione chimica può essere espressa in termini delle entalpie molari standard di formazione dei costituenti iniziali e dei prodotti di reazione tramite la relazione (*legge di Hess*)

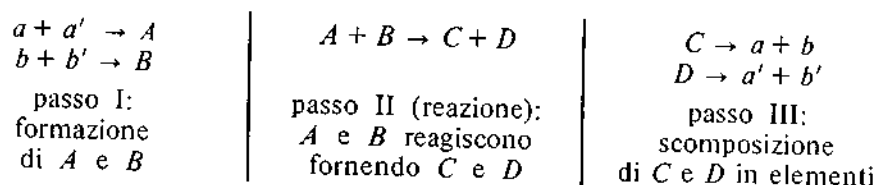
Legge di Hess.

$$\Delta H_r^\circ = \sum (\Delta H_f)_{\text{prodotti di reazione}} - \sum (\Delta H_f^\circ)_{\text{costituenti iniziali}} \qquad [V.31]$$

Entalpia standard di formazione ΔH_f° (kcal/mole) a 298 K di alcuni composti notevoli

COMPOSTI INORGANICI			
H_2O (liquida)	−68,32	CO_2 (gas)	− 94,05
HCl (gas)	−22,06	$CaCO_3$ (solido)	−288,40
SO_2 (gas)	−70,96	Fe_2O_3 (solido)	−196,50
NO_2 (gas)	−11,04	ZnO (solido)	− 83,20
COMPOSTI ORGANICI			
Metano (gas)	−17,89	Etilene (gas)	12,50
Etano (gas)	−20,24	Propilene (gas)	4,88
Propano (gas)	−24,82	Isobutene (gas)	− 3,34
Acetilene (gas)	54,19	Metanolo (liquido)	−57,02
Etanolo (liquido)	−66,35	Benzene (liquido)	11,72
ATOMI GASSOSI			
Idrogeno	52,10	Carbonio	171,70
Ossigeno	59,10	Azoto	112,50
Cloro	29,00	Bromo	26,70

La legge di Hess può essere facilmente dimostrata. Consideriamo ad esempio la reazione ciclica formata dai tre seguenti passi (ogni passo in condizioni standand):

$a + a' \rightarrow A$ $b + b' \rightarrow B$ passo I: formazione di A e B	$A + B \rightarrow C + D$ passo II (reazione): A e B reagiscono fornendo C e D	$C \rightarrow a + b$ $D \rightarrow a' + b'$ passo III: scomposizione di C e D in elementi

Nel primo passo la variazione di entalpia ΔH_I è data da

$$\Delta H_I = \sum (\Delta H_f^\circ)_{\text{costituenti iniziali}} .$$

Nel secondo passo la variazione di entalpia ΔH_{II} è data da

$$\Delta H_{II} = \Delta H_r^\circ .$$

Nel terzo passo la variazione di entalpia ΔH_{III} è data da

$$\Delta H_{III} = -\sum (\Delta H_f^\circ)_{\text{prodotti di reazione}} .$$

Sommando (e tenuto conto che sulla somma dei tre passi la variazione complessiva della funzione di stato entalpia è nulla trattandosi di trasformazione ciclica):

$$\sum (\Delta H_f^\circ)_{\text{costituenti iniziali}} + \Delta H_r^\circ - \sum (\Delta H_f{}^\circ)_{\text{prodotti di reazione}} = 0$$

da cui segue la legge di Hess [V.31].

Le entalpie molari standard di formazione sono state tabulate una volta per tutte. A partire da queste tabelle, ed usando la legge di Hess, possono essere calcolate le entalpie molari standard relative a qualunque reazione.

Esempio

Entalpia molare standard di una reazione chimica.

E.V.2. *Calcolare l'entalpia molare standard della seguente reazione* $4\ NH_3\ (gas) + 5\ O_2 \rightarrow 4\ NO\ (gas) + 6\ H_2O\ (liq.)$.

Sono note da tabella empirica le entalpie molari standard di formazione:

Entalpie molari standard di formazione	
Specie chimica	H_f° (kJ/mole)
H	0
H_2O (liq)	− 286
HCl (gas)	− 92
CO_2 (gas)	− 394
NH_3 (gas)	− 46
NO (gas)	− 90
.....	.....

Dalla legge di Hess si ha:

$$\begin{aligned}\Delta H_r^0 &= [4\ \Delta H_f^0(NO,\ gas) + 6\ \Delta H_f^0(H_2O,\ liq.)]_{\text{prodotti di reazione}} - \\ &- [4\ \Delta H_f^0(NH_3,\ gas) + 5\ \Delta H_f^0(O_2)]_{\text{costituenti iniziali}} = \\ &= [4 \cdot 90 + 6\,(-286)] - [4 \cdot (-46) + 6 \cdot 0) = \\ &= -1172\ \text{KJ/mole.}\end{aligned}$$

La conoscenza di ΔH_r – e dunque di Q – ha particolare rilievo nella progettazione di impianti chimici relativi a reazioni a pressione costante: il segno di ΔH_r indica il tipo di reattore (da riscaldare o da raffreddare), mentre il suo valore assoluto consente il dimensionamento degli scambiatori di calore.

È opportuno notare che le quantità ΔH_r e ΔH_f variano poco con la pressione, rispetto a ΔH_r^0 e ΔH_f^0, a meno che non intervengano cambiamenti di stato di aggregazione.

Anche nel caso dell'entalpia, possono essere ricavate interessanti relazioni fra derivate parziali. Per trasformazioni quasi statiche, la [V.28], accoppiata con la relazione $dS = \frac{\delta Q}{T}$ (da cui $\delta Q = T\,dS$), consente di scrivere

$$dH = T\,dS + V\,dP \qquad [V.32]$$

che esprime il differenziale dH come forma differenziale lineare nelle variabili S e P. La [V.32] ci dice che:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P = T \quad \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S = V \qquad [V.33]$$

Un noto teorema di analisi (teorema di Schwartz) impone l'uguaglianza delle derivate miste:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial S\,\partial P} = \frac{\partial^2 H}{\partial P\,\partial S}$$

da cui segue (tenendo conto delle [V.33]):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \qquad [V.34]$$

Equazioni di Maxwell.

La [V.34] è una delle cosiddette *equazioni di Maxwell*, e consente di esprimere una quantità difficilmente misurabile $\left(\text{quale è } \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P\right)$ con una quantità facilmente misurabile come $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S$, che rappresenta la variazione di temperatura rapportata a una variazione unitaria di pressione in una trasformazione isoentropica (ad esempio in una adiabatica reversibile).

Nel corso di questo capitolo, introdurremo altre equazioni di Maxwell, che riassumeremo poi in una tabella conclusiva a fine capitolo.

A proposito delle equazioni di Maxwell va notato che lo stato dei sistemi termodinamici può essere espresso, oltreché attraverso le variabili di stato P, V, T, anche usando come variabili indipendenti le funzioni di

stato che abbiano introdotto (S, U, F, G,...). Per fare ciò, basta tenere conto dei legami analitici che legano queste funzioni alle variabili P, V, T: ed eliminare una qualunque fra queste variabili introducendo al suo posto una fra le S, U, F, G,... Ciò può tornare a volte vantaggioso al fine di rendere più semplici alcune leggi utili.

Tuttavia va notato che le variabili P, V, T si misurano ricorrendo a specifici strumenti (manometri, termometri, ecc.) di facile uso sul sistema in stato di equilibrio; mentre le variabili U, S, F, G si calcolano coinvolgendo processi che cambiano lo stato del sistema e permettono la valutazione di variazioni di tali parametri (ΔS, ΔU, ΔF, ...).

Le equazioni di Maxwell legano grandezze di facile misura a grandezze di difficile misura.

V.3. Energia libera di Helmoltz F

Energia libera di Helmoltz.

Abbiamo visto che le funzioni di stato energia interna ed entalpia consentono un facile calcolo dell'energia (termica) che il sistema deve scambiare per compiere una determinata trasformazione, rispettivamente a volume e a pressione costante.

In meccanica, lo studio della stessa *funzione energia* (che in quel contesto era detta *energia potenziale* anziché energia interna) consentiva anche di calcolare le posizioni di equilibrio del sistema, considerato che un sistema meccanico tende a raggiungere le posizioni di minima energia potenziale.

La termodinamica tratta sistemi complessi, formati da un numero grandissimo di componenti capaci di muoversi in maniera almeno parzialmente indipendente l'uno dall'altro, e casuale. Considerazioni strettamente energetiche non sono allora sufficienti a definire l'evoluzione del sistema: abbiamo visto che un sistema isolato (e dunque di energia costante) evolve verso le configurazioni di entropia crescente. Per un sistema isolato, la configurazione di massima entropia rappresenta dunque una configurazione di equilibrio stabile; e ciò può essere interpretato, come vedremo nel capitolo VI, in base a considerazioni di carattere probabilistico.

Per un sistema isolato, le configurazioni di equilibrio stabili sono quelle di massima entropia S.

Restando qui nell'ambito dell'approccio macroscopico, notiamo che il caso che un sistema termodinamico sia isolato non rappresenta che un caso particolare, e tutt'altro che frequente; ed assume dunque grande rilievo il chiedersi in base a quali leggi possa essere individuata la configurazione di equilibrio di sistemi che evolvano scambiando anche energia (in particolare energia termica) con l'ambiente. A tal fine è utile introdurre le funzioni *energia libera*: quella *di Helmoltz* F, di cui ci occupiamo in questo paragrafo, e quella *di Gibbs* G, che verrà discussa nel paragrafo V.4.

Consideriamo un sistema termodinamico che scambi calore solo con una sorgente (ad esempio con l'ambiente) a temperatura uniforme e costante pari a T. Dalla [IV.25], tenuto conto che stiamo considerando il caso che sia $T =$ costante, ricaviamo:

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int_A^B \delta Q = \frac{Q}{T}$$

Da cui:

$$Q \leq T[S(B) - S(A)]$$

e poiché per il primo principio $L = Q - \Delta U$, si ha:

$$L \leq T[S(B) - S(A)] - [U(B) - U(A)] \qquad [V.35]$$

Se T rappresenta non solo la temperatura della sorgente con cui il sistema scambia calore, ma anche la temperatura del sistema nello stato A e nello stato B ($T_A = T_B = T$), introducendo una funzione F definita come:

$F = U - TS$

$$\boxed{F = U - TS} \qquad [V.36]$$

la [V.35] può essere scritta come:

$L \leq \Delta F$

$$L \leq -\Delta F \qquad \Delta F = F(B) - F(A) \qquad [V.37]$$

Questa disuguaglianza pone un limite superiore al lavoro che il sistema può compiere portandosi dallo stato A allo stato B; il segno di uguale vale per trasformazioni reversibili.

Nel caso particolare che il sistema non compia lavoro (se il lavoro è lavoro di volume, il sistema deve essere mantenuto a volume costante), la [V.37] ci dice:

$$\Delta F \leq 0 \quad \text{cioè} \quad F(B) \leq F(A) \qquad [V.38]$$

Per un sistema a volume costante, le configurazioni di equilibrio stabile sotto quelle di minima energia libera F

Un sistema termodinamico a volume costante, in contatto termico con una sorgente (con l'ambiente) a temperatura costante T, evolve verso stati di energia libera F decrescente; per esso dunque gli stati di energia libera minima rappresentano configurazioni di equilibrio stabile

Per trasformazioni quasi statiche elementari, differenziando la [V.36] e tenuto conto delle due relazioni $dU = \delta Q - P\,dV$; $\delta Q = T\,dS$, otteniamo (sempre nell'ipotesi che il lavoro sia solo lavoro di volume):

$$\begin{aligned} dF &= dU - T\,dS - S\,dT = \\ &= \delta Q - P\,dV - T\,dS - S\,dT = \\ &= T\,dS - P\,dV - T\,dS - S\,dT \\ dF &= -P\,dV - S\,dT \end{aligned} \qquad [V.39]$$

La [V.39] mostra che:

$dF = -P\,dV - S\,dT$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S \qquad [V.40]$$

Equazione di Maxwell.

$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$

Imponendo, come vuole il teorema di Schwartz, l'uguaglianza delle derivate seconde miste, otteniamo un'altra equazione di Maxwell:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \qquad [V.41]$$

Notiamo che il primo membro di questa equazione è di facile determinazione sperimentale (misure di pressione e di temperatura a volume costante) contrariamente al secondo membro.

Nel caso di un gas perfetto o di un gas reale, per i quali l'espressione di U e di S erano state date esplicitamente nei capitoli II e IV rispettivamente, possiamo facilmente scrivere l'espressione di F rifacendoci alla sua definizione [V.41]; si ottiene:

Energia libera di Helmoltz per un gas perfetto e per un gas di Van der Waals.

Gas perfetto (1 mole) $$F = C_V T + d - T(C_V \log T + R \log V + c)$$

Gas reale (1 mole) $$F = C_V T - \frac{a}{V} + d - T(C_V \log T + R \log (V - b) + c)$$

dove d e c sono costanti arbitrarie, mentre a e b sono le costanti dell'equazione di Van der Waals per il gas considerato.

Esempio

E.V.3. *Facendo uso dell'equazione di Maxwell [V.41] ricavare la relazione [V.14].*

Ricordiamo le relazioni:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \qquad [V.41]$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \qquad [V.14]$$

Dalla definizione di energia libera $F (F = U - TS)$ si ha

$$U = F + TS$$

che derivata a temperatura costante dà:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T + T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

Ma per la [V.40] abbiamo

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P$$

e per la [V.41]

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

Dunque

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -P + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

Va notato che per un sistema i cui stati (come succede per un gas) siano completamente definiti da due soli parametri (ad esempio V e T), la [V.38] non ha alcuna utilità; infatti se volume e temperatura sono entrambi

costanti il sistema non compie alcuna trasformazione ($A \equiv B$). La [V.38] è utile quando lo stato del sistema dipende da una ulteriore variabile f: il caso più comune è quello che la variabile f rappresenti il grado di avanzamento di una reazione chimica o di un cambiamento di stato di aggregazione.

In generale, quando la funzione F dipende dai tre parametri T, V, f, il lavoro non è più solo lavoro di volume; e nel differenziale dF, accanto ai termini $\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV = -P\,dV$ e $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT = -S\,dT$ della [V.39] compare anche il termine $\frac{\partial F}{\partial f}\,df$:

$$dF = -P\,dV - S\,dT + \left(\frac{\partial F}{\partial f}\right) df$$

Imponendo la condizione di equilibrio $dF = 0$ per T e V costanti, la precedente relazione ci dice che deve essere:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial f}\right)_{V,T} = 0 \qquad \text{[V.42]}$$

Come questa condizione di equilibrio possa essere usata per risolvere problemi utili verrà discusso nel § V.5. Va notato che all'equilibrio, in virtù della [V.42] dF torna ad essere espresso dalla [V.39], e il lavoro resta ancora unicamente lavoro di volume.

V.4. Energia libera di Gibbs G

Energia libera di Gibbs G.

È assai frequente nella pratica il caso che *un sistema termodinamico* in contatto termico con un ambiente *a temperatura costante T si trasformi* non già a volume costante, ma piuttosto *a pressione costante*: è questo il modo in cui sovente hanno luogo reazioni chimiche, o anche trasformazioni fisiche come in particolare cambiamenti di stato di aggregazione.

Per la trattazione di tali trasformazioni, e in particolare per descrivere gli stati di equilibrio dei sistemi ad esse soggetti, è utile introdurre l'*energia libera di Gibbs G* definita dalla relazione:

$G = H - TS$

$$\boxed{G = U + PV - TS = H - TS} \qquad \text{[V.43]}$$

Nell'ipotesi che il sistema si trasformi a pressione costante (oltre che a temperatura costante), il lavoro di volume L al primo membro della [V.35] può essere scritto come $P(V_B - V_A)$; per cui la [V.35] stessa diviene:

$$P(V_B - V_A) \leq T[S(B) - S(A)] - [U(B) - U(A)]$$

ovvero:

$$U(B) + P\,V_B - TS(B) \leq U(A) + P\,V_A - TS(A) \qquad \text{[V.44]}$$

Tenuto conto che $T_B = T_A = T$ e $P_B = P_A = P$, in virtù della definizione [V.43] la [V.44] può essere scritta come:

$$G(B) \leq G(A)$$

ovvero [V.45]

$$\Delta G \leq 0$$

Per un sistema termodinamico a contatto termico con un ambiente a temperatura T, che si trasformi a pressione costante, l'energia libera di Gibbs G non può aumentare. Gli stati in cui G è minima rappresentano pertanto stati di equilibrio stabile.

Gli stati di equilibrio di un sistema a temperatura e pressione costanti sono quelli per cui G è minima.

Anche per l'energia libera di Gibbs G può essere ricavata una interessante equazione di Maxwell.

Riferendoci a trasformazioni elementari quasi statiche, differenziando la [V.43] e tenendo conto delle relazioni $dU = \delta Q - P\,dV$ e $\delta Q = T\,dS$, otteniamo:

$$\begin{aligned} dG &= dU + P\,dV + V\,dP - T\,dS - S\,dT = \\ &= \delta Q + V\,dP - T\,dS - S\,dT = \\ &= T\,dS + V\,dP - T\,dS - S\,dT \end{aligned}$$

cioè

$$dG = V\,dP - S\,dT \qquad [V.46]$$

$dG = V\,dP - S\,dT$

e quindi

$$\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T = V; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P = -S \qquad [V.47]$$

e applicando la relazione di Schwartz:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \qquad [V.48]$$

Equazione di Maxwell. $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T$

che collega la variazione di entropia rispetto alla pressione, a temperatura costante, con il coefficiente di dilatazione termico a pressione costante.

Anche per l'energia libera di Gibbs (che è detta anche *entalpia libera*) valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per la funzione F a conclusione del § V.3.: essa diviene utile cioè quando lo stato del sistema dipenda, oltre che dai parametri P e T, anche da un ulteriore parametro f.

Quando ciò accade, la condizione di equilibrio a pressione P e temperatura T costanti (analoga alla [V.42] che valeva a T e V costanti), diviene:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial f}\right)_{P,T} = 0 \qquad [V.49]$$

relazione la cui utilità verrà discussa nel prossimo paragrafo.

Esempio

Entalpia libera di un gas perfetto.

E.V.4. *Esprimere l'entalpia libera molare $\bar{G}$ di un gas perfetto in funzione delle sue variabili «naturali» P e T.*

La barra sui simboli indica le quantità molari.

Partiamo dalla definizione di G:
$\bar{G} = \bar{H} - T\bar{S}$. Per un gas perfetto, $\bar{H}$ e $\bar{S}$ sono dati rispettivamente da:

$$\bar{H} = \bar{U} + PV = C_V T + RT + \text{cost} = (C_V + R)\,T + \text{cost} = C_P T + \bar{H}_0$$

$$\bar{S} = R \log V + C_V \log T + \text{cost} = R \log \frac{RT}{P} + C_V \log T + \text{cost} =$$
$$= R \log R + R \log T - R \log P + C_V \log T + \text{cost} =$$
$$= (R + C_V) \log T - R \log P + \bar{S}_0 = C_P \log T - R \log P + \bar{S}_0$$

Da queste espressioni per $\bar{H}$ e $\bar{S}$ si ricava immediatamente:

$$\bar{G} = C_P T + \bar{H}_0 - C_P T \log T + RT \log P - T\bar{S}_0$$

Questa relazione viene scritta solitamente come:

$$\bar{G} = RT(\Phi + \log P)$$

con

$$\Phi = \frac{1}{RT}\,[\bar{H}_0 - T\bar{S}_0 + C_P T - C_P T \log T]$$

V.5. Transizioni di fase

Transizioni di fase.

Consideriamo un sistema costituito da due fasi, cioè da due parti caratterizzate da un diverso stato di aggregazione, ad esempio liquido e gassoso (vapore). Supponiamo che il sistema sia chiuso, cioè la sua massa totale non cambi pur essendovi trasferimenti di massa da una fase all'altra. Il sistema non è invece isolato, essendo mantenuto a contatto termico con una sorgente (ambiente) a temperatura costante T con cui scambia, all'occorrenza, calore. Consideriamo il caso che il sistema sia mantenuto a pressione costante, cosicché le sue configurazioni di equilibrio sono determinate dalla condizione che sia minima la funzione G (qualora il sistema fosse a volume costante, varrebbero considerazioni analoghe impiegando la funzione F).

Se chiamiamo con n il numero totale di moli che costituiscono il sistema, con n_l ed n_v il numero di moli rispettivamente in fase liquida e gassosa (vapore), si ha:

$$n_l + n_v = n = \text{costante}\,.$$

Chiamiamo anche $f = \dfrac{n_v}{n}$ la frazione ponderale di sistema che si trova in fase di vapore, si ha:

$$\left.\begin{aligned} n_v &= fn \\ n_l &= n - n_v = n\,(1-f) \end{aligned}\right\} \qquad \text{[V.50]}$$

Se con $\bar{G}_l$ e $\bar{G}_v$ indichiamo le *entalpie libere molari* rispettivamente della fase liquida e gassosa, essendo G una funzione additiva possiamo scrivere l'entalpia libera complessiva del sistema come:

$$G = n_l \bar{G}_l + n_v \bar{G}_v$$

ovvero, tenuto conto delle [V.50]:

$$G = n f \bar{G}_v + n(1 - f)\bar{G}_l \qquad [V.51]$$

$\bar{G}_v$ e $\bar{G}_l$ dipendono da T e da P, variabili intensive che all'equilibrio hanno lo stesso valore sia per la fase liquida che per quella gassosa; ma non dipendono da f.

Derivando rispetto a f (a P e T costanti) come vuole la [V.49], otteniamo la condizione di equilibrio:

$$\bar{G}_v = \bar{G}_l \qquad [V.52]$$

Diagramma delle fasi.

Esprimendo esplicitamente $\bar{G}_v$ e $\bar{G}_l$ in funzione di P e di T, la [V.52] rappresenta una equazione in queste due variabili, che consente di ricavare la pressione di equilibrio P_E come funzione di T: per ogni valore di T, si trova cioè il valore della pressione per cui liquido e vapore convivono all'equilibrio. Se si cambia la temperatura ($T \to T + dT$), anche la pressione di equilibrio P_E cambia ($P_E \to P_E + dP_E$). La funzione $P_E = P_E(T)$, che rappresenta i valori della coppia (P, T) per cui si ha equilibrio, è rappresentata dal cosiddetto *diagramma di equilibrio.*

Il *diagramma di equilibrio* (o *diagramma delle fasi*) per l'acqua è rappresentato nella seguente figura.

In questo diagramma le isoterme sono verticali (vedi ad es. la rappresentazione dei punti A, B, C, D della isoterma T della precedente figura).

Equazione di Clausius Clapeyron.

La linea di equilibrio solido-liquido e solido-vapore si ottengono, evidentemente, risolvendo le equazioni (analoghe alla [V.52]):

$$\bar{G}_s = \bar{G}_l \text{ e } \bar{G}_s = \bar{G}_v$$

Il punto triplo si trova alla intersezione $\bar{G}_s = \bar{G}_l = \bar{G}_v$.

Una interessante relazione fra la variazione dT di temperatura e la corrispondente variazione dP_E subita dalla pressione P_E di equilibrio, ci è fornita dalla cosiddetta *equazione di Clausius-Clapeyron*

La [V.52]:

$$\bar{G}_v(T, P) = \bar{G}_l(T, P)$$

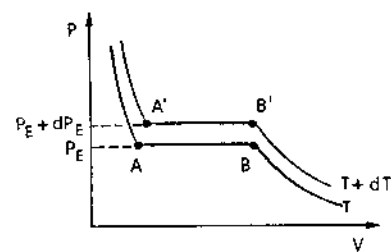
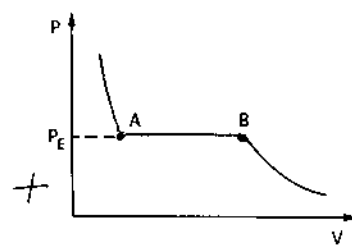
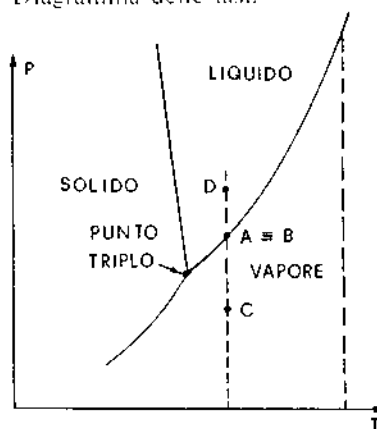
differenziata, ci dice:

$$d\bar{G}_v = d\bar{G}_l$$

e usando la [V.46]:

$$\bar{V}_v\, dP - \bar{S}_v\, dT = \bar{V}_l\, dP - \bar{S}_l\, dT \qquad [V.53]$$

Anche qui, la sbarretta sovrapposta a S e V indica che si tratta di grandezze molari. Dalla [V.53] si ricava facilmente:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\bar{S}_v - \bar{S}_l}{\bar{V}_v - \bar{V}_l} \qquad [V.54]$$

D'altra parte il passaggio della massa unitaria dallo stato liquido allo stato di vapore, avvenendo reversibilmente a T = costante con l'erogazione di calore pari a λ_{ev} (calore latente molare di evaporazione) implica una variazione ΔS di entropia pari a:

$$\Delta S = \bar{S}_v - \bar{S}_l = \int_l^v \frac{\delta Q}{T} = \frac{\lambda_{ev}}{T}$$

che inserita nella [V.54] fornisce l'*equazione di Clausius-Clapeyron*:

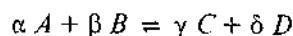
$$\frac{dP_E}{dT} = \frac{\lambda_{ev}}{T(\bar{V}_v - \bar{V}_l)}$$

$$\boxed{\frac{dP_E}{dT} = \frac{\lambda_{ev}}{T(\bar{V}_v - \bar{V}_l)}} \qquad [V.55]$$

L'equazione di Clausius-Clapeyron vale analogamente anche per altri cambiamenti di fase (fusione $s \rightarrow l$, solido ÷ liquido; sublimazione $s \rightarrow v$, solido ÷ vapore).

V.6. Reazioni chimiche

Reazioni chimiche.

Consideriamo un sistema termodinamico inizialmente formato da un certo numero n_{oA} di moli della specie chimica (gassosa) A, e un certo numero n_{oB} di moli della specie chimica (gassosa) B: sostanze che, reagendo, possono produrre le specie chimiche (gassose) C e D secondo la reazione:

$$\alpha A + \beta B = \gamma C + \delta D$$

Il significato dei simboli è quello definito nel § V.2.

Via via che la reazione procede, il sistema che si forma è un sistema termodinamico che può essere descritto dai parametri P_i V_i T_i n_i relativi alle quattro specie chimiche presenti ($i = A, B, C, D$; n_i = numero di moli). Questi 16 parametri non sono fra di loro indipendenti. All'equilibrio termodinamico, infatti, la temperatura T_i è la stessa (sia essa T) per i quattro componenti, che inoltre occupano tutti lo stesso volume V. Cosicché per ciascuno dei componenti potremo scrivere (supponiamo per semplicità che essi possano essere trattati come gas perfetti):

$$P_A = n_A \frac{RT}{V}$$

$$P_B = n_B \frac{RT}{V}$$

$$P_C = n_C \frac{RT}{V} \qquad [V.56]$$

$$P_D = n_D \frac{RT}{V}$$

Sommando membro a membro si ha:

$$P_A + P_B + P_C + P_D = n \frac{RT}{V} \; (n = n_A + n_B + n_C + n_D) \qquad [V.57]$$

D'altra parte, la *legge di Dalton* per le miscele di gas afferma che *la pressione P esercitata dalla miscela è pari alla somma delle pressioni parziali*:

Legge di Dalton per le pressioni parziali.

$$P = P_A + P_B + P_C + P_D \qquad [V.58]$$

relazione che, insieme alle [V.56] e [V.57], ci dice:

$$P_A = \frac{n_A}{n} P; \; P_B = \frac{n_B}{n} P; \; P_C = \frac{n_C}{n} P; \; P_D = \frac{n_D}{n} P \qquad [V.59]$$

Inoltre, le n_i possono essere espresse in termini del grado di avanzamento x della reazione:

$$n_A = n_{oA} - x\,\alpha; \; n_B = n_{oB} - x\,\beta; \; n_C = x\,\gamma; \; n_D = x\,\delta \qquad [V.60]$$

Se con $\bar{G}_A$, $\bar{G}_B$, $\bar{G}_C$, $\bar{G}_D$ indichiamo l'entalpia molare delle specie A, B, C, D rispettivamente, l'entalpia libera G totale del sistema, all'istante generico, può essere scritta (in virtù della sua additività) come:

$$\begin{aligned} G &= n_A \bar{G}_A + n_B \bar{G}_B + n_C \bar{G}_C + n_D \bar{G}_D = \\ &= (n_{oA} - x\,\alpha)\,\bar{G}_A + (n_{oB} - x\,\beta)\,\bar{G}_B + x\,\gamma\,\bar{G}_C + x\,\delta\,\bar{G}_D \end{aligned} \qquad [V.61]$$

Se ora il sistema è mantenuto a temperatura T costante e a pressione P costante, imponendo la condizione di equilibrio $dG = 0$ dalla [V.61] si ottiene $\left(\text{a } P \text{ e } T \text{ costanti, } dG = 0 \text{ si riduce a } \frac{\partial G}{\partial x} = 0\text{, come dice la [V.49]}\right)$:

$$\begin{aligned} 0 = dG &= -\alpha\,\bar{G}_A - \beta\,\bar{G}_B + \gamma\,\bar{G}_C + \delta\,\bar{G}_D + \\ &\quad + n_A \frac{\partial \bar{G}}{\partial n_A} dn_A + n_B \frac{\partial \bar{G}}{\partial n_B} dn_B + n_C \frac{\partial \bar{G}}{\partial n_C} dn_C + n_D \frac{\partial \bar{G}}{\partial n_D} dn_D = \\ &= -\alpha\,\bar{G}_A - \beta\,\bar{G}_B + \gamma\,\bar{G}_C + \delta\,\bar{G}_D + \sum n_i \frac{\partial \bar{G}_i}{\partial n_i} dn_i \end{aligned} \qquad [V.62]$$

Ricordiamo ora che (vedi esempio V.3.):

$$\bar{G}_i = R\,T(\Phi(T) + \log P_i) \qquad [V.63]$$

cosicché:

$$\frac{\partial \bar{G}_i}{\partial n_i} = \frac{R\,T}{P_i} \frac{\partial P_i}{\partial n_i} = \frac{R\,T}{P_i} \frac{R\,T}{V}$$

$\left(\text{si è tenuto conto delle [V.56] per cui } \frac{\partial P_i}{\partial n_i} = \frac{R\,T}{V}\right)$ da cui:

$$n_i \frac{\partial \bar{G}_i}{\partial n_i} dn_i = n_i \frac{R\,T}{P_i} \frac{R\,T}{V} dn_i\,; \qquad [V.64]$$

ed essendo dalle [V.56] $\frac{n_i}{P_i} = \frac{V}{R\,T}$, la precedente relazione [V.64] diviene:

$$n_i \frac{\partial \bar{G}_i}{\partial n_i} dn_i = R\,T\,dn_i$$

sommando:

$$\sum_i n_i \frac{\partial \bar{G}_i}{\partial n_i} \, dn_i = R\,T \sum dn_i = R\,T\,dn = 0 \qquad [V.65]$$

($n = \sum n_i$ è costante, essendo il sistema chiuso).

In virtù della [V.65], la [V.62] si riduce dunque a:

$$-\alpha\,\bar{G}_A - \beta\,\bar{G}_B + \gamma\,\bar{G}_C + \delta\,\bar{G}_D = 0$$

e tenuto con to delle [V.63]

$$(-\alpha - \beta + \gamma + \delta)\,R\,T\,\Phi(T) - \alpha \log P_A - \beta \log P_B + \gamma \log P_C + \delta \log P_D = 0$$

cioè

$$f(T) = \log P_A^\alpha + \log P_B^\beta - \log P_C^\gamma - \log P_D^\delta$$

(avendo posto $f(T) = (-\alpha - \beta + \gamma + \delta)\,R\,T\,\Phi\,(T)$)

ovvero

$$\log \frac{P_A^\alpha \cdot P_B^\beta}{P_C^\gamma \cdot P_D^\delta} = f(T)$$

e dunque infine:

$\frac{P_A^\alpha \cdot P_B^\beta}{P_C^\gamma \cdot P_D^\delta} = F(T)$

$$\frac{P_A^\alpha \cdot P_B^\beta}{P_C^\gamma \cdot P_D^\delta} = F(T) \qquad [V.66]$$

Relazione di equilibrio chimico espressa in termini delle concentrazioni.

La [V.66] può essere espressa, equivalentemente, in termini delle concentrazioni $[A] = \frac{n_A}{n}$; $[B] = \frac{n_B}{n}$; $[C] = \frac{n_C}{n}$; $[D] = \frac{n_D}{n}$

$$\frac{[A]^\alpha \cdot [B]^\beta}{[C]^\gamma \cdot [D]^\delta} = F_C(T) \qquad [V.67]$$

Legge delle masse.

La quantità $K_C = 1/F_C$ è detta *costante termodinamica di equilibrio* (costante caratteristica di ogni reazione a temperatura fissata) espressa in termini di concentrazioni. È questa la cosiddetta *legge delle masse* che, pur essendo stata qui ricavata per reazioni allo stato gassoso, ha validità generale.

Differenziali totali delle principali grandezze termodinamiche espressi in termini delle variabili «naturali»

Energia interna	(U)	$dU = \quad T\,dS - P\,dV$
Entalpia	(H)	$dH = \quad T\,dS + V\,dP$
Energia di Helmholtz	(F)	$dF = -S\,dT - P\,dV$
Energia di Gibbs	(G)	$dG = -S\,dT + V\,dP$

Tavola delle più importanti equazioni di Maxwell

a) Energia Interna	b) Energia Libera di Helmholtz
$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,n} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,n}$	$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,n} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,n}$
$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{V,n}$	$-\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{V,n}$
$-\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{S,n}$	$-\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{T,n}$
c) Entalpia	**d) Energia Libera di Gibbs**
$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P,n} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,n}$	$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{T,P} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{T,n}$
$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{S,P} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{S,n}$	$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,n} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,n}$
$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{S,P} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{P,n}$	$\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{T,P} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P,n}$

μ è il «potenziale chimico», definito come $\frac{\partial U}{\partial n}$ dove U è l'energia interna e n è il numero di moli.

Alcune equazioni termodinamiche fondamentali

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \cdot T$$

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \cdot T$$

$$T\,dS = C_V\,dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV$$

$$T\,dS = C_P\,dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP$$

$$T\,dS = C_V\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + C_P\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV$$

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P$$

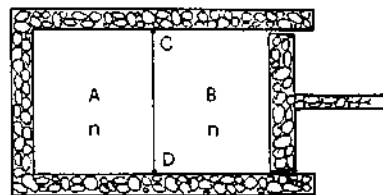
$$C_P - C_V = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_P}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V\right]$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = -\frac{1}{C_V}\left[T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P\right]$$

Esercizi del capitolo V

V.1. Una mole di acqua evapora a temperatura costante $t = 90°C$. Sapendo che il calore latente di evaporazione è $\lambda_{ev} = 540$ cal/g ed approssimando il comportamento del vapore a quello di un gas perfetto, calcolare la variazione di entalpia e la variazione di energia interna.

V.2. Un recipiente cilindrico, a pareti rigide ed adiabatiche, è diviso in due parti A e B da un setto rigido conduttore CD. La parte A contiene n moli di gas perfetto monoatomico; la parte B contiene anch'essa n moli dello stesso gas ed è chiusa da un pistone P adiabatico scorrevole senza attrito. La temperatura iniziale del gas nei due recipienti A e B è $T_i = 280$ K. Agendo dall'esterno, il gas contenuto nella parte B viene compresso molto lentamente fino a che la temperatura del gas si porta al valore $T_f = 300$ K. Nell'ipotesi che la capacità termica di tutto il recipiente sia trascurabile, calcolare la variazione di entalpia per $n = 0,5$.

V.3. Un gas perfetto monoatomico esegue una trasformazione isocora che fa variare la pressione di $\Delta P = 4$ atm. Se il volume del gas è $V = 10$ l, calcolare la corrispondente variazione di entalpia.

V.4. La funzione di Helmoltz di un fluido termodinamico ha la forma seguente

$$F = F(V, T) = a + b\, T \ln (c/V T^2)$$

dove a, b e c sono costanti. Ricavare il legame analitico tra i parametri di stato (equazione di stato del fluido considerato).

V.5. Una massa di gas reale pari ad n moli compie una trasformazione isoterma cambiando il volume del valore V_i al valore V_f. Ricavare l'espressione della corrispondente variazione di entropia, supponendo valida l'equazione di stato di Van der Waals.

V.6. Riscaldando un liquido a pressione costante, esso si dilata secondo la nota legge

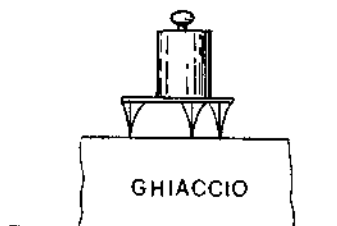
$$V(T) = V_0 (1 + \beta\, \Delta T)$$

ovvero

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \beta\, V$$

dove β è il coefficiente di dilatazione termica del liquido considerato, ed è praticamente costante entro un ampio intervallo di temperatura.
Mantenendo il liquido a contatto con una sorgente termica, la pressione esterna esercitata sul liquido viene aumentata di una quantità ΔP.
Ricavare l'espressione della corrispondente variazione di entropia.

V.7. Un gas perfetto monoatomico si espande in modo adiabatico e reversibile da uno stato iniziale a pressione $P_i = 3$ atm e volume $V_i = 2$ l ad uno stato finale a volume $V_f = 4$ l. Calcolare la variazione di entalpia.

V.8. Un gas perfetto compie una trasformazione isoterma nella quale la funzione di Helmoltz (energia libera a temperatura costante) varia di 200 cal. Quale è la corrispondente variazione della funzione di Gibbs?

V.9. Un gas perfetto compie una trasformazione isoterma reversibile assorbendo dall'esterno una quantità di calore $Q = 100$ cal. Di quanto varia la funzione di Gibbs?

V.10. Su un blocco di ghiaccio (a temperatura $t = -1°C$) è appoggiato un peso di massa $M = 5$ Kg sostenuto da un treppiede le cui gambe di acciaio a spillo hanno un diametro di 1 mm. Per conseguenza della pressione così esercitata, la temperatura di fusione del ghiaccio si abbassa. Sotto le gambe del treppiede, il ghiaccio fonde e le gambe penetrano; mentre l'acqua di fusione, a contatto col blocco di ghiaccio a $-1°C$, solidifica nuovamente. (Fenomeno del «rigelo»: è questo stesso fenomeno che consente ai ghiacciai di muoversi lentamente verso valle superando eventuali asperità del terreno). Calcolare di quanto si abbassa la temperatura di fusione del ghiaccio sotto le gambe del treppiede.

Suggerimenti per la soluzione degli esercizi del capitolo V

V.1. Il processo è isobaro (tensione di vapor saturo). Il volume del vapore è molto maggiore del volume del liquido.

V.2. La trasformazione è reversibile e tutto il gas $(A + B)$ è sempre in equilibrio termico. L'entalpia è funzione di stato.

V.3. Tenere conto del fatto che, nel caso di gas perfetto, ΔH dipende soltanto dalla variazione di temperatura.

V.4. Considerare le derivate parziali di F e le loro relazioni con i parametri di stato.

V.5. $S = S(V, T)$ per cui, a $T =$ cost., $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_t dV$.

Ricordare l'equazione di Maxwell [V.41]; o meglio, cercare di ricavarla a partire dalle derivate parziali della funzione di Helmoltz F.

V.6. Esprimere dS come differenziale rispetto alla pressione a temperatura T costante. Fare uso dell'equazione di Maxwell che lega le derivate parziali a $P =$ cost. e $T =$ cost.. Quale funzione termodinamica caratteristica dipende da P e T?

V.7. Per il calcolo di ΔH tenere conto che si tratta di gas perfetto. Per esprimere la variazione di temperatura tra stato iniziale e finale utilizzare la condizione di adiabaticità e reversibilità della trasformazione.

V.8. Calcolare i differenziali di F e di G, tenendo conto che si tratta di un gas perfetto $[U = U(T);\ P V = n R T]$.

V.9. Esprimere il differenziale di G tenendo conto che il gas è perfetto e la trasformazione reversibile.

V.10. Si usi l'equazione di Clapeyron [V.55].

Numero atomico, peso atomico, punto di fusione
e punto di ebollizione degli elementi chimici

Nome	Simbolo chimico	Numero atomico	Peso atomico	Punto di fusione, °C	Punto di ebollizione, °C
Afnio	Hf	72	178,49	2227,00	4602,00
Alluminio	Al	13	26,98	660,37	2467,00
Americio	Am	95	243,00	994,00	2607,00
Antimonio	Sb	51	121,75	630,74	1750,00
Argento	Ag	47	107,86	961,93	2212,00
Argon	Ar	18	39,95	−189,20	−185,770
Arsenico	As	33	74,92	817,00	13,00
Astato	At	85	210,00	302,00	337,00
Attinio	Ac	89	227,03	1050,00	3200,00
Azoto	N	7	14,00	−209,86	−195,80
Bario	Ba	56	137,33	725,00	1640,00
Berchelio	Bk	97	247,00	–	–
Berillio	Be	4	9,01	1278,00	2970,00
Bismuto	Bi	83	208,98	271,30	1560,00
Boro	B	5	10,81	2300,00	2550,00
Bromo	Br	35	79,90	−7,20	58,78
Cadmio	Cd	48	112,41	320,90	765,00
Calcio	Ca	20	40,08	839,00	1484,00
Californio	Cf	98	251,00	–	–
Carbonio	C	6	12,01	3652,00	–
Cerio	Ce	58	140,12	798,00	3257,00
Cesio	Cs	55	132,91	28,40	669,30
Cloro	Cl	17	35,45	−100,98	−34,60
Cromo	Cr	24	51,99	1857,00	2672,00
Cobalto	Co	27	58,93	1495,00	2870,00
Curio	Cm	96	247,00	1340,00	–
Disprosio	Dy	66	162,50	1409,00	2335,00
Einstenio	Es	99	254,00	–	–
Elio	He	2	4,00	−272,20	−268,93
Erbio	Er	68	167,26	1522,00	2510,00
Europio	Eu	63	151,96	822,00	1597,00
Fermio	Fm	100	257,00	–	–
Ferro	Fe	26	55,85	1535,00	2750,00
Fluoro	F	9	19,00	−219,62	−188,14
Fosforo	P	15	30,97	44,10	280,00
Francio	Fr	87	223,00	27,00	677,00
Gandolino	Gd	64	157,25	1311,00	3233,00
Gallio	Ga	31	69,72	29,78	2403,00
Germanio	Ge	32	72,59	937,40	2830,00
Idrogeno	H	1	1,01	−259,14	−252,87
Indio	In	49	114,82	156,61	2080,00
Iodio	I	53	126,90	113,50	184,35
Iridio	Ir	77	192,22	2410,00	4130,00
Itterbio	Yb	70	173,04	824,00	1193,00
Ittrio	Y	39	88,91	1523,08	3337,00
Lantanio	La	57	138,91	920,00	3454,00
Laurenzio	Lr	103	260,00	–	–
Litio	Li	3	6,94	180,54	1342,00
Lutezio	Lu	71	174,97	1656,00	3315,00
Magnesio	Mn	12	24,30	648,80	1090,00
Manganese	Mn	25	54,94	1244,00	1962,00

Segue Numero atomico, peso atomico, punto di fusione e punto di ebollizione degli elementi chimici

Nome	Simbolo chimico	Numero atomico	Peso atomico	Punto di fusione, °C	Punto di ebollizione, °C
Mendelevio	Md	101	257,00	–	–
Mercurio	Hg	80	200,59	–38,87	356,58
Molibdeno	Mo	42	95,94	2617,00	4612,00
Neodimio	Nd	60	144,24	1010,00	3127,00
Neon	Ne	10	20,18	–248,67	–246,05
Nettunio	Np	93	237,05	640,00	3902,00
Nichel	Ni	28	58,70	1453,00	2732,00
Niobio	Nb	41	92,91	2468,00	4742,00
Nobelio	No	102	259,00	–	–
Olmio	Ho	67	164,93	1470,00	2720,00
Oro	Au	79	196,97	1064,43	3080,00
Osmio	Os	76	190,20	3045,00	5027,00
Ossigeno	O	8	16,00	–218,40	–182,96
Palladio	Pd	46	106,40	1554,00	3140,00
Piombo	Pb	82	207,20	327,50	1740,00
Platino	Pt	78	195,09	1772,00	3827,00
Plutonio	Pu	94	244,00	641,00	3232,00
Polonio	Po	84	209,00	254,00	962,00
Potassio	K	19	39,10	63,25	759,90
Praseodimio	Pr	59	140,91	931,00	3212,00
Promezio	Pm	61	145,00	1080,00	2460,00
Protoattinio	Pa	91	231,03	1600,00	–
Radio	Ra	88	226,02	700,00	1140,00
Radon	Rn	86	222,00	–71,00	–61,80
Rame	Cu	29	63,55	1083,40	2567,00
Renio	Re	75	186,20	3180,00	5627,00
Rodio	Rh	45	102,91	1966,00	3727,00
Rubidio	Rb	37	85,47	38,89	686,00
Rutezio	Ru	44	101,07	2310,00	3900,00
Samario	Sm	62	150,40	1072,00	1778,00
Scandio	Sc	21	44,96	1539,00	2832,00
Selenio	Se	34	78,96	217,00	684,90
Silicio	Si	14	28,09	1410,00	2355,00
Sodium	Na	11	22,99	97,81	882,90
Stagno	Sn	50	118,69	231,97	2270,00
Stronzio	Sr	38	87,62	769,00	1384,00
Tallio	Tl	81	204,37	303,50	1457,00
Tantalio	Ta	73	180,95	2996,00	5425,00
Tecnezio	Tc	43	97,00	2172,00	4877,00
Tellurio	Te	52	127,60	449,50	989,90
Terbio	Tb	65	158,92	1360,00	3041,00
Titano	Ti	22	47,90	1660,00	3287,00
Torio	Th	90	232,04	1750,00	4790,00
Tulio	Tm	69	168,93	1545,00	1727,00
Tungsteno	W	74	183,85	3410,00	5660,00
Uranio	U	92	238,03	1132,30	3818,00
Vanadio	V	23	50,94	1890,00	3380,00
Xeno	Xe	54	131,30	–111,90	–107,10
Zinco	Zn	30	65,38	419,58	907,00
Zirconio	Zr	40	91,22	1852,00	4377,00
Zolfo	S	16	32,06	112,80	444,67

Tavola periodica degli elementi

Periodo	Gruppo I (a / b)	Gruppo II (a / b)	Gruppo III (a / b)	Gruppo IV (a / b)	Gruppo V (a / b)	Gruppo VI (a / b)	Gruppo VII (a / b)	Gruppo VIII (a / b)
I							1 H 1,0080	2 He 4,003
II	3 Li 6,940	4 Be 9,02	5 B 10,82	6 C 12,010	7 N 14,008	8 O 16,0000	9 F 19,00	10 Ne 20,183
III	11 Na 22,997	12 Mg 24,32	13 Al 26,97	14 Si 28,06	15 P 30,98	16 S 32,066	17 Cl 35,457	18 A 39,944
IV	19 K 39,096 29 Cu 63,54	20 Ca 40,08 30 Zn 65,38	21 Sc 45,10 31 Ga 69,72	22 Ti 47,90 32 Ge 72,60	23 V 50,95 33 As 74,91	24 Cr 52,01 34 Se 78,96	25 Mn 54,93 35 Br 79,916	26 Fe 55,85 27 Co ↔ 28 Ni 58,94 58,69 36 Kr 83,7
V	37 Rb 85,48 47 Ag 107,880	38 Sr 87,63 48 Cd 112,41	39 Y 88,92 49 In 114,76	40 Zr 91,22 50 Sn 118,70	41 Nb 92,91 51 Sb 121,76	42 Mo 95,95 52 Te 127,61	43 Tc 99 ↔ 53 I 126,92	44 Ru 101,7 45 Rh 102,91 46 Pd 106,7 54 Xe 131,3
VI	55 Cs 132,91 79 Au 197,2	56 Ba 137,36 80 Hg 200,61	55-71 TERRE RARE 81 Tl 204,39	72 Hf 178,6 82 Pb 207,21	73 Ta 180,88 83 Bi 209,00	74 W 183,92 84 Po 210	75 Re 186,31 85 At 211	76 Os 190,2 77 Ir 193,1 78 Pt 195,23 86 Rn 222
VII	87 Fr 223	88 Ra 226,05	89 Ac 227	90 Th ↔ 232,12	91 Pa 231	92 U 238,07 93 Np 237	94 Pu 244 95 Am 243	96 Cm 247 97 Bk 247 98 Cf 251 99 Es 254 100 Fm 257 101 Md 257

TERRE RARE

VI	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
57-71	138,92	140,13	140,92	144,27	147	150,43	152,0	156,9	159,2	162,46	164,90	167,2	169,4	173,04	174,99

Il numero che precede il simbolo dell'elemento indica il numero atomico; il numero sotto il simbolo indica il peso atomico. La doppia freccia indica i posti in cui l'ordinamento secondo il numero atomico e quello secondo il peso atomico non sono in accordo. La divisione all'interno dei singoli settori e la posizione degli elementi all'interno di questi settori tiene conto della configurazione elettronica dei singoli elementi.

Capitolo sesto

Interpretazione microscopica delle grandezze termodinamiche

La termodinamica si prefigge di descrivere i sistemi termodinamici tramite i parametri di stato. Tale descrizione macroscopica è adeguata alla impostazione e risoluzione di ogni sorta di problema progettuale.

Tuttavia abbiamo accennato anche che i parametri e le funzioni di stato sono in relazione con *valori mediati di grandezze microscopiche*. Lo stabilire queste relazioni, benché non sia necessario dal punto di vista operativo, aiuta però a meglio comprendere il significato delle grandezze macroscopiche. Riteniamo perciò utile ed istruttivo dedicare a questo problema il presente capitolo.

Ci riferiremo a sistemi gassosi: sistemi formati da un numero molto grande di molecole praticamente non interagenti fra di loro, e in continuo movimento a considerevole velocità (ad esempio dell'ordine di 50 m/s).

Le molecole sono in movimento casuale e interagiscono per urti in uno spazio praticamente vuoto: in condizioni normali infatti le distanze fra le molecole possono essere, tipicamente, dell'ordine di cento volte il raggio di ciascuna molecola.

I moti casuali delle molecole possono implicare trasporto di massa, e si hanno allora fenomeni di diffusione; possono produrre trasferimenti di quantità di moto, e così si spiegano fenomeni di viscosità; oppure generare trasferimenti di energia, e si ha così trasmissione di calore. I moti casuali delle molecole spiegano anche il movimento irregolare di particelle macroscopiche in sospensione in un fluido (moto browniano).

Nel seguito ci riferiremo ad un modello di gas (gas perfetto) elaborato nella prima metà dell'800, basato sulle seguenti ipotesi:

Teoria cinetica dei gas.

- le molecole del gas sono sferette rigide che compiono urti completamenti elastici fra loro;
- non si hanno interazioni a distanza tra le molecole, e le traiettorie fra due urti successivi sono rettilinee;
- le pareti sono tali da garantire urti elastici privi di attrito in modo che, all'atto dell'urto, non si manifestano forze tangenziali;

la distribuzione spaziale delle molecole è mediamente uniforme (sono trascurabili le forze esterne), e le direzioni di moto delle molecole sono distribuite in modo isotropo (assenza di posizioni e di direzioni privilegiate nello spazio in cui il gas è contenuto).

VI.1. Interpretazione microscopica della pressione

Interpretazione microscopica della pressione.

Consideriamo un gas perfetto contenuto entro un recipiente cubico di lato a, di cui rappresentiamo in figura la proiezione sul piano xy.

Poniamo l'attenzione su una molecola del gas, la cui velocità sia $\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$. Tale molecola incontra nel suo moto le pareti liscie del recipiente, compiendo contro di esse degli urti che possiamo ritenere elastici. In ogni urto il modulo della velocità resta costante, mentre cambia segno la componente ortogonale alla parete. Consideriamo, ad esempio, un urto contro la parete (1), ortogonale all'asse x. Se $\vec{v}_i$ e $\vec{v}_f$ sono le velocità della molecola rispettivamente prima e dopo l'urto si ha:

$$\vec{v}_i \equiv (v_x, v_y, v_z) \quad \vec{v}_f \equiv (-v_x, v_y, v_z) \qquad [VI.1]$$

con v_x certamente positivo (prima dell'urto la molecola si sta avvicinando alla parete). Detta $\Delta\vec{q} \equiv (\Delta q_x, \Delta q_y, \Delta q_z)$ la variazione di quantità di moto subita dalla particella nell'urto, dalla [VI.1] si ha:

$$\begin{aligned} \Delta q_x &= -2mv_x \\ \Delta q_y &= 0 \\ \Delta q_z &= 0 \end{aligned} \qquad [VI.2]$$

Cioè $\Delta\vec{q}$ è diretto secondo il verso negativo dell'asse delle x.

Il tempo τ che intercorre fra due urti successivi sulla parete è pari al tempo che la proiezione della molecola sull'asse delle x impiega per andare avanti e indietro per un tratto complessivo $2a$ percorso a velocità v_x; cioè $\tau = \dfrac{2a}{v_x}$. Cosicché se consideriamo l'intervallo di tempo compreso fra due istanti generici t_A e t_B, il numero k di urti che in tale intervallo la molecola compie contro la parete (1) è:

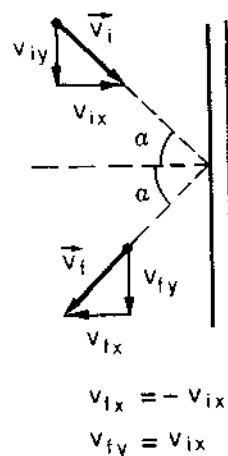
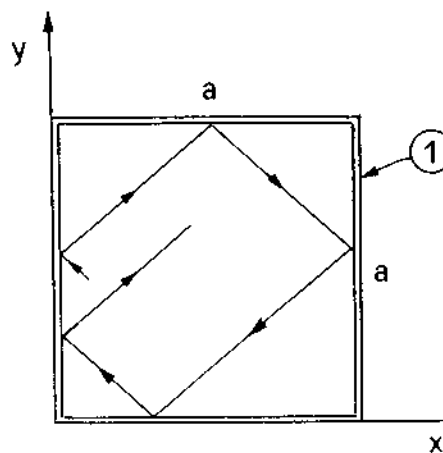
$$k = \frac{t_B - t_A}{\tau} = (t_B - t_A)\frac{v_x}{2a} \qquad [VI.3]$$

Chiamiamo ora $\vec{f}_m$ la forza impulsiva che la molecola subisce, nell'urto, da parte della parete; ed $\vec{f}_P = -\vec{f}_m$ la forza che la molecola esercita sulla parete.

Integrando rispetto al tempo fra t_A e t_B l'equazione $\vec{f}_m = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$, si ha:

$$\int_{t_A}^{t_B} \vec{f}_m\, dt = -\int_{t_A}^{t_B} \vec{f}_P\, dt = k\,\Delta\vec{q}$$

Infatti nell'intervallo $t_A - t_B$ la molecola compie k urti, ciascuno con variazione di quantità di moto pari a $\Delta\vec{q}$. Ovvero:

$$\int_{t_A}^{t_B} \vec{f}_P\, dt = -k\,\Delta\vec{q} \qquad [VI.4]$$

La forza $\vec{f}_P$, essendo opposta a $\Delta\vec{q}$, è ortogonale alla parete nel verso positivo dell'asse x, cioè è diretta verso l'esterno. Usando la [VI.3] e la [VI.2] si trova inoltre per il modulo del suo impulso il valore:

$$\int_{t_A}^{t_B} f_P\,dt = (t_B - t_A)\frac{v_x}{2a}\cdot 2m v_x = (t_B - t_A)\frac{m v_x^2}{a} \qquad [VI.5]$$

La velocità $\vec{v}$ (e quindi la componente v_x) è diversa da molecola a molecola, essendo distribuita a caso secondo una legge che vedremo nel paragrafo VI.3. Per conseguenza, anche la forza f_P è diversa (in modulo) da molecola a molecola, pur essendo per tutte orientata ortogonalmente alla parete.

Sommiamo ora su tutte le molecole del gas:

$$\int_{t_A}^{t_B} F_P\,dt = \frac{t_B - t_A}{a}\sum m v_x^2 \qquad [VI.6]$$

dove con $F_P = |\sum \vec{f}_P| = \sum f_P$ abbiamo indicato il modulo del risultante delle forze fra di loro parallele che tutte le molecole, nel loro insieme, esercitano sulla parete. Considerato il grandissimo numero di molecole che costituiscono il gas, F_P è praticamente costante nel tempo; per cui l'integrale $\int_{t_A}^{t_B} F_P\,dt$ si riduce a:

$$\int_{t_A}^{t_B} F_P\,dt = F_P\int_{t_A}^{t_B} dt = F_P(t_B - t_A) \qquad [VI.7]$$

Sostituendo nella [VI.6] si ha:

$$F_P = \frac{1}{a}\sum m v_x^2$$

Dividendo per l'area a^2 della parete, si ottiene la pressione P esercitata dal gas sulla parete:

$$P = \frac{F_P}{a^2} = \frac{1}{a^3}\sum m v_x^2 = \frac{\sum m v_x^2}{V} \qquad [VI.8]$$

dove V è il volume del recipiente contenente il gas.

Moltiplicando e dividendo il secondo membro della [VI.8] per il numero N di molecole del gas ($N = n\mathcal{N}$, con n numero di moli e $\mathcal{N}$ numero di Avogadro) si ha:

Media del quadrato della componente x della velocità:

$$\overline{v_x^2} = \frac{\sum v_x^2}{N}$$

$$P = \frac{n\mathcal{N}}{V}\,\frac{\sum m v_x^2}{N} = \frac{n\mathcal{N}}{V}\,m\overline{v_x^2} \qquad [VI.9]$$

dove con $\overline{v_x^2}$ si è indicata la media di v_x^2 effettuata su tutte le molecole. Va notato che per l'ipotesi di isotropia spaziale, lo stesso valor medio che ha v_x^2 devono avere anche v_y^2 e v_z^2; per cui:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\,\overline{v_x^2}$$

cioè

Relazione fra la pressione P e il quadrato della velocità quadratica media delle molecole.

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\,\overline{v^2} \qquad [VI.10]$$

Sostituendo la [VI.10] nella [VI.9] si ottiene in definitiva:

$$\boxed{P = \frac{n \mathcal{N} m}{3 V} \overline{v^2} = \rho \frac{\overline{v^2}}{3}} \qquad [VI.11]$$

$P = \frac{\rho \overline{v^2}}{3}$

che rappresenta la relazione che lega la pressione P del gas perfetto alla sua densità ρ ($n \mathcal{N} m$ è la massa complessiva del gas) e alla media dei quadrati delle velocità delle sue molecole $\overline{v^2}$.

È bene osservare che mentre $\overline{v^2}$ è una quantità certamente maggiore di zero, la velocità vettoriale media è nulla (se il baricentro del gas è fermo).

Si definisce velocità quadratica media v_{qm} la quantità

Velocità quadratica media

$$v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}}$$

$v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}}$

che rappresenta la rapidità media con cui si muovono le molecole.

Applicando la [VI.11] a una mole di gas perfetto, si ha

$$\overline{v^2} = \frac{3 P V}{\mathcal{N} m} = 3 \frac{P V}{M} = 3 \frac{R T}{M} \quad \text{(con } M = \text{peso molecolare)}$$

$\overline{v^2}$, e dunque anche $v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}}$, dipende dunque solo dalla temperatura (oltreché dal peso molecolare). Nel caso, ad esempio, di idrogeno a 300 K si trova $v_{qm} \simeq 60$ m/s.

VI.2. Interpretazione microscopica della temperatura

Un semplice ragionamento è sufficiente a farci concludere che deve esistere una relazione diretta fra temperatura di un gas perfetto ed energia cinetica media delle sue molecole.

Interpretazione microscopica della temperatura.

Infatti, poiché le molecole di un gas perfetto sono assimilabili a particelle libere (cioè non sottoposte a forze), l'unica forma di energia che esse possono avere è energia cinetica; dunque l'energia interna del gas deve essere proporzionale all'energia cinetica media delle sue molecole. D'altra parte abbiamo visto nel paragrafo II.4.3 che l'energia interna di un gas perfetto è proporzionale alla sua temperatura. Dunque deve esservi una relazione di proporzionalità fra la temperatura del gas e l'energia cinetica media delle sue molecole. È facile dimostrare questa osservazione a partire dai risultati conseguiti nel precedente paragrafo.

Cominciamo con il caso di un gas monoatomico. In questo caso, ogni molecola può essere considerata come un punto materiale, la cui energia cinetica media è dunque data semplicemente da:

$$\bar{E}_C = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$$

Dalla [VI.11] si ricava immediatamente che:

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} \frac{P V}{n \mathcal{N}} \qquad [VI.12]$$

Energia cinetica media $\bar{E}_C$ di un gas monoatomico

$\bar{E}_C = \frac{3}{2} K T$

D'altra parte l'equazione di stato ci dice che $P V = n R T$, che sostituita nella [VI.12] fornisce:

$$\bar{E}_C = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} \frac{R}{\mathcal{N}_0} T = \frac{3}{2} K T \qquad [VI.13]$$

$$\boxed{\bar{E}_C = \frac{3}{2} K T}$$

Costante di Boltzmann.

$K = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K

La costante $K = \frac{R}{\mathcal{N}_0}$ è detta *costante di Boltzmann*

Se vogliamo l'energia interna complessiva del gas, basta moltiplicare la [VI.13] per il numero $n \mathcal{N}_0$ di molecole del gas; si ottiene:

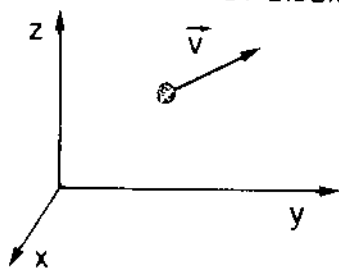
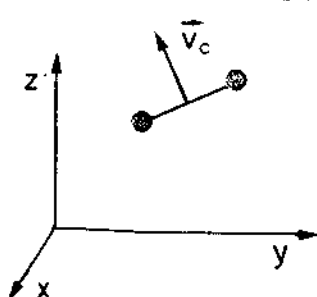
$$U = \frac{3}{2} n \mathcal{N}_0 K T = \frac{3}{2} n R T \qquad [VI.14]$$

Per un gas perfetto monoatomico la teoria cinetica prevede

$C_V = \frac{3}{2} R$

Ricordando che ragionamenti macroscopici ci avevano portato a concludere che per un gas perfetto $U = n C_V T$, per confronto con la [VI.14] ricaviamo intanto, per un gas monoatomico:

$$C_V = \frac{3}{2} R \qquad [VI.15]$$

Principio di equipartizione dell'energia.

coerentemente con una conclusione che nel paragrafo II.4.4. avevamo tratto dalla diretta osservazione sperimentale.

Ma a commento della [VI.14] notiamo anche che la quantità $n \mathcal{N}_0 3$ rappresenta il *numero di gradi di libertà complessivo del gas*: infatti $n \mathcal{N}_0$ è il numero totale di molecole, ciascuna delle quali, essendo puntiforme, ha tre gradi di libertà.

La [VI.14] ci consente così di esprimere la seguente legge, ricavata per un gas perfetto monoatomico: *in un gas perfetto monoatomico*, **ogni grado di libertà porta all'energia interna complessiva un contributo medio pari a $\frac{1}{2} K T$.**

Questa legge, detta *principio di equipartizione dell'energia*, vale in realtà anche per gas non monoatomico, in cui all'energia di ogni molecola contribuiscono anche gradi di libertà diversi da quelli traslazionali (rotazioni), ciascuno fornendo un contributo pari a $\frac{1}{2} K T$; e vale anche più in generale per sistemi la cui energia possa essere scritta come somma di termini quadratici nei vari parametri cinematici (coordinate e velocità), ciascuno di questi termini fornendo all'energia un contributo medio pari a $\frac{1}{2} K T$.

Coerentemente con questa legge, un gas perfetto biatomico ha energia interna pari a $n \frac{5}{2} R T$. Infatti ogni sua molecola ha 5 gradi di libertà (due atomi hanno in totale 6 gradi di libertà, ma in una molecola c'è il vincolo che la loro distanza relativa sia costante).

Analogamente, per un gas la cui molecola sia formata da più di due atomi, la relativa energia interna è data (nelle condizioni in cui il gas si comporti come un gas perfetto) da $U = n\frac{6}{2}RT = n3RT$.

All'aumentare della temperatura, le molecole non possono più essere considerate come sistemi rigidi; e l'energia interna (e dunque anche il calore specifico) diviene più elevata per l'intervento dei cosiddetti *gradi di libertà vibrazionali.*

Gradi di libertà vibrazionali.

Per un solido cristallino (in particolare per un metallo), come abbiamo già accennato ogni atomo è assimilabile a un oscillatore armonico tridimensionale, la cui energia può essere scritta come

$$\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

Molecola biatomica *non* rigida.

Secondo il principio di equipartizione dell'energia ogni atomo fornisce all'energia un contributo pari in media a $6\frac{KT}{2} = 3KT$; e dunque ci si aspetta che il calore specifico molare valga $3R \simeq 6$ cal/mole K, coerentemente con la *legge empirica di Dulong e Petit.*

Principio di equipartizione dell'energia e legge di Dulong e Petit.

Va notato che, sperimentalmente, la legge di Dulong e Petit vale solo approssimativamente, e solo entro un certo intervallo di temperatura. Come risulta dalla fig. II.1, già a temperature superiori a $\simeq 300$ K il calore specifico diviene più grande di $3R$; e ciò è spiegato dal fatto che il modello degli oscillatori armonici non è sufficientemente accurato (anarmonicità del moto e contributo dell'energia degli elettroni).

Quando la temperatura, al contrario, tende allo zero assoluto, il calore molare diminuisce fino a tendere a zero. La spiegazione di questo fenomeno esce dagli schemi della fisica classica e richiede elementi di meccanica quantistica.

Al tendere a zero della temperatura C_V tende a zero.

Secondo questa teoria (della quale non possiamo qui entrare in merito) esiste una funzione universale che descrive l'andamento con la temperatura dei calori molari (a volume costante) dei solidi. Per sostanze allo stato puro tale funzione è riportata in figura. In ascisse è riportata la quantità T/θ, dove T è la temperatura assoluta e θ, detta *temperatura di Debye*, è un parametro, caratteristico di ogni sostanza, misurato in gradi Kelvin (così come T).

La conoscenza del parametro θ di una sostanza permette, data la funzione di Debye riportata in figura, di calcolare il valore del suo calore molare ad ogni temperatura.

Il valore del parametro θ di Debye per alcune sostanze pure è riportato nella seguente tabella.

Temperatura θ di Debye.

Sostanza	Peso atomico	θ (K)
Al	27	428
Fe	55,8	467
Cu	63,4	343
Zn	65,4	310
Ag	108,0	225
Au	197,0	164
Pb	207,0	105

VI.3. Funzione di distribuzione della velocità

Funzione di distribuzione della velocità.

Nei due precedenti paragrafi abbiamo ricavato la relazione esistente fra la velocità quadratica media (o fra l'energia cinetica media) delle molecole e i parametri macroscopici pressione e temperatura di un gas perfetto. Ovviamente, le singole molecole non avranno generalmente energia cinetica pari al valor medio; esse possono avere energie molto diverse fra di loro, distribuite casualmente intorno al valor medio.

Meccanica statistica.

Calcolare tale legge di distribuzione – cosa che faremo nel presente paragrafo per un gas perfetto monoatomico – può essere istruttivo per rendersi conto della relativa semplicità con cui opera la *meccanica statistica*, che si occupa della relazione fra grandezze macroscopiche e grandezze microscopiche nei sistemi termodinamici.

Densità di massa.

Consideriamo prima la descrizione di come le molecole sono distribuite nello spazio, indipendentemente dalla loro velocità. Già abbiamo introdotto, a suo tempo, una funzione della posizione $\vec{r}$ detta densità $\rho \cdot \rho(\vec{r})$ è quella funzione che moltiplicata per l'elemento di volume $dx\,dy\,dz$, ci fornisce la massa dm dell'elemento di volume situato nel punto di vettore posizione pari ad $\vec{r}$: nel caso generale (a meno che il sistema non sia omogeneo, cioè che ρ non sia indipendente dal vettore posizione $\vec{r}$), a parità di volume $dx\,dy\,dz$ la massa dm è diversa da punto a punto.

Conoscendo la densità $\rho(\vec{r})$ e la massa m delle molecole del gas considerato, si può calcolare il numero di molecole per unità di volume semplicemente dividendo $\rho(\vec{r})$ per m:

$$n(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{m} \qquad [VI.16]$$

Densità di particelle.

La $n(\vec{r})$ si chiama anche *densità di particelle*: essa è quella funzione che, moltiplicata per l'elemento di volume $dx\,dy\,dz$, fornisce il numero di particelle dN presenti nell'elemento di volume stesso:

$$dN(\vec{r}) = n(\vec{r})\,dx\,dy\,dz \qquad [VI.17]$$

Dividendo la densità di particelle $n(\vec{r})$ per il numero totale N di particelle che costituiscono il sistema, si ottiene una funzione $P(\vec{r})$:

$$P(\vec{r}) = \frac{n(\vec{r})}{N} \qquad [VI.18]$$

Funzione di distribuzione.

detta *funzione di distribuzione* delle particelle nello spazio. In virtù della sua definizione [VI.18], la $P(\vec{r})$ gode della proprietà che il suo integrale esteso a tutto il volume occupato dal sistema vale 1 (ed anzi, esteso a tutto lo spazio, pur di considerare come ovvio $n(\vec{r}) = 0$ fuori dallo spazio occupato dal sistema).

Infatti:

$$\iiint P(\vec{r})\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{N}\iiint n(\vec{r})\,dz\,dy\,dx = \frac{1}{N}\,N = 1\,.$$

La funzione di distribuzione è normalizzata.

Si dice pertanto che la funzione di distribuzione è una funzione normalizzata a 1, o semplicemente *normalizzata*.

In molti casi può essere conveniente esprimere la quantità $dN(\vec{r})$ in coordinate polari. Per far ciò è sufficiente porre nella [VI.17] al posto dell'elemento di volume $dx\,dy\,dz$ in coordinate cartesiane, l'elemento di volume espresso in coordinate polari, che come risulta dalla figura può essere espresso come $dr \cdot r\sin\theta\, d\varphi \cdot r\,d\theta = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$.

In coordinate polari, la [VI.17] diviene:

$$dN(\vec{r}) = n(\vec{r})\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr \qquad [VI.19]$$

Ovvero, usando la [VI.18]:

$$dN(\vec{r}) = N\, P(\vec{r})\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr \qquad [VI.20]$$

Per descrivere la distribuzione della velocità delle molecole di un gas si usa un formalismo analogo a quello or ora discusso per il caso della distribuzione della posizione delle molecole. Si introduce dunque una *densità di particelle nello spazio delle velocità* $n(\vec{v})$ definita come quella funzione che moltiplicata per $dv_x\, dv_y\, dv_z$ fornisce il numero $dN(\vec{v})$ di particelle che hanno componenti della velocità comprese fra v_x, v_y, v_z, e $v_x + dv_x$, $v_y + dv_y$, $v_z + dv_z$:

Densità delle particelle nello spazio delle velocità.

$$dN(\vec{v}) = n(\vec{v})\, dv_x\, dv_y\, dv_z \qquad [VI.21]$$

ovvero la funzione di distribuzione $P(\vec{v})$ definita come:

$$P(\vec{v}) = \frac{n(\vec{v})}{N} \qquad [VI.22]$$

L'espressione che la $P(\vec{v})$ deve avere nel caso di un gas perfetto monoatomico in equilibrio alla temperatura T, può essere ricavata in base ad alcune semplici considerazioni generali.

In primo luogo notiamo che se il gas non è sottoposto a sollecitazioni esterne la distribuzione delle velocità deve essere isotropa, cioè indipendente dalla direzione. In altri termini la $P(\vec{v})$ deve essere funzione solo del modulo v della velocità; o, se preferiamo, funzione di v^2, ovvero dell'energia $E = \frac{1}{2} m v^2$:

$$P = P(E)$$

La [VI.21] si può dunque scrivere come:

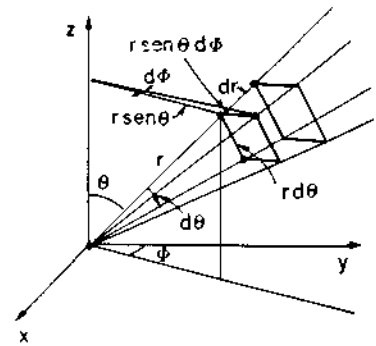
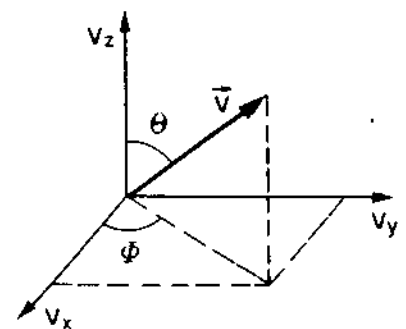
$$dN(v) = N\, P(E)\, dv_x\, dv_y\, dv_z$$

o, in coordinate polari (nello spazio delle velocità):

$$dN(v) = N\, P(E)\, v^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dv$$

Poiché la $P(E)$ non dipende da θ e da φ possiamo integrare in queste due variabili ottenendo:

$$dN(v) = N \cdot 4\pi \cdot P(E)\, v^2\, dv \qquad [VI.23]$$

Immaginiamo ora che due particelle aventi energia E_1 ed E_2 urtino fra di loro, e che dopo l'urto abbiano energia E'_1 ed E'_2. La probabilità p che ciò

accada è evidentemente proporzionale alla densità $P(E_1)$ di particelle di energia E_1 e alla densità $P(E_2)$ di particelle di energia E_2 (*).

$$p = C \cdot P(E_1) \cdot P(E_2) \qquad \text{[VI.24]}$$

Allo stesso modo, accadrà che particelle di energia E'_1 ed E'_2 urtino fra di loro, ed abbiano dopo l'urto energia E_1 ed E_2. La probabilità p' che ciò accada è evidentemente:

$$p' = C' \cdot P(E'_1) \cdot P(E'_2) \qquad \text{[VI.25]}$$

Le costanti C e C' sono fra di loro uguali. Sappiamo infatti dalla meccanica che l'urto fra due particelle è un processo «reversibile»: se dall'urto di due particelle di velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ esse emergono con velocità rispettive $\vec{v}'_1$ e $\vec{v}'_2$, allora dall'urto di due particelle di velocità $\vec{v}'_1$ e $\vec{v}'_2$ esse emergono con velocità rispettive $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

Ma per ipotesi il sistema è in equilibrio; e dunque non può aumentare il numero medio di particelle di energia E'_1 ed E'_2 a scapito di quelle di energia E_1 ed E_2, né viceversa. Dunque deve essere $p = p'$, cioè:

$$P(E_1) \cdot P(E_2) = P(E'_1) \cdot P(E'_2) \qquad \text{[VI.26]}$$

Teniamo ora presente che nell'urto (elastico) fra le due molecole l'energia cinetica si deve conservare:

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \qquad \text{[VI.27]}$$

Ovvero, se $E'_1 = E_1 + x$, deve essere $E'_2 = E_2 - x$. Introducendo questa condizione nella [VI.26] si ottiene:

$$P(E_1) \cdot P(E_2) = P(E_1 + x) \cdot P(E_2 - x) \qquad \text{[VI.28]}$$

L'unica funzione che soddisfi questa condizione è:

$$P(E) = A\, e^{\alpha E}$$

dove la costante α è necessariamente negativa perché la funzione $P(E)$ deve essere decrescente per grandi valori di E. Scrivendo pertanto $\alpha = -\beta$ ($\beta > 0$):

$$P(E) = A\, e^{-\beta E} = A\, e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} \qquad \text{[VI.29]}$$

(*) La probabilità p_e che un evento casuale e si verifichi è per definizione pari al rapporto fra il numero n_e di casi favorevoli all'evento e il numero totale N di casi possibili: $p_e = \frac{n_e}{N}$. Se abbiamo due eventi e_1 ed e_2 fra di loro indipendenti, la probabilità che essi si verifichino simultaneamente è data dal prodotto delle probabilità p_{e_1} e p_{e_2} che si verifichi ciascuno di essi: $p = p_{e_1} \cdot p_{e_2}$. Infatti il numero di casi favorevoli è in totale pari a $n_{e_1} \cdot n_{e_2}$ (una volta verificatosi un caso fra gli n_{e_1} favorevoli a e_1, ad esso si può associare uno qualunque fra gli n_{e_2} casi favorevoli a e_2); e analogamente il numero di casi possibili è in totale pari al prodotto $N_1 N_2$ fra gli N_1 casi possibili per e_1 e gli N_2 casi possibili per e_2. Dunque:

$$p = \frac{n_{e_1} \cdot n_{e_2}}{N_1 \; N_2} = \frac{n_{e_1}}{N_1} \cdot \frac{n_{e_2}}{N_2} = p_{e_1} \cdot p_{e_2}$$

Introducendo la [VI.29] nella [VI.23]:

$$dN(v) = 4\pi N \cdot A \cdot e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} \cdot v^2\, dv \qquad [VI.30]$$

Le costanti A e β possono essere determinate imponendo le seguenti condizioni:

a) Condizione di normalizzazione:

$$\int dN = \int 4\pi N A\, e^{-\beta \frac{mv^2}{2}}\, v^2 \cdot dv = N;$$

b) condizione [VI.14]:

$$\int E\, dN = \int 4\pi N A \left(\frac{1}{2} m v^2\right) e^{-\beta \frac{mv^2}{2}}\, v^2\, dv = \frac{3}{2} N K T.$$

Va notato infatti che $\int E\, dN$ rappresenta l'energia totale (energia interna) del gas. Senza eseguire questi calcoli – che non hanno alcunché di istruttivo – diremo solo che come risultato la [VI.30] diviene:

$$dN(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi K T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2KT}}\, v^2\, dv \qquad [VI.31]$$

Funzione di distribuzione di Maxwell per le velocità.

Questa relazione è detta *distribuzione delle velocità di Maxwell.*

Partendo dalla funzione di distribuzione delle velocità [VI.31] può essere ricavata semplicemente, mediante sostituzione, *la funzione di distribuzione dell'energia (distribuzione di Boltzmann).*

Si ha infatti:

$$E = \frac{1}{2} m v^2, \text{ da cui } v = \sqrt{\frac{2E}{m}};\ v\, dv = \frac{dE}{m}$$

Funzione di distribuzione di Boltzmann per l'energia.

Sostituendo nella [VI.31] si ottiene:

$$dN(E) = N(E)\, dE = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi K T}\right)^{3/2} e^{-\frac{E}{KT}} \sqrt{2E}\, dE =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x} \sqrt{x}\, dx \quad \left(\text{dove } x = \frac{E}{KT}\right) \qquad [VI.32]$$

che rappresenta appunto la funzione di distribuzione di Boltzmann.

VI.4. Probabilità e disordine

Probabilità e disordine.

Il primo principio della termodinamica esprime la conservazione dell'energia; l'interpretazione microscopica dei parametri termodinamici che compaiono nella relativa equazione è perciò riconducibile – come abbiamo più sopra dimostrato – allo studio dell'energia media dei costituenti microscopici del sistema macroscopico considerato.

Il secondo principio, invece, non riguarda direttamente l'energia. Anzi abbiamo visto che esso può essere ricondotto a una regola di evoluzione dei sistemi isolati (per i quali dunque l'energia è costante); regola che afferma che in tali condizioni il sistema deve necessariamente evolvere verso la configurazione di massima entropia compatibile con quel valore dell'energia.

L'interpretazione statistica del secondo principio è riconducibile – come vedremo – alla regola generale secondo cui ogni sistema tende a raggiungere, spontaneamente, quella configurazione cui corrisponde – a parità di energia – il massimo possibile disordine. È questa una regola che appare in molti fenomeni che ci capita di osservare nella vita di tutti i giorni: via via che il tempo passa – cioè via via che un oggetto, o un sistema, «invecchia» – vediamo che la qualità di quel sistema peggiora, che esso si deteriora, che in esso il disordine aumenta.

Vediamo qualche esempio. Se un mazzo di carte nuove inizialmente ordinato viene mischiato, esso raggiunge una configurazione disordinata; non capiterà mai viceversa che mescolando un mazzo disordinato esso si porti spontaneamente nella sequenza ordinata – ad esempio – in ordine crescente. Lasciando sul tavolo di una stanza una risma di fogli di carta, non ci meraviglierà molto se, tornando, la troviamo disordinata, coi fogli sparsi qua e là; ma se lasciando i fogli disordinatamente sparsi li troviamo poi in bell'ordine saremo certi che qualcuno è entrato ed ha usato intelligenza ed energia per mettere ordine.

Altro esempio. Prendiamo due recipienti comunicanti, uno pieno di palline rosse e uno di palline blu. Agitando il tutto, è normale che le palline si mescolino. Ma se inizialmente esse sono mescolate, metà di qua e metà di là, non è possibile che, agitando a caso, quelle rosse vadano da una parte e quelle blu dall'altra.

In tutti questi casi, osserviamo che un sistema, sollecitato a caso, evolve dall'ordine al disordine, ma mai viceversa. Va notato che ordine significa una sequenza convenzionale, nel caso di elementi tutti diversi fra loro come le carte di un mazzo; significa organizzazione geometrica, nel caso della risma di fogli di carta; significa raggruppare insieme elementi omogenei, separandoli in classi diverse, nel caso delle palline rosse e blu.

Ma ciò che unifica queste diverse definizioni di ordine è il fatto che esso rappresenta la configurazione eccezionale, la meno probabile. Cinquantadue carte possono disporsi in un numero enorme di sequenze; un numero dato dalle disposizioni di 52 oggetti, e pari dunque a 52! (52! vale circa 10^{68}); e fra tutte queste sequenze noi una sola la chiamiamo *ordine*, quella con le carte in ordine crescente e i vari semi uno dopo l'altro nell'opportuna sequenza. E per i fogli di carta, uno qualunque degli infiniti modi in cui essi possono disporsi nella stanza lo chiamiamo disordine; ma uno solo lo chiamiamo ordine, quello in cui tutti i fogli sono nello stesso posto, sovrapposti uno all'altro.

Ma approfondiamo un poco di più il caso delle palline rosse e blu, perché esso è quello più simile al caso di un sistema termodinamico, ad esempio un gas costituito da molte molecole. Per separare le N palline rosse dalle N palline blu (le une nel primo recipiente, le altre nell'altro) c'è un solo modo: quello di prendere tutte le palline – ad esempio – rosse, e porle nel primo recipiente; lasciando tutte le blu nel secondo. Ma ci sono molti modi per mettere sia le rosse che le blu metà di qua e metà di là, in modo da realizzare alla fine un perfetto mescolamento di rosse e blu in tutto il recipiente. Nel primo recipiente possiamo mettere una qualsiasi

combinazione di $\frac{N}{2}$ palline rosse tratte dalle N; accoppiandole con una qualunque combinazione di $\frac{N}{2}$ palline tratte dalle N palline blu.

Poiché il numero di combinazioni di $\frac{N}{2}$ oggetti tratti da N è pari a $\frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)!\left(\frac{N}{2}\right)!}$, il numero totale W di modi in cui può essere realizzata una configurazione che vede ogni tipo di palline metà di qua e metà di là è dato da:

$$W = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)!\left(\frac{N}{2}\right)!} \cdot \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)!\left(\frac{N}{2}\right)!} \qquad \text{[VI.33]}$$

Appena N diviene grande (nel caso di un sistema termodinamico, N è dell'ordine del numero di Avogadro, cioè dell'ordine di 10^{24}) W diviene un numero enorme. Ecco dunque perché i sistemi - e in particolare quelli termodinamici - tendono spontaneamente al disordine: *perché il disordine è straordinariamente più probabile dell'ordine.*

Il disordine è più probabile dell'ordine.

È evidente l'analogia fra l'esempio delle palline rosse e blu e molti dei casi che abbiamo trattato discutendo il secondo principio della termodinamica.

Ad esempio se un certo gas è in parte più caldo, dentro un recipiente, e in parte più freddo, dentro un secondo recipiente; questo significa, vista l'interpretazione microscopica della temperatura, che molecole mediamente più veloci stanno da una parte, e molecole mediamente più lente dall'altra. Mettendo i recipienti a contatto termico, la situazione tende a uniformarsi; a raggiungere una configurazione di completo disordine. La temperatura diviene, per tutto il gas, quella intermedia. Dal punto di vista macroscopico, è stato raggiunto lo stato di massima entropia S; dal punto di vista microscopico, è stato raggiunto lo stato in cui è massimo W, cioè sostanzialmente lo stato più probabile.

Analogo è anche il caso dell'espansione libera di un gas. C'è un solo modo per avere tutto il gas in uno dei due recipienti, quello di mettere tutte le molecole in quel recipiente; ma metà di quà e metà di là lo si può avere mettendo in un recipiente una qualunque combinazione di $\frac{N}{2}$ molecole tratte da N, e ciò può essere fatto in un numero W di modi pari a

$$W = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)!\left(\frac{N}{2}\right)!} \qquad \text{[VI.33]}$$

Fenomenologicamente, sappiamo che i sistemi termodinamici tendono spontaneamente allo stato di massima entropia; statisticamente ci aspettiamo (ed anche osserviamo) che essi raggiungono lo stato più probabile, quello cui corrisponde il massimo del numero di modi W in cui esso può essere realizzato.

Segue dunque che deve esservi una relazione fra l'entropia S e il numero W:

$$S = S(W) \qquad [VI.35]$$

Ogni sistema termodinamico isolato tende a raggiungere, all'equilibrio, la configurazione più probabile.

Nel prossimo paragrafo determineremo l'espressione di questa relazione funzionale; a quel punto, il secondo principio della termodinamica non sarà più solo un principio empirico. Esso avrà anche una semplice interpretazione statistica: *ogni sistema termodinamico isolato tende a raggiungere, all'equilibrio, la sua configurazione più probabile.*

VI.5. Disordine e entropia

Disordine e entropia.

La relazione funzionale $S(W)$ fra l'entropia S di un determinato stato macroscopico e il numero W di configurazioni microscopiche in cui quello stato macroscopico può essere realizzato, può essere determinata considerando che mentre S è additiva, W è moltiplicativo. In altri termini, se un sistema A è costituito da due sottosistemi A_1 e A_2, la sua entropia S è pari alla somma delle entropie S_1 ed S_2 dei due sottosistemi; mentre il numero W è dato dal prodotto dei numeri di modi W_1 e W_2 in cui lo stato di A_1 e di A_2 può essere realizzato. Dunque:

$$S(W_1 \cdot W_2) = S(W_1) + S(W_2) \qquad [VI.36]$$

La [VI.36] deve valere qualunque sia il valore di W_1 e W_2. Questa condizione è sufficiente a determinare la forma di $S(W)$. Prendiamo infatti una funzione $f(x)$ che goda della proprietà [VI.36]:

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2) \qquad [VI.37]$$

Poiché la [VI.37] deve valere per qualunque valore di x_1 ed x_2, poniamo $x_1 = x$ e $x_2 = 1 + \in$ ($\in \ll 1$). La [VI.37] diviene:

$$f(x + \in x) = f(x) + f(1 + \in)$$

sviluppando in serie al primo ordine in $\in$:

$$f(x) + \in x f'(x) = f(x) + f(1) + \in f'(1)$$

Poiché questa relazione deve valere per qualunque valore di $\in$, ponendo in essa $\in = 0$, si ha $f(1) = 0$; e dunque essa diviene:

$$x f'(x) = f'(1) = C \quad (C = \text{costante})$$

da cui

$$f'(x) = \frac{C}{x}$$

e integrando

$$f(x) = C \log x + \text{cost}$$

per cui l'entropia S – definita a meno di una costante – può essere scritta come:

$$S = C \log W \qquad [VI.38]$$

Determiniamo ora il valore della costante C calcolando la variazione di entropia per una particolare trasformazione per cui siamo in grado di calcolare sia la variazione di entropia ($\Delta S = S_f - S_i$) che la variazione di $W \left(\frac{W_f}{W_i}\right)$. Per fare ciò riferiamoci alla espansione libera di un gas perfetto che porti a raddoppiare il volume $\left(\frac{V_f}{V_i} = 2\right)$.

Sappiamo (vedi esempio 1 § VI.7.) che ΔS è dato da

$$\Delta S = n\,R \log \frac{V_f}{V_i} = n\,\mathcal{N}\,K \log 2 = N K \log 2 \qquad \text{[VI.39]}$$

con n numero di moli; $\mathcal{N}$ numero di Avogadro; N numero di molecole del gas; K costante di Boltzmann. D'altra parte, applicando la [VI.38]:

$$\Delta S = C \log \frac{W_f}{W_i}$$

ed usando la [VI.34] $\left(W_f = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)!\left(\frac{N}{2}\right)!};\ W_i = 1 \right)$:

$$\Delta S = C \log \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)!\left(\frac{N}{2}\right)!} \qquad \text{[VI.40]}$$

D'altra parte, per grandi valori di N vale la relazione approssimata:

$$\log N! \simeq N \log N$$

Sostituendo nella [VI.40]:

$$\Delta S = C\left(N \log N - \frac{N}{2}\log\frac{N}{2} - \frac{N}{2}\log\frac{N}{2}\right) = C\left(N\log N - N\log\frac{N}{2}\right) =$$

$$= C\,N\left(\log N - \log\frac{N}{2}\right) = C\,N \log\frac{N}{\left(\frac{N}{2}\right)} = C\,N\log 2\,.$$

Confrontando con la [VI.39] si ha:

$$C = K$$

e dunque in definitiva la [VI.38] diviene:

$$\boxed{S = K \log W} \quad (K \text{ costante di Boltzmann}) \qquad \text{[VI.41]}$$

$S = K \log W$

Va infatti notato che la [VI.38] ha validità generale, ed è dunque sufficiente calcolare il valore della costante C – così come noi abbiamo fatto – in un caso particolare.

VI.6. Entropia allo zero assoluto

Entropia allo zero assoluto.

Una analisi approfondita delle espressioni che abbiamo ricavato per l'entropia porta a evidenziare alcune apparenti incongruenze.

Quando abbiamo ricavato la equazione [VI.41], che mette in relazione tra di loro l'entropia S di un sistema termodinamico e il numero W di stati microscopici in cui lo stato termodinamico considerato può essere realizzato, abbiamo effettuato a titolo di esempio il calcolo di W in alcuni casi semplici notevoli. In realtà, ciò che abbiamo fatto è stato il confronto fra il numero W relativo a due stati diversi (ad esempio gas compresso in un recipiente; gas espanso in entrambi i recipienti) calcolando il *rapporto* fra il numero W relativo ai due stati considerati. Se avessimo voluto calcolare il numero assoluto W relativo a uno stato (e non il suo valore relativamente a un altro stato preso come riferimento) ci saremmo trovati di fronte a una difficoltà di principio notevole. Infatti avremmo dovuto tenere presente che spostando una molecola all'interno di un recipiente, o cambiandone la velocità, si ottiene uno stato diverso; e poiché le coordinate e le velocità sono parametri che possono cambiare con continuità, il numero W sarebbe a rigore infinito.

Spazio delle fasi.

Per superare praticamente questa difficoltà, Boltzmann immaginò di suddividere lo spazio occupato dal sistema (nonché lo spazio delle sue velocità; nel loro insieme lo spazio delle coordinate e quello delle velocità costituiscono il cosiddetto «spazio delle fasi») in tante cellette elementari, considerando fra di loro equivalenti due stati microscopici per i quali le molecole del sistema occupano le stesse cellette elementari nello spazio delle fasi; e viene così eliminata la difficoltà di principio nel calcolo matematico del numero W.

Evidentemente, il numero W così calcolato dipende dalle dimensioni delle cellette; tuttavia il numero W relativo a due stati qualunque 1 e 2 (chiamiamo il relativo valore di W rispettivamente W_1 e W_2) cambiando il volume delle cellette cambia per uno stesso fattore, cosicché il rapporto $\frac{W_1}{W_2}$ non ne risulta modificato. In altri termini, si può dire che, cambiando il volume delle cellette, il numero W viene moltiplicato per un numero costante C che è lo stesso per tutti gli stati del sistema:

$$W' = C\,W$$

cosicché il valore dell'entropia S (calcolato tramite la [VI.41]) ne viene modificato per una costante additiva comune all'entropia di tutti gli stati:

$$\log W' = \log C\,W = \log W + \log C \qquad \text{[VI.42]}$$

Ciò non porta alcun danno fino a che l'unico significato fisico dell'entropia è legato alla differenza fra i valori che essa assume in due stati diversi.

Tuttavia la difficoltà, che in questo modo viene eliminata ai fini pratici del calcolo, resta dal punto di vista fisico, considerando che nel caso limite che ogni celletta nello spazio delle fasi tenda a divenire puntiforme, la costante C nella [VI.42] tende a infinito.

Principio di indeterminazione.

Questa difficoltà della fisica classica è eliminata nella teoria quantistica, secondo la quale esiste un *principio di indeterminazione* che rende fra di loro concettualmente indistinguibili situazioni fisiche caratterizzate da variabili microscopiche sufficientemente prossime fra di loro. Secondo la

meccanica quantistica, lo spazio delle fasi (uno spazio a 6 dimensioni) è suddiviso in cellette di volume h (dove h è la costante di Planck), nel senso che due particelle che occupino una stessa celletta si trovano in situazioni fisiche fra di loro indistinguibili, e dunque concettualmente identiche.

Costante di Planck.

La meccanica quantistica permette dunque di calcolare il numero W relativo a uno stato, e non più solo il suo rapporto rispetto a uno stato di riferimento; l'entropia S definita tramite la [VI.41] risulta così calcolabile anche in un particolare stato, e non più solo come differenza fra il suo valore in due stati diversi.

In questo quadro, è stato dimostrato il «*teorema di Nernst*» secondo il quale *l'entropia di qualunque sistema termodinamico, alla temperatura dello zero assoluto, è nulla*. Questo teorema va sotto il nome anche di *terzo principio della termodinamica*. Lo zero assoluto è così quella temperatura alla quale non solo è nulla l'energia cinetica dei costituenti microscopici del sistema termodinamico considerato; ma è anche quella alla quale il sistema termodinamico si pone in uno stato caratterizzato da $W = 1$, uno stato cioè che può essere realizzato in una *unica configurazione microscopica* (configurazione eccezionale di massimo possibile ordine).

Teorema di Nernst.

Terzo principio della termodinamica.

L'entropia di qualunque sistema termodinamico, alla temperatura dello zero assoluto, è nulla.

Allo zero assoluto corrisponde la configurazione di massimo possibile ordine.

Va notato che le espressioni per l'entropia di sistemi termodinamici notevoli che abbiamo ricavato nel § IV.7. non soddisfano questa condizione. Al contrario, poiché esse contengono il termine $C \log T$, esse tendono a meno infinito ($-\infty$) per T che tende a zero. Va però ricordato che quelle espressioni erano state calcolate nell'ipotesi che il calore specifico C fosse costante: ipotesi valida – entro sufficiente approssimazione – solo per alcuni sistemi, e solo a temperature lontane dallo zero assoluto. In effetti, come abbiamo già accennato nel § VI.2., secondo la meccanica quantistica il calore specifico di qualunque sostanza tende a zero quando T tende a zero, coerentemente con quanto si riscontra sperimentalmente. Ribadiamo che noi non disponiamo qui degli strumenti per trattare problemi di meccanica quantistica. Va tuttavia rilevato che problemi termodinamici in cui tali strumenti servano sorgono in generale solo in campi strettamente specialistici.

VI.7. Termodinamica dei sistemi lontani dall'equilibrio

Abbiamo visto che ogni sistema termodinamico isolato tende a raggiungere all'equilibrio lo stato di massima entropia, cioè la configurazione di massimo disordine.

Termodinamica dei sistemi lontani dall'equilibrio.

Quando invece il sistema non è isolato, può accadere che la sua entropia diminuisca. Ma quando ciò accade, accade a spese di un aumento di entropia delle sorgenti: tanto è vero che l'entropia complessiva del sistema e delle sorgenti non può mai diminuire. Possiamo dire che se in un sistema l'ordine aumenta, ciò accade perché il disordine viene riversato altrove; ma il disordine complessivo aumenta sempre.

Di solito, nei fenomeni che ci capita di osservare nel mondo circostante, vediamo che i sistemi termodinamici tendono a raggiungere la loro situazione di equilibrio interno – quando sono isolati – o di equilibrio con le loro sorgenti, in un tempo relativamente breve. Benché tutti i sistemi che osserviamo siano solo approssimativamente isolati, la termodinamica degli stati di equilibrio – che abbiamo trattato in questo libro – è di fondamentale aiuto alla comprensione della relativa fenomenologia.

Tuttavia non tutti i sistemi tendono all'equilibrio in tempi brevi; e alcuni sistemi sono in permanenza in così forte interazione con sorgenti

che sono a loro volta lontane dall'equilibrio, che la loro descrizione mediante la termodinamica degli stati di equilibrio è del tutto inadeguata.

L'universo cosmico (un insieme di centinaia di miliardi di galassie ciascuna contenente centinaia di miliardi di stelle immerse nello spazio vuoto) è un sistema molto lontano dall'equilibrio. La sua temperatura varia da valori di centinaia di milioni di gradi nel cuore delle stelle a pochi gradi Kelvin in frammenti ormai spenti che vagano nello spazio; e la velocità relativa dei corpi celesti fra di loro più lontani è prossima alla velocità della luce, come effetto della primordiale esplosione (Big Bang) che ha lanciato materia informe verso lo spazio.

Tutta la materia si attrae reciprocamente grazie alla gravitazione universale. In virtù di questa attrazione la materia si è raggrumata nei corpi celesti; e in virtù della stessa forza i corpi celesti tendono ancor oggi ad essere frenati, nella loro corsa verso lo spazio, dalla loro mutua attrazione. Non solo. Secondo la relatività generale, anche la stessa luce è soggetta alla gravitazione; e così l'energia irraggiata dai corpi celesti nello spazio tende ad essere frenata dalla attrazione dell'universo, e richiamata indietro. La densità dell'universo non è a tutt'oggi ben conosciuta. Tuttavia è plausibile che essa sia sufficientemente elevata perché la velocità di fuga di un oggetto lanciato da un punto dell'universo verso lo spazio sia superiore alla velocità della luce. Se così è, tutta la materia espulsa nel Big Bang, e tutta l'energia che è stata e che sarà irraggiata verso lo spazio, è destinata ad essere completamente frenata, e riattratta infine in una corsa inversa; allora il Big Bang sarebbe seguito, fra una decina di miliardi di anni, da una generale implosione, premessa per un nuovo Big Bang con l'inizio di un nuovo ciclo di vita dell'Universo.

Comunque sia, oggi e per molti miliardi di anni ancora, un pianeta come la Terra è mantenuto dalla sua interazione con un universo molto lontano dall'equilibrio in condizioni termodinamiche molto lontane esse stesse dall'equilibrio. La Terra è un sistema non isolato che riceve dal Sole energia radiante diluita in intensità dalla distanza, ma il cui spettro è simile a quello di un corpo nero alla temperatura di circa 6000 gradi; e che irraggia energia verso lo spazio freddo nella forma di radiazione infrarossa tipica di un corpo nero a circa 300 K.

Per comprendere molti dei fenomeni che avvengono sulla terra – e in particolare i fenomeni meteorologici, o ancor più i fenomeni della vita – non è sufficiente la termodinamica degli stati di equilibrio; non è sufficiente disporre di leggi che regolano il passaggio di un sistema da uno stato di equilibrio a un altro, disinteressandosi di ciò che accade al sistema durante la trasformazione. Al contrario, è necessario descrivere come il sistema evolve proprio mentre è lontano (e a volte molto lontano) dall'equilibrio. Lo studio di questo capitolo della termodinamica – che tratta sistemi termodinamici aperti, e molto lontani dall'equilibrio – è stato intrapreso solo da pochi lustri; è dunque un capitolo appena iniziato, lontano dalle sue conclusioni.

È stato mostrato che in un sistema aperto molto lontano dall'equilibrio – il quale sia sede, come la maggior parte dei sistemi fisici, di fenomeni dissipativi; ovvero sia sede di reazioni chimiche di tipo catalitico – non è detto che la configurazione più probabile sia la configurazione di massimo disordine, priva di organizzazione e di struttura. Al contrario (così come nell'acqua corrente di un ruscello può ingenerarsi la regolare struttura circolare dei vortici; o in un fluido riscaldato lontano dall'equilibrio possono generarsi regolari celle di convezione) in ogni sistema aperto possono generarsi

spontaneamente strutture organizzate, dotate a volte anche di una loro regolare e riproducibile evoluzione nel tempo.

La termodinamica dei sistemi lontani dall'equilibrio sta gettando i primi barlumi di luce in un mondo a tutt'oggi inesplorato; quel mondo che contiene, fra gli altri, il mistero dell'origine della vita sulla terra.

Appendice

Soluzione degli esercizi

Capitolo primo

1.1. $\Delta l = l(t_o) \cdot \alpha \cdot \Delta t = (1{,}00 \text{ m}) \cdot (17 \cdot 10^{-6}\,°\text{C}^{-1}) \cdot 80°\text{C} = 1{,}36 \text{ mm}.$

1.2. Il periodo del pendolo è $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Essendo $T = T(l)$, una variazione Δl di l si riflette in una variazione ΔT di T data da

$$\Delta T \simeq \frac{dT}{dl}\Delta l = \frac{1}{2}\frac{2\pi \cdot \Delta l}{\sqrt{g\,l}}.$$

La variazione percentuale di periodo è

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{2\pi \cdot \Delta l}{\sqrt{g\,l}} \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l}.$$

Poiché

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \Delta t = (19 \cdot 10^{-6}\,°\text{C}^{-1}) \cdot 7°\text{C} = 1{,}33 \cdot 10^{-4},$$

si ha

$$\frac{\Delta T}{T} \simeq 0{,}66 \cdot 10^{-4}.$$

Su un giorno, pari a $8{,}64 \cdot 10^4$ sec, ciò si traduce in un ritardo pari a $8{,}64 \cdot 10^4 \cdot 0{,}66\, 10^{-4} \simeq 5{,}7$ sec.

Osservazione:
Per il periodo abbiamo usato l'espressione $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ valida per un pendolo semplice. È possibile mostrare che i risultati numerici sono gli stessi se si usa l'espressione valida per il pendolo fisico $T = \sqrt{\frac{I}{Mgd}}$ (I: momento di inerzia; M: massa; d: distanza fra il baricentro e il punto di sospensione).

1.3. Qualunque sia la forma, il volume V è proporzionale al prodotto di tre lunghezze a, b, c (eventualmente fra loro uguali) che caratterizzano il solido: $V = K\,a\,b\,c$. Indicando con il pedice o le grandezze alla temperatura t_o, si ha: $a = a_o(1 + \alpha \cdot \Delta t)$;$b = b_o(1 + \alpha \cdot \Delta t)$; $c = c_o(1 + \alpha \cdot \Delta t)$ e dunque:
$V = K\,a\,b\,c = K\,a_o\,b_o\,c_o(1 + \alpha \cdot \Delta t)^3 =$
$= V_o(1 + 3\,\alpha\,\Delta t + 3\,\alpha^2 \cdot \Delta t^2 + \alpha^3 \cdot \Delta t^3) \simeq V_o(1 + 3\,\alpha \cdot \Delta t)$
e dunque $\beta \simeq 3\,\alpha$.

I.4. $t_1\,(\mathrm{F}) = 32 + \frac{9}{5}\, t_1\,(°\mathrm{C})$;

$t_2\,(\mathrm{F}) = 32 + \frac{9}{5}\, t_2\,(°\mathrm{C})$; da cui

$$\Delta t\,(°\mathrm{C}) = \frac{5}{9}\,\Delta T\,(\mathrm{F}) = \frac{\Delta T\,(\mathrm{F})}{1{,}8}.$$

$$\Delta t = 100\ \mathrm{F} = \frac{100}{1{,}8}\ °\mathrm{C} = 55.6°\mathrm{C}.$$

La variazione di volume è $\Delta V = V_o\,\beta \cdot \Delta t =$
$= V_o\, 3\,\alpha \cdot \Delta t = 1{,}5\ \mathrm{dm}^3 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1} \cdot 55{,}6°\mathrm{C} =$
$= 4{,}25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{dm}^3 = 4{,}25\ \mathrm{cm}^3.$

I.5. Per una variazione $\Delta t = 100°\mathrm{C}$ di temperatura, la variazione di volume è $\Delta t = V_o\,\beta \cdot \Delta t = (0{,}5\ \mathrm{cm}^3) \cdot (0{,}1818 \cdot 10^{-3}\ °\mathrm{C}^{-1})\ (100°\mathrm{C}) = 9{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm}^3$. Poiché $\Delta V = \sigma\,\delta$, si ha $\sigma = \frac{\Delta V}{\delta} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-3}}{20}\ \mathrm{cm}^2 = 0{,}0455\ \mathrm{mm}^2$.

I.6. A parità di Δt e di volume, si ha

$$\frac{\Delta V\ \text{pirex}}{\Delta V\ \text{mercurio}} = \frac{\beta\ \text{pirex}}{\beta\ \text{mercurio}} = \frac{9.10^{-6}}{181{,}8 \cdot 10^{-6}} \simeq 4.9\%.$$

I.7. Il lavoro compiuto dal sistema è
$L = P_o\,\Delta V = P_o\,(V - V_o) = 1\ \text{atm.}\ (-2\ \text{litri}) = -2\ \text{litri} \cdot \text{atm} = -202{,}6\ \text{Joule}.$

I.8. $$\mathrm{L} = \int_{V_o}^{2V_o} P\,dV = -\int_{V_o}^{2V_o} \frac{P_o}{V_o}\,V\,dV = \frac{P_o}{2\,V_o}\,(4\,V_o^2 - V_o^2) = \frac{3}{2}\,P_o\,V_o =$$
$= 45$ litri atm $= 4558{,}5$ Joule.

I.9. Si ha $\Delta V = V \cdot \beta \cdot \Delta t$. Si vuole che in corrispondenza di $\Delta t = 40°\mathrm{C}$ sia $\Delta V = \sigma \cdot \Delta h = 0.1\ \mathrm{mm}^2 \times 200\ \mathrm{mm} = 20\ \mathrm{mm}^3$; deve essere

$$\mathrm{V} = \frac{\Delta V}{\beta \cdot \Delta t} = \frac{20\ \mathrm{mm}^3}{(1{,}01)\ 10^{-3} \cdot 40} \simeq 0{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^3 \simeq 0{,}5\ \mathrm{cm}^3.$$

I.10. Nella combustione di 100 g di gasolio si sviluppano $Q = 10^6$ cal, mentre la quantità di calore assorbita dal recipiente è $q = m_g\,\lambda_g = 5 \cdot 10^3\ \mathrm{g} \cdot 79{,}7\ \frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{g}} =$ $= 398\ 10^3$ cal. Si ha dunque $\frac{q}{Q} \simeq \frac{0{,}4\ 10^6}{10^6} \simeq 0{,}4$.

Capitolo secondo

II.1. a) Il calore Q assorbito è $Q = m\,c\,\Delta t = V\rho\,c\,\Delta t$ dove V è il volume, ρ la densità, c il calore specifico e Δt la variazione di temperatura.

Dalla tabella III.1 si ha $\rho = 8900$ kg/m^3, e $c = 385 \dfrac{\text{J}}{\text{kg °C}}$; essendo $V = 10^{-3}$ m^3 e $\Delta t = 80$°C, risulta $Q = 274 \cdot 10^3$ J.

b) Il lavoro dovuto alla dilatazione è $L = P_o \Delta V = P_o V \beta \cdot \Delta t = P_o V 3\alpha \cdot \Delta t$, dove α è il coefficiente di dilatazione lineare. Si ha $L \simeq 0{,}4$ J.

II.2. L'energia E necessaria per sciogliere il ghiaccio è $E = m\,\lambda_g$ (m = massa del ghiaccio). L'energia assorbita dal sistema, pari al lavoro L compiuto dalle forze di attrito, è uguale, a regime (v = cost), alla variazione di energia potenziale della forza peso: $L = \text{mg}\,h = \text{mg}\,l \sin\alpha \simeq \text{mg}\,l\,\alpha$.
Perché $E = L$, deve essere

$$l = \frac{\lambda_g}{\text{g} \cdot \alpha} = \frac{79{,}7 \text{ cal}}{9{,}8 \dfrac{m}{s^2} \cdot 0{,}1} = \frac{79{,}7 \;\; 4{,}18}{0{,}98 \dfrac{m}{s^2}} \text{ Joule} \simeq 340\ m.$$

II.3. 1) Possiamo suddividere il processo in due fasi: a) si scioglie il ghiaccio; il calore Q_1 assorbito a tal fine dall'ambiente è $Q_1 = m_g \lambda_g = 20 \text{ g} \cdot 79{,}7 \dfrac{\text{cal}}{\text{g}} = 1594$ cal. b) una massa pari a $m_g + m_a$ di acqua si porta da 0°C a 20°C, assorbendo una quantità di calore Q_2 pari a $Q_2 = (m_g + m_a)\,c\,\Delta t = 100 \text{ g} \cdot \dfrac{1 \text{ cal}}{\text{g °C}} \cdot 20\text{°C} = 2000$ cal. In totale il calore scambiato è $Q = Q_1 + Q_2 = 3594 \text{ cal} = 15{,}02\ 10^3$ J.

2) Poiché il volume è (praticamente) costante, $L = 0$.

3) $\Delta U = Q - L = Q = 15{,}02\ 10^3$ J.

II.4. La pressione P_m esercitata dalla massa è $P_m = \dfrac{f}{S} = \dfrac{\text{mg}}{S}$; cosicché dall'esterno agisce sul gas una pressione costante $P_{ext} = P_m + P_o = P_o + \dfrac{\text{mg}}{S}$.
Essendo inizialmente P_o la pressione del gas, poiché $P_{ext} \neq P_o$, la trasformazione *non* è quasi statica

$$\left(P_o = 1 \text{ atm} \simeq 1{,}013 \cdot 10^5 \frac{N}{\text{m}^2};\ P_{ext} \simeq 2{,}01 \cdot 10^5 \frac{N}{\text{m}^2}\right).$$

2) Si ha

$$n = \frac{P_o V_o}{R\,T_o} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 0{,}5\ l}{82{,}06 \cdot 10^{-3} \dfrac{1 \text{ atm}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K}} = 2{,}03 \cdot 10^{-2};$$

$$m = n\,M = 0{,}56 \text{ g}.$$

3) $$P = P_{ext} = P_o + \frac{\text{mg}}{S} = 2{,}01 \cdot 10^5 \frac{N}{\text{m}^2};$$

$$T = T_o = 300 \text{ K};$$

$$V = \frac{V_o P_o}{P} = 0{,}26\ l.$$

4) Poiché $\Delta T = 0$, si ha $\Delta U = n\,C_V\,\Delta T = 0$;

$$L = P_{ext} \cdot \Delta V = P(V - V_o) = -2{,}01 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot 0{,}24 \cdot 10^{-3}\,m^3 \simeq -48{,}2\,J;$$

$$Q = L = -48{,}2\,J.$$

II.5. 1) e 2): Ancora una volta, la trasformazione non è quasi statica; e la massa m del gas è ancora uguale, evidentemente, a $2{,}03 \cdot 10^{-2}$ moli (ovvero 0,56 g).

3) e 4): La pressione finale è ancora uguale a $P = P_{ext} = 2{,}01 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$.
Tuttavia né V né T sono direttamente noti. Essi possono essere ricavati dalle due equazioni:

$$\begin{cases} n\,C_V(T - T_o) = P(V_o - V) & \text{(I principio: } \Delta U = -L\text{, tenuto conto che } Q = 0) \\ \dfrac{P\,V}{T} = \dfrac{P_o\,V_o}{T_o} & \text{(equazione di stato dei gas perfetti)} \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene: $\Delta U = -L = 36{,}5\,J$; $V = 0{,}323\,l$; $T = 388$ K.

II.6. Il sistema complessivo è termicamente isolato ($Q = 0$) ed essendo a volume costante non scambia lavoro meccanico con l'ambiente ($L = 0$); dunque per il primo principio è anche $\Delta U = 0$.
Quanto al gas, per esso è $Q_1 = 0$ (non interagisce con corpi a diversa temperatura); mentre $-L = \Delta U$, può essere calcolato notando che $0 = \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$ (avendo indicato con ΔU_2 la variazione di energia interna del disco), e dunque $\Delta U_1 = -\Delta U_2$.
In funzione dei parametri di stato si ha:

Osservazione:
Benché la trasformazione sia a volume costante, il gas subisce lavoro ($L_1 < 0$) ad opera delle forze di attrito.

$$n\,C_V(T - T_o) = \Delta U_1 = -\Delta U_2 = -M\,c\,(T - T_o) - (K - K_o);$$

$$T - T_o = \frac{K_o - K}{M\,c + n\,C_V},$$

avendo indicato con K e K_o l'energia cinetica finale e iniziale del disco (dunque $K = 0$; $K_o = \frac{1}{2} I\,\omega^2$). Da cui $T - T_o = \frac{1}{2}\,\frac{I\,\omega^2}{M\,c + n\,C_V}$.
Essendo

$$I = \frac{1}{2} M R^2 = 4 \cdot 10^{-2}\,kg\;m^2;\quad \omega = 2\pi\nu = 6{,}28 \cdot 150\,s^{-1};\quad M\,c = 385\,\frac{J}{°C};$$

$$n = \frac{P_o\,V_o}{R\,T_o} = 0{,}12 \text{ moli};\quad C_V = \frac{5}{2} R = 20{,}8\,\frac{\text{Joule}}{\text{mole °C}};$$

si ottiene $T = 345{,}7$ K.
Finalmente, essendo $V = V_o$, si ha

$$P = \frac{P_o}{T_o}\,T = 1\text{ atm} \cdot \frac{345{,}7}{300} = 1{,}15\text{ atm}.$$

II.7. L'esercizio si risolve in maniera simile all'esercizio II.6., sostituendo semplicemente C_P al posto di C_V nella $T - T_o = \frac{K_o - K}{M\,c + nC_V}$. Essendo il termine $n\,C_V$ molto piccolo rispetto a $M\,c$, i risultati numerici per $T - T_o$ cambiano poco. Il gas compie però ora un lavoro $L = P_o(V - V_o) = n\,R(T - T_o) = 45{,}7\,J$ confrontabile con la sua variazione di energia interna $\Delta U_1 = n\,C_V\,(T - T_o) = 114\,J$, e tuttavia trascurabile rispetto alla energia cinetica K_o ($= 17{,}8 \cdot 10^3\,J$) inizialmente posseduta dal disco.

II.8. Essendo il recipiente rigido ($V =$ cost) e isolato termicamente, si ha $L = 0$ e $Q = 0$, e dunque, per il primo principio, $\Delta U = 0$.
Evidentemente, quando si combinano fra loro, le molecole di ossigeno e di idrogeno raggiungono una configurazione (molecola d'acqua) caratterizzata da energia potenziale più bassa, a vantaggio di un aumento della loro energia termica (corrispondente ad energia cinetica di moto disordinato).

II.9. 1) Si ha

$$n = \frac{P_0 V_0}{R T_0} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 5 \text{ l}}{82{,}06 \cdot 10^{-3} \frac{\text{l} \cdot \text{atm}}{\text{K} \cdot \text{moli}} \cdot 243 \text{ K}} = 0{,}25 \text{ moli};$$

$m = n M = 0{,}25 \cdot 32 \text{ g} = 8 \text{ g}$.

2) $T = 300$ K; $V = V_0 + S h = 5 \text{ l} + 200 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ l} = 5{,}4$ l;

$$P = P_0 \frac{T}{T_0} \frac{V_0}{V} = 1{,}3 \text{ atm}.$$

3) $P = P_0 + \dfrac{K h}{S}$; $K = \dfrac{P - P_0}{h} S = 3{,}4 \cdot 10^4 \dfrac{N}{m}$.

4) $L = \dfrac{1}{2} K h^2 + P_0 \Delta V = 47{,}3 \ J$.

5) $Q = \Delta U + L = n C_V \Delta T + L = 0{,}25 \left(\dfrac{5}{2} R\right) 57 \ K + 47{,}3 \ J = 346{,}3 \ J$.

II.10. 1) Inizialmente è $V_0 = 2$ l, $T_0 = 300$ K, $P = 1$ atm; per cui

$$n = \frac{P_0 V_0}{R T_0} = \frac{2 \text{ l} \cdot \text{atm}}{82{,}06 \cdot 10^{-3} \frac{\text{l atm}}{\text{K mole}} \cdot 300 \text{ K}} = 8{,}1 \cdot 10^{-2} \text{ moli}.$$

$m = n M = 8{,}1 \cdot 10^{-2} \cdot 28 = 2{,}27$ g.

2) Il lavoro L è pari a $L = P_0 (V - V_0) = 0{,}5 \text{ l} \cdot \text{atm} = 50{,}7 \ J$.

3) $Q = \Delta U + L = n C_V (T - T_f) + 50{,}7 \ J$. D'altra parte T può essere ricavato dall'equazione di stato $T = \dfrac{P_0 V}{n R} = 375$ K;
risulta $Q = (126{,}3 + 50{,}7) \text{ J} = 177{,}0$ J.

II.11. La trasformazione è a pressione costante, per cui possiamo scrivere $Q = n C_P \Delta T$. D'altro canto è $n = \dfrac{P_0 V_0}{R T_0} = 0{,}174$ moli; per cui

$$\Delta T = \frac{Q}{n C_P} = \frac{-40 \text{ cal.} \cdot 4{,}18 \text{ J/cal}}{0{,}17 \text{ moli} \cdot \frac{7}{2} R} = -33{,}02 \text{ K}.$$

Dunque $T = T_0 - \Delta T = 317$ K; $V = \dfrac{V_0}{T_0} T = 4{,}53$ l.

2) Il lavoro L è pari a $P_0 (V - V_0) = 1 \text{ atm} \cdot (-0{,}47) \text{ l} \simeq -47{,}6$ J.

$\Delta U = Q - L = -40 \cdot 4{,}18 \text{ J} + 47{,}6 \text{ J} = -119{,}6$ J.

Lo stesso risultato si ottiene calcolando

$$\Delta U = n C_V \Delta T = 0{,}174 \frac{5}{2} R (-33{,}02 \text{ K}).$$

II.12. 1) La trasformazione è isotermica ($T = T_o$), per cui $P V = P_o V_o$. Essendo $V = 2 V_o$, si ha $P = P_o/2 = 10$ atm.

2) Essendo $T = T_o$, si ha $\Delta U = n C_V (T - T_o) = 0$. Poiché la trasformazione è quasi statica, $L = \int_{V_o}^{V} P\, dV = \int_{V_o}^{V} \frac{n R T_o}{V} dV = n R T_o \cdot \log \frac{V}{V_o}$; ed essendo $P_o V_o = n R T_o$, $L = P_o V_o \log 2 = 702$ J. Essendo $\Delta U = 0$, $Q = L$.

II.13. Si ha:

$$\begin{cases} a = 3\, V_c^2 P_c = 3 \cdot (94\ \text{cm}^3)^2 \times 73{,}9\ \text{bar} = 1{,}934\ l \cdot \text{atm} \\ b = \frac{V_c}{3} = \frac{94}{3}\ \text{cm}^3 = 0{,}031\ \text{litri}. \end{cases}$$

(abbiamo tenuto conto del fatto che 1 bar $= 10^5 \frac{N}{m^2} = \frac{1\ \text{atm.}}{1{,}013}$).

Abbiamo in definitiva (per 1 mole):

$$\left(P + \frac{1{,}934}{V^2}\right)(V - 0{,}031) = 82{,}06 \cdot 10^{-3}\, T.$$

(V in litri; P in atmosfere; T in gradi Kelvin).

II.14. 1) Se il gas si comportasse come un gas perfetto, il suo volume V sarebbe $V = \frac{R T}{P} = 24{,}618$ litri. Inserendo questo valore di V nell'equazione di Van der Waals (vedi soluz. esercizio II.13.) si trova che i termini $\frac{a}{V^2}$ e b rappresentano una correzione del 2,7‰ e 1,3‰ rispettivamente. I termini correttivi possono pertanto essere trattati perturbativamente: si trova $V = 24{,}570$ l.

2) 3): Trattando il gas come un gas reale (trasformazione $P = \text{cost} = P_o$), la soluzione per V e T dovrebbe essere trovata risolvendo il sistema

$$\begin{cases} Q = L + \Delta U = P_o (V - V_o) + C_V (T - T_o) - \left(\frac{a}{V} - \frac{a}{V_o}\right) \\ \left(P_o + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = R T \end{cases}$$

Tuttavia, poiché dal punto 1) è risultato che il gas si discosta poco dal comportamento di gas perfetto, con ottima approssimazione la soluzione è data da:

$$\Delta T = \frac{Q}{C_P} = \frac{Q}{C_V + R} = \frac{Q}{4 R} = 18{,}9\ \text{K}$$

$$\Delta V = \frac{R \Delta T}{P_o} = 1{,}55\ \text{litri}$$

$$\Delta U = C_V \Delta T = 3 R \Delta T = 471\ \text{J}$$

$$L = P_o \Delta V = R \Delta T = 157\ \text{J}.$$

II.15. Prima che all'aria del pallone venga fornito il calore Q, l'equilibrio (spinta di Archimede = peso) impone:

$V_o \rho_A g = mg + \mu g h \Rightarrow V_o \rho_A = m + \mu h$
(V_o volume iniziale)

Sia V il volume assunto dal pallone dopo aver ricevuto il calore Q; l'equazione di equilibrio diviene $V \rho_A = m + \mu h'$. Per differenza $\rho_A \Delta V = \mu \Delta h$;

cioè $\Delta h = \frac{\rho_A}{\mu} \Delta V$. D'altra parte si ha $\Delta V = \frac{n R \Delta T}{P_0}$; $\Delta T = \frac{Q}{n C_P}$ (n numero di moli d'aria contenute nel pallone), da cui $\Delta V = \frac{R Q}{P_0 C_P} = \frac{Q}{P_0 \frac{7}{2}}$

(avendo posto $C_P = 7/2\, R$). Dunque $\Delta h = \frac{\rho_A}{\mu} \frac{Q}{P_0 \frac{7}{2}} = 18{,}3\ m$.

II.16. Nello stato iniziale si ha: $U_i = m_1 c t_1 + m_2 c t_2 + m_3 c t_3 + \text{cost.}$
Nello stato finale: $U_f = (m_1 c + m_2 c + m_3 c)\, t_f + \text{cost.}$
Essendo $Q = 0$ ed $L = 0$, si ha $\Delta U = 0$; da cui

$$t_f = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2 + m_3 t_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30}{1 + 2 + 3} = \frac{140}{6} = 23{,}3^\circ\text{C}.$$

II.17. $Q = \Delta U + L$. $\Delta U = n C_V (T_B - T_A)$.
Dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$P_A V_A = n R T_A$$

$$P_B V_B = n R T_B = \frac{P_A}{2} \cdot 2 V_A = P_A V_A .$$

Da cui segue $T_B = T_A$, e dunque $\Delta U = 0$.

$$Q = L = \int_A^B p\, dV = \text{area del trapezio} = \frac{1}{2} (P_A + P_B)(V_B - V_A) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} P_A V_A = \frac{3}{4} n R T_A = 3403 \text{ J}.$$

II.18. Essendo $P V = R T$, moltiplicando ambo i membri per V si ha $P V^2 = R T V =$ costante; $P V^2 = P_A V_A^2$. Dunque si tratta di una politropica $P V^K =$ cost, con $K = 2$.

$$L = \int_A^B P\, dV = \int_A^B \frac{P_A V_A^2}{V^2} d V = P_A V_A^2 \left[-\frac{1}{V} \right]_A^B =$$

$$= P_A V_A^2 \left(\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_B} \right) = \frac{P_A V_A}{V_B} (V_B - V_A); \quad L = \frac{1 \cdot 8}{2} (2 - 8) =$$

$$= -24 \text{ l. atm} = -24 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ J} = -2431 \text{ J}$$

(il lavoro è negativo trattandosi di una compressione). Dalla relazione che dà il calore molare per le politropiche si ha $C = C_V + \frac{R}{1-K} = \frac{3}{2} R - R = \frac{1}{2} R$.

II.19. $\delta Q = n C(T)\, dT = n C_V\, dT + n \alpha\, T\, dT$
$\delta Q = dU + P\, dV = n C_V\, dT + P\, dV$.

Confrontando si ha $P\, dV = n \alpha\, T\, dT$. Ma $P = \frac{n R T}{V}$,

per cui

$$\frac{n R T}{V} dV = n \alpha\, T\, dT;$$

da cui

$$n R \frac{dV}{V} = n \alpha\, dT.$$

Integrando $\ln V_B - \ln V_A = \frac{\alpha}{R}(T_B - T_A)$ da cui:

$\ln V_B = \ln V_A + \frac{\alpha}{R}(T_B - T_A)$;

$$\ln V_B = 1{,}61 + 7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{cal}}{\text{mole } K^2} \cdot \frac{100\ K}{1{,}98 \frac{\text{cal}}{\text{mole } K}} = 1{,}96$$

$V_B = 7{,}1$ l.

II.20 Nell'espansione libera adiabatica $L = 0$ e $Q = 0$, e pertanto $\Delta U = 0$.

$$0 = \Delta U = C_V(T_F - T_I) - a\left(\frac{1}{V_F} - \frac{1}{V_I}\right).$$

Da cui

$$\Delta T = T_F - T_I = \frac{a}{C_V}\left(\frac{1}{V_F} - \frac{1}{V_I}\right) = -\frac{a}{2\,C_V V_I}.$$

II.21. Per il sistema $A + B$ la trasformazione è adiabatica (cosa non vera per i sistemi A e B presi separatamente).

$\Delta U = -L$;

$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = n\,C_V(T_F - T_I) + n\,C_V(T_F - T_I) = 2\,n\,C_V(T_F - T_I)$,

$$L = -\Delta U = -2 \cdot (2 \text{ moli}) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2 \text{ cal}}{\text{mole K}}\right) \cdot (10 \text{ K}) = -120 \text{ cal}.$$

Capitolo terzo

III.1. La conduttanza totale è data da:

$$H = \frac{1}{(1/H_1) + (1/H_2) + (1/H_3)}$$

dove $1/H_i = d_i/\lambda_i (i = 1, 2, 3)$. Numericamente $1/H_1 = 0{,}126$ m^2 °C/W; $1/H_2 = 3{,}08$ m^2 °C/W; $(1/H_3) = 0{,}156$ m^2 °C/W (i valori delle conduttanze λ_i sono stati tratti dalla tabella III.1). Risulta

$$H = 0{,}30 \frac{W}{\text{m}^2\,°\text{C}}.$$

$$W = H \cdot \Delta T = 0{,}30 \frac{W}{\text{m}^2\,°\text{C}} \cdot 15°\text{C} = 4{,}5 \frac{W}{\text{m}^2}.$$

W è la stessa attraverso i tre strati, per cui

$$(T_3 - T_1) = W(1/H_1) = 4{,}5 \frac{W}{\text{m}^2}\, 0{,}125 \frac{\text{m}^2\,°\text{C}}{W} = 0{,}5°\text{C}.$$

Analogamente

$$T_4 - T_3 = W(1/H_2) = 13{,}8°\text{C};\ T_2 - T_4 = W(1/H_3) = 0{,}7°\text{C}.$$

In definitiva

$$T_2 = 5°\text{C};\ T_4 = 5{,}5°\text{C};\ T_3 = 19{,}3°\text{C};\ T_1 = 20°\text{C}.$$

III.2. Dalla figura III.2, in corrispondenza di d = 10 cm, ricaviamo (interpolando fra le curve relative a ΔT = 10°C e ΔT = 5°C), $H_c \simeq 1{,}2 \frac{W}{m^2\,°C}$. La potenza termica scambiata per convezione è dunque

$$W_c = H_c \Delta T \simeq 1{,}2 \frac{W}{m^2\,°C} \cdot 7°C \simeq 8{,}4 \frac{W}{m^2}.$$

Quanto agli scambi radiativi, la [III.29] ($\bar{T}$ = 11,5°C $\simeq$ 285 K; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}9$) ci consente di calcolare $H_R \simeq 4{,}3 \frac{W}{m^2\,°C}$; per cui $W_R = H_R \Delta T \simeq 30{,}1 \frac{W}{m^2}$. Vediamo che gli scambi termici convettivi incidono per poco più del 20% sugli scambi termici complessivi, che sono dominati dagli scambi radiativi.

III.3. La conduttanza dell'intercapedine H_I è pari alla somma della conduttanza convettiva H_c e di quella radiativa H_R. Numericamente (vedi soluzione dell'esercizio III.2.):

$$H_I = H_c + H_R = 5{,}5 \frac{W}{m^2\,°C}.$$

L'esercizio si risolve ora come l'esercizio III.1. ponendo H_I al posto di H_2. Si ottiene: $H = 2{,}16 \frac{W}{m^2\,°C}$; $W = 32{,}4\ W$.

$$T_2 = 5°C;\ T_4 = 9{,}1°C;\ T_3 = 14{,}9°C;\ T_1 = 20°C$$

Come si vede, la potenza dissipata è per un fattore di circa 7 maggiore rispetto al caso di intercapedine piena di isolante.

III.4. Con l'aiuto della figura III.2 e della [III.29] si ricava che la conduttanza H_T totale di ciascuna delle due intercapedini in cui il setto divide l'intercapedine iniziale è data da

$$H_T = H_c + H_R \simeq 1{,}1 \frac{W}{m^2\,°C} + 4{,}3 \frac{W}{m^2\,°C} \simeq 5{,}4 \cdot \frac{W}{m^2\,°C}$$

La conduttanza H_I dell'intercapedine è data da $1/H_I = 1/H_T + 1/H_T$; cioè $H_I = H_T/2 \simeq 2{,}7 \cdot \frac{W}{m^2\,°C}$. Il setto di cartone dimezza dunque, all'incirca, la conduttanza della parete.

$$W = H_I \Delta T \simeq 18{,}9 \frac{W}{m^2}.$$

III.5. Poiché l'alluminio lucidato ha emittanza $\varepsilon \simeq 0{,}05$, la conduttanza radiativa di ciascuna delle intercapedini si riduce da $H_R = 4{,}3 \frac{W}{m^2\,°C}$ ad $H_R = 0{,}26 \frac{W}{m^2\,°C}$. La conduttanza totale di ognuna delle due intercapedini è pertanto ora $H_T = 1{,}1 + 0{,}26 \simeq 1{,}4 \frac{W}{m^2\,°C}$; e la conduttanza della loro serie è $H_I = H_T/2 = 0{,}7 \frac{W}{m^2\,°C}$. La potenza scambiata è pertanto $W = H_I \Delta T = 4{,}9 \cdot \frac{W}{m^2}$.

III.6. Usando la soluzione [III.15] dell'equazione di Fourier relativa a una parete semiinfinita abbiamo:

$$T(x, t) = T_0 + \Delta T\, e^{-ax} \sin(\omega t - ax).$$

Dove

$$a = \sqrt{\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\omega}{2}}\,.$$

Nel caso in esame,

$$T_0 = 15°\text{C};\ \ \Delta T = 7°;\ \ \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400}\ \text{sec}^{-1} \simeq 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{sec}^{-1}$$

Inoltre dalla tab. III.1 abbiamo

$$\rho = 2200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3};\ \ c = 880 \frac{J}{\text{kg °C}};\ \ \lambda = 1{,}28 \frac{W}{\text{m}^2\ \text{°C}}$$

per cui risulta $a = 7{,}1\ \text{m}^{-1}$.
In definitiva: $T = 15 \pm 7\, e^{-7{,}1x} \sin(7{,}3 \cdot 10^{-5}\, t - 7{,}1\, x)$ (t in secondi, x in metri). Va notato che questa soluzione rappresenta un'«onda di temperatura» che si attenua con una costante caratteristica pari a $7{,}1\ \text{m}^{-1}$ (per cui la sua ampiezza, a una profondità di 0,3 m, si è ridotta di un fattore $e^{7{,}1 \cdot 0{,}3} \simeq 0{,}13$) e che procede con una velocità pari a

$$\frac{\omega}{a} = 1{,}03 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\text{m}}{s} \simeq 3{,}61 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{h}\,;$$

per cui alla profondità $d = 0{,}30$ m essa arriva con un ritardo pari a $\dfrac{d_a}{\omega} \simeq 8{,}3\ h$.

III.7. L'esercizio si risolve in maniera analoga all'esercizio III.2. La conduttanza H della finestra è data da $1/H = 1/H_{ci} + 1/H_V + 1/H_{ce}$. dove

$$H_{ci} = 7{,}2 \frac{W}{\text{m}^2\ \text{°C}};\ \ H_{ce} = 23 \frac{W}{\text{m}^2\ \text{°C}}$$

$$\left(\text{vedi fig. III.4 in corrispondenza di v} = 20 \frac{\text{km}}{h} = 5{,}5 \frac{\text{m}}{s}\right);$$

$$H_v = \frac{\lambda}{d} = 186 \frac{W}{\text{m}^2\ \text{°C}}\,.$$

Risulta

$$H = 5{,}3 \frac{W}{\text{m}^2\ \text{°C}}\,.$$

Dunque

$$W = H\,\Delta T = 5{,}3 \frac{W}{\text{m}^2\ \text{°C}} \cdot 20\text{°C} = 106 \frac{W}{\text{m}^2}\,.$$

III.8. Abbiamo visto, risolvendo l'esercizio III.7., che la conduttanza H della finestra è determinata sostanzialmente solo dalle conduttanze dell'aria (strato interno e strato esterno), poiché rispetto a queste la lastra di vetro si

comporta praticamente come un corto circuito termico. Possiamo dunque scrivere

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_{ci}} + \frac{1}{H_D} + \frac{1}{H_{ce}},$$

dove

$$H_{ci} = 7{,}2 \frac{W}{m^2\,°C} \quad e \quad H_{ce} = 23 \frac{W}{m^2\,°C}$$

sono i due termini che già avevamo valutato risolvendo l'esercizio III.7., mentre H_D è la conduttanza della intercapedine fra i due vetri. H_D è la somma del termine convettivo H_{DC} e di quello radiativo H_{DR}. Dalla fig. III.2 risulta

$$H_{DC} \simeq 1{,}5 \frac{W}{m^2\,°C};$$

mentre dalla [III.29] (vedi anche esempio III.3) si ha

$$H_{DR} \simeq 4{,}5 \frac{W}{m^2\,°C}.$$

Dunque

$$H_D \simeq 6 \frac{W}{m^2\,°C}.$$

In conclusione

$$H = \left(\frac{1}{7{,}2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{23}\right)^{-1} \frac{W}{m^2\,°C} \simeq 2{,}85 \frac{W}{m^2\,°C}.$$

Dunque

$$W = H\,\Delta T \simeq 43 \frac{W}{m^2}.$$

III.9. Usando gli stessi simboli impiegati nella soluzione dell'esercizio III.8., si ha ora $H_{DC} = 0$, e quindi

$$H_{DR} = 4{,}5 \frac{W}{m^2\,°C}.$$

Dunque

$$H = \left(\frac{1}{7{,}2} + \frac{1}{4{,}5} + \frac{1}{23}\right)^{-1} \frac{W}{m^2\,°C} = 2{,}47 \frac{W}{m^2\,°C}.$$

$$W = H\,\Delta T = 37 \frac{W}{m^2}.$$

III.10. Usiamo ancora gli stessi simboli impiegati nella soluzione dell'esercizio III.8. Notiamo che H_{ce}, H_{ci}, H_D sono tutti costituiti da due termini, uno convettivo e uno radiativo. Il termine radiativo H_{DR} vale $H_{DR} = 4{,}5 \cdot \frac{W}{m^2\,°C}$ (vedi soluzione dell'esercizio III.8.) in assenza di SnO_2. Se la superficie di

un vetro viene trattata con SnO_2, il relativo cofficiente di scambio radiativo diviene

$$H_R = \frac{4\,\sigma\,T^3}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1},$$

con $\varepsilon_1 = 0{,}2$ anziché 0,9; risulta

$$H_R = 1{,}05\,\frac{W}{m\,°C}.$$

Se entrambe le facce dei vetri che affacciano verso l'intercapedine sono trattate con SnO_2, va posto $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}2$ ed H_{DR} diviene

$$H_{DR} = 0{,}6\,\frac{W}{m^2\,°C}.$$

Con questi valori, nei vari casi si ha:

a) $H = \left(\dfrac{1}{7{,}2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{23}\right)^{-1} \dfrac{W}{m^2\,°C} = 2{,}84\,\dfrac{W}{m^2\,°C}$;

$W = H\,\Delta T = 42{,}8\,\dfrac{W}{m^2}$

b) $H = \left(\dfrac{1}{3{,}75} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{23}\right)^{-1} \dfrac{W}{m^2\,°C} = 2{,}09\,\dfrac{W}{m^2\,°C}$;

$W = H\,\Delta T = 31{,}3\,\dfrac{W}{m^2}$

c) $H = \left(\dfrac{1}{7{,}2} + \dfrac{1}{2{,}55} + \dfrac{1}{23}\right)^{-1} \dfrac{W}{m^2\,°C} = 1{,}74\,\dfrac{W}{m^2\,°C}$;

$W = H\,\Delta T = 25{,}8\,\dfrac{W}{m^2}$

d) $H = \left(\dfrac{1}{7{,}2} + \dfrac{1}{2{,}15} + \dfrac{1}{23}\right)^{-1} \dfrac{W}{m^2\,°C} = 1{,}55\,\dfrac{W}{m^2\,°C}$;

$W = H\,\Delta T = 22{,}8\,\dfrac{W}{m^2}$.

III.11. La convezione è assente. La conduttanza unitaria (meccanismo di conduzione) è

$$H_c = \frac{\lambda}{d} = \frac{0{,}025}{0{,}10}\,\frac{W}{m^2\,°C} = 0{,}25\,\frac{W}{m^2\,°C}$$

(vedi fig. III.1 per il valore di λ). La conduttanza radiativa è

$$H_R = \frac{4\,\sigma\,T^3}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1},$$

con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}05$; risulta

$$H_R = 0{,}13\,\frac{W}{m^2\,°C}.$$

Si ha dunque

$$H = H_R + H_c = 0{,}38\,\frac{W}{m^2\,°C}; \quad W = H\,\Delta T = 7{,}6\,\frac{W}{m^2}.$$

III.12. Si ha ora convezione, meccanismo che assorbe anche la conduzione. Dalla figura III.3 si ha

$$H_c = 3{,}5 \frac{W}{\text{m}^2\,{}^\circ\text{C}} .$$

In totale

$$H = H_c + H_R = 3{,}63 \frac{W}{\text{m}^2\,{}^\circ\text{C}} ; \quad W = H\,\Delta T = 72{,}5 \frac{W}{\text{m}^2} .$$

III.13. Nel calcolo della conduttanza radiativa va ora posto $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}94$. Risulta

$$H_R = 4{,}8 \frac{W}{\text{m}^2\,{}^\circ\text{C}} .$$

$$H = H_c + H_R = 8{,}3 \frac{W}{\text{m}^2\,{}^\circ\text{C}} ; \quad W = H\,\Delta T = 166 \frac{W}{\text{m}^2} .$$

III.14. Il metabolismo dell'uomo in corsa comporta un dispendio di energia pari a

$$250 \frac{J}{s} = 250 \cdot 3600 \frac{J}{h} = \frac{250 \cdot 3600}{4{,}18} \frac{\text{cal}}{h} = 215 \frac{\text{kcal}}{h} .$$

Un kg di gasolio è dunque in grado di rifornire energia per un numero di ore pari a $10.000\ \text{kcal} \cdot \frac{1}{215} \frac{h}{\text{kcal}} = 46{,}5\ h$, e dunque per un percorso di $10 \frac{\text{km}}{h} \cdot 46{,}5\ h = 465\ \text{km}$.

III.15. Si ha

$$W_s = S\,\sigma\,T_s^4 = 4\pi R_s^2\,\sigma\,T_s^4 =$$
$$= 4\pi (7 \cdot 10^8\ \text{m})^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{\text{m}^2 K^4} (5{,}76 \cdot 10^3)^4 K^4 = 3{,}6 \cdot 10^{26}\ W .$$

L'angolo solido coperto dalla terra è

$$\Omega_T = \frac{\pi R_T^2}{d_s^2} = 55 \cdot 10^{-10}\ \text{sterad.}$$

La frazione F intercettata dalla terra è

$$F = \frac{\Omega_T}{4\pi} \simeq 4{,}4 \cdot 10^{-10} .$$

III.16. La frazione di energia solare compresa nell'intervallo visibile è circa 0,45 del totale.

III.17. Lo spettro risulta modificato al suolo così come mostrato approssimativamente in figura di pagina seguente.

III.18. Il flusso di potenza che colpisce l'unità di area della finestra è

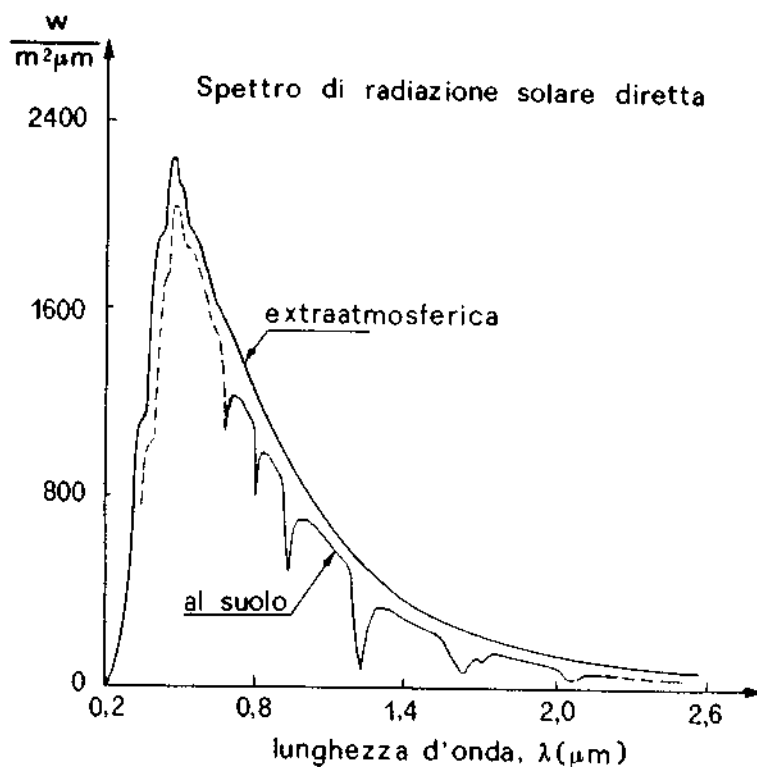
$$\varphi = \Phi \cos \theta = 700 \frac{W}{m^2} \cdot 0{,}704 \simeq 500 \frac{W}{m^2};$$

la potenza assorbita è dunque

$$W = 0{,}15\,\varphi \simeq 75 \frac{W}{m^2}.$$

All'equilibrio, deve essere $W = 2H\,\Delta T$ (il fattore 2 tiene conto del fatto che il vetro disperde energia su entrambe le facce), dove H (dalla fig. III.4) risulta essere pari a circa $7{,}2 \frac{W}{m^2\,°C}$. Si ha dunque

$$\Delta T = \frac{W}{2\,H} = 75 \frac{W}{m^2} \cdot \frac{1}{14{,}4 \frac{W}{m^2\,°C}} \simeq 5°C.$$

La temperatura del vetro è dunque di circa 25°C.

Capitolo quarto

IV.1. Per i cicli di Carnot (reversibili) si ha:

$$\eta\,(T_c, T_f) = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

a) $T_c = 500$ K, $T_f = 300$ K $\rightarrow \eta\,(500,\ 300) = 1 - \dfrac{300}{500} = 0{,}40$

b) $T_c = 520$ K, $T_f = 300$ K $\rightarrow \eta\,(520,\ 300) = 1 - \dfrac{300}{520} = 0{,}42$

c) $T_c = 500$ K, $T_f = 280$ K $\rightarrow \eta\,(500,\ 280) = 1 - \dfrac{280}{500} = 0{,}44$

Osserviamo che, nei casi b) e c), a parità di differenza di temperatura tra le sorgenti, è preferibile, dal punto di vista del rendimento, avere a più bassa temperatura la sorgente fredda.

IV.2. $\eta = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 1 - \dfrac{273}{973} = 0{,}72 = \dfrac{L}{|Q_c|} \rightarrow L = \eta\,|Q_c|$

Occorre esprimere Q_c (assorbito) in funzione di Q_f (ceduto):

$$\eta = \frac{L}{|Q_c|} = \frac{|Q_c| - |Q_f|}{|Q_c|} \rightarrow \eta\,|Q_c| = |Q_c| - |Q_f|$$

da cui:

$$|Q_c| = \frac{|Q_f|}{1-\eta}\,.$$

Indicando con Δt l'intervallo di tempo nel quale la macchina produce il lavoro L, per la potenza richiesta si ha:

$$W = \frac{L}{\Delta t} = \eta\,\frac{|Q_c|}{\Delta t} = \frac{\eta}{1-\eta}\left(\frac{|Q_f|}{\Delta t}\right)$$

$$\frac{Q_f}{\Delta t} = \left(5\,\frac{\text{g}}{\text{s}}\right)\cdot\left(80\,\frac{\text{cal}}{\text{g}}\right) = 400\,\frac{\text{cal}}{\text{s}}$$

$$W = 2{,}57 \cdot 400 \simeq 1028\,\frac{\text{cal}}{\text{s}} = 4{,}3\ kW$$

IV.3. $\eta = \dfrac{L}{|Q_{ASS}|}$; $|Q_{ASS}| = |Q_{AB}| + |Q_{DA}|$

$$L = (P_A - P_D)\cdot(V_B - V_A) = (2\ \text{atm})\cdot(3\ \text{l}) = 6\ \text{l}\cdot\text{atm}$$

$$|Q_{AB}| = n\,C_P\,(T_B - T_A) = \frac{C_P}{R}\,(P_B\,V_B - P_A\,V_A) =$$

$$= \frac{5}{2}\,(4\cdot 4 - 4\cdot 1) = 30\ \text{l}\cdot\text{atm}$$

$$|Q_{AB}| = n\,C_V(T_A - T_D) = \frac{C_V}{R}(P_A\,V_A - P_D\,V_D) =$$

$$= \frac{3}{2}(4 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 2\ \mathrm{l \cdot atm}$$

$$\eta = \frac{6}{30 + 2} = 0{,}188$$

IV.4. $$\eta = \frac{L}{|Q_{ASS}|} = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{|Q_{ASS}|}$$

$$|Q_{CED}| = |Q_{BC}| = |n\,C_V(T_C - T_B)| = n\,C_V(T_B - T_C)$$

$$|Q_{ASS}| = |Q_{AB}| = Q_{AB} = n\,R\,T_A \ln(V_B/V_B)$$

$$\eta = 1 - \frac{C_V(T_B - T_C)}{R \ln(V_B/V_A)} = 1 - \frac{C_V(1 - T_C/T_A)}{R \ln(V_B/V_A)}.$$

Esprimiamo il rapporto T_C/T_A in funzione di V_A e V_B:

$$T_C\,V_C^{\gamma-1} = T_A\,V_A^{\gamma-1} \rightarrow T_C\,V_B^{\gamma-1} = T_A\,V_A^{\gamma-1} \rightarrow T_C/T_A = (V_A/V_B)^{\gamma-1}$$

Dunque:

$$\eta = 1 - \frac{C_V[1 - (V_A/V_B)^{\gamma-1}]}{R \ln(V_B/V_A)} = 11 - \frac{5\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\gamma-1}\right]}{2 \ln 3} = 0{,}19$$

IV.5. La macchina che, lavorando con due sole sorgenti, ha il massimo rendimento, è la macchina reversibile di Carnot. Il suo rendimento è

$$\eta_R = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{273}{373} = 0{,}27.$$

Procedendo in modo analogo a quanto fatto nel problema IV.2. si ha:

$$L = \frac{\eta}{1 - \eta}|Q_f| \text{ con } |Q_f| = m\,\lambda = (20 \cdot 10^3\ \mathrm{g})\left(80\,\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{g}}\right) = 1{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{cal}$$

$$L = \frac{0{,}27}{1 - 0{,}27}\,1{,}6 \cdot 10^6 = 5{,}9 \cdot 10^5\ \mathrm{cal}$$

IV.6. a) Adiabatica BC: $Q_{BC} = 0$, $\Delta U = L_{BC} = U_C - U_B = n\,C_V(T_2 - T_1)$
Adiabatica DA: $Q_{DA} = 0$, $\Delta U = L_{DA} = U_A - U_D = n\,C_V(T_1 - T_2)$

$$L_{BC}/L_{DA} = \frac{n\,C_V(T_2 - T_1)}{n\,C_V(T_1 - T_2)} = -1$$

Si ottengono lavori uguali in modulo e di segno contrario perché le relative trasformazioni adiabatiche collegano le stesse isoterme (T_1 e T_2).

b) $\eta = 1 - \dfrac{|Q_{CED}|}{|Q_{ASS}|}$ con $|Q_{ASS}| = Q_{AB} = n\,R\,T_1 \ln (V_B/V_A)$

$$|Q_{CED}| = |Q_{CD}| = |n\,R\,T_2 \ln (V_D/V_C)| = n\,R\,T_2 \ln (V_C/V_D)$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2 \ln (V_C/V_D)}{T_1 \ln (V_B/V_A)}.$$

Osserviamo che, nel caso di ciclo reversibile, $V_B/V_A = V_C/V_D$ e quindi: $\eta = 1 - T_2/T_1$.

$$\eta = 1 - \frac{200 \ln (2{,}3)}{500 \ln 2} = 1 - \frac{166{,}6}{346{,}6} = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$$

c) $\eta_{REV} = 1 - \dfrac{T_2}{T_1} = 1 - \dfrac{200}{500} = 0{,}60$

IV.7. La quattro fasi del motore a scoppio sono rappresentate, in modo ideale, come segue: AB compressione rapida e sostanzialmente adiabatica; BC scoppio della miscela che immette in tempi brevissimi ($V =$ cost) il calore $Q_{BC} > 0$; CD espansione veloce adiabatica; DA crollo rapido di pressione, per l'apertura della valvola di scarico, a volume costante e con trasferimento di calore verso l'esterno ($Q_{DA} < 0$).

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{|Q_{ASS}|} = 1 - \frac{|Q_{DA}|}{|Q_{BC}|} = 1 - \frac{n\,C_V (T_D - T_A)}{n\,C_V (T_C - T_B)} = 1 - \frac{(T_D - T_A)}{(T_C - T_B)}$$

$$\left.\begin{aligned} T_C V_B^{\gamma-1} &= T_D V_A^{\gamma-1} \\ T_B V_B^{\gamma-1} &= T_A V_A^{\gamma-1} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(T_C - T_B)\, V_B^{\gamma-1} = (T_D - T_A)\, V_A^{\gamma-1} \text{ da cui:} \\ &\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1,4-1} = 0{,}44 \end{aligned}$$

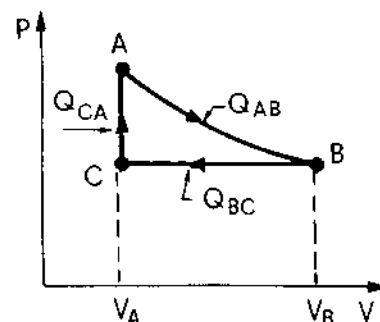
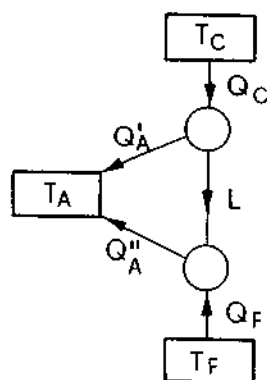
$$\eta = 1 - \frac{(T_D - T_A)}{(T_C - T_B)} = 1 - 0{,}44 = 0{,}56.$$

Il rendimento di un ciclo otto reale è, naturalmente, minore di quello calcolato nell'ipotesi di trasformazioni reversibili (quasi-statiche e senza attriti).

IV.8. La politropica AB ha la forma $p\,V^k =$ cost, con $k = 1/2$. Inoltre il rapporto di compressione $V_B/V_A = \alpha = 2$.
Per calcolare il rendimento

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{|Q_{ASS}|},$$

occorre determinare in valore assoluto e segno le quantità di calore scambiate nei tre rami del ciclo.

$$Q_{AB} = n\,C_k (T_B - T_A) = C_k \left(\frac{P_B V_B}{R} - \frac{P_A V_A}{R}\right) = \frac{C_k}{R} V_A (\alpha P_B - P_A).$$

Ma $P_A V_A^k = P_B V_B^k \rightarrow P_A = P_B \alpha^k$

$$Q_{AB} = \frac{C_k}{R} V_A P_B (\alpha - \alpha^k).$$

Q_{AB} è certamente positivo ($\alpha > 1$, $k < 1$) e quindi Q_{AB} è assorbito.

$Q_{BC} = n\, C_P(T_C - T_B) < 0$ (calore ceduto).

Il modulo di Q_{BC} vale:

$$|Q_{BC}| = n\, C_P(T_B - T_C) = n\, C_P\left(\frac{P_B V_B}{n R} - \frac{P_B V_A}{n R}\right) = \frac{C_P}{R} P_B V_A (\alpha - 1)$$

$Q_{CA} = n\, C_V(T_A - T_C) > 0$ (calore assorbito)

$$Q_{CA} = n\, C_V\left(\frac{P_A V_A}{n R} - \frac{P_B V_A}{n R}\right) = \frac{C_V}{R} V_A (P_B \alpha^k - P_B) = \frac{C_V}{R} P_B V_A (\alpha^k - 1).$$

Nel caso di gas monoatomico ($C_V = \frac{3}{2} R$, $C_P = \frac{5}{2} R$), $k = \frac{1}{2}$ ed $\alpha = 2$ si ha:

$$C_k = C_V + \frac{R}{1-k} = \frac{3}{2} R + \frac{R}{1 - 1/2} = \frac{3}{2} R + 2\, R = \frac{7}{2} R$$

$$|Q_{AB}| = Q_{AB} = \frac{C_k}{R} (\alpha - \alpha^k)\, P_B V_A = \frac{7}{2} \frac{R}{R} (2 - 2^{1/2})\, P_B V_A = 2{,}05\, P_B V_A$$

$$|Q_{CA}| = Q_{CA} = \frac{C_V}{R} (\alpha^k - 1)\, P_B V_A = \frac{3}{2} \frac{R}{R} (2^{1/2} - 1)\, P_B V_A = 0{,}62\, P_B V_A$$

$$|Q_{BC}| = \frac{C_P}{R} (\alpha - 1)\, P_B V_A = \frac{5}{2} \frac{R}{R} (2 - 1)\, P_B V_A = 2{,}5\, P_B V_A$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{|Q_{ASS}|} = 1 - \frac{|Q_{BC}|}{|Q_{AB}| + |Q_{CA}|} = 1 - \frac{2{,}5}{2{,}05 + 0{,}62} = 6{,}4\%$$

IV.9. Le due macchine di Carnot hanno rendimenti:

$$\eta\,(T_c, T_a) = 1 - \frac{T_a}{T_c} = 0{,}214$$

$$\eta\,(T_a, T_f) = 1 - \frac{T_f}{T_a} = 0{,}102$$

Il lavoro estratto dalla macchina motore è:

$$|L| = \eta\,(T_c, T_a)\,|Q_c|$$

Lo stesso lavoro, in modulo, si ritrova, per costruzione, nella macchina operante tra T_a e T_f:

$$|L| = \eta\,(T_a, T_f)\,|Q''_a|$$

La quantità Q''_a può essere espressa in funzione di $|Q_f|$ con la relazione già utilizzata

$$|Q''_a| = \frac{|Q_f|}{1 - \eta\,(T_a, T_f)} \, .$$

Si ottiene, in definitiva,

$$|L| = \eta\,(T_a, T_f) \cdot \frac{|Q_f|}{1 - \eta\,(T_a, T_f)} = \eta\,(T_c, T_a)\,|Q_c|$$

da cui:

$$|Q_c| = \frac{(T_a - T_f)\,T_c}{(T_c - T_a)\,T_f}\,|Q_f| = 53{,}2 \ \text{cal}$$

Il calcolo del calore complessivo scambiato dalla sorgente a temperatura ambiente T_a, può procedere come segue. Trattandosi di processi reversibili di un sistema isolato, la variazione complessiva di entropia è nulla:

$$\Delta S_{\text{univ}} = 0 = \Delta S_c + \Delta S_a + \Delta S_f + \Delta S_{\text{fluidi}}$$

$\Delta S_{\text{fluidi}} = 0$ perché i fluidi delle macchine compiono dei cicli. ΔS_c e ΔS_f, variazioni di entropia delle sorgenti calda e fredda, sono negative perché entrambe le sorgenti cedono calore. Dunque,

$$-\frac{|Q_c|}{T_c} - \frac{|Q_f|}{T_f} + \frac{|Q_a|}{T_a} = 0$$

da cui

$$|Q_a| = T_a \left(\frac{|Q_c|}{T_c} + \frac{|Q_f|}{T_f}\right) = 293 \left(\frac{53{,}2}{373} + \frac{100}{263}\right) = 153{,}2 \ \text{cal}$$

Si perviene allo stesso risultato calcolando, a partire dai rendimenti, separatamente $|Q'_a|$ e $|Q''_a|$ (positive perché ricevute dalla sorgente T_a).

IV.10. $$\Delta S = \underset{\text{(acqua)}}{\int_{303}^{273} \frac{\delta Q}{T}} + \underset{\substack{\text{acqua} \to \text{ghiaccio} \\ T_0 = 273\ \text{K}}}{\int \frac{\delta Q}{T}} + \underset{\text{(ghiaccio)}}{\int_{273}^{263} \frac{\delta Q}{T}} =$$

$$= \int_{303}^{273} \frac{m\,c_l\,dT}{T} + \frac{1}{T_0} \int \delta Q + \int_{273}^{263} \frac{m\,c_s\,dT}{T} =$$

$$= m\,c_l \ln \frac{273}{303} + \frac{m\,\lambda}{273} + m\,c_s \ln \frac{263}{273} =$$

$$= 0{,}1 \left[1 \cdot (-\,0{,}104) - \frac{80}{273} + 0{,}5\,(-\,0{,}037)\right] =$$

$$= 0{,}1\,[-\,0{,}104 - 0{,}293 - 0{,}019] = -\,0{,}042 \ \text{cal/K}.$$

IV.11. a) $$\Delta S_a = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m\,c\,dT}{T} = m\,c \ln \frac{T_2}{T_1} =$$

$$= 2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot \ln \frac{373}{283} = 552 \ \text{cal/K}$$

b) $$\Delta S_a = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{\delta Q}{T_2} = \frac{1}{T_2}\int \delta Q = \frac{Q}{T_2} =$$

$$= -\frac{m\,c\,(T_2 - T_1)}{T_2} = -\,483 \text{ cal/K}$$

(la sorgente cede calore, per cui $Q < 0$)

c) $\Delta S_{un} = \Delta S_a + \Delta S_s = 552 - 483 = 69$ cal/K .

IV.12. $\Delta S_{un} = \Delta S_m + \Delta S_{\text{Stagno}}$

$$\Delta S_m = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = m\,c \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 10^3 \cdot 1 \cdot \ln\left(\frac{293}{363}\right) = -\,214{,}2 \text{ cal/K}$$

$$\Delta S_{\text{Stagno}} = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{\delta Q}{T_2} = \frac{1}{T_2}\int \delta Q = \frac{Q}{T_2} =$$

$$= +\frac{m\,c\,(T_1 - T_2)}{T_2} = 238{,}9 \text{ cal/K}$$

Lo stagno acquista, a temperatura praticamente costante, la quantità di calore ceduta dall'acqua per passare da 90°C a 20°C.

$\Delta S_{\text{un}} = -\,214{,}2 + 238{,}9 = 24{,}7$ cal/K.

IV.13. Determiniamo le costanti A e B:

$$\begin{cases} C\,(373) = A + 373\,B = 6{,}1 \\ C\,(773) = A + 673\,B = 6{,}8 \end{cases}$$

$B = 2{,}33 \cdot 10^{-3}$ cal/mole °C^2
$A = 5{,}223$ cal/mole °C

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{n\,C(T)\,dT}{T} = n\int_{T_1}^{T_2} \frac{(A + B\,T)}{T}\,dT =$$

$$= n\int_{T_1}^{T_2} A\,\frac{dT}{T} + \quad n\int_{T_1}^{T_2} B\,dT = n\,[A \ln T + B\,T]_{423}^{623} =$$

$$= 10\left[5{,}23 \ln\left(\frac{623}{423}\right) + 2{,}33 \cdot 10^{-3}\,(623 - 423)\right] = 24{,}9 \text{ cal/K} .$$

IV.14. $$\eta = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{|Q_{ASS}|} = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_A| + |Q_B|} .$$

Poiché il ciclo è reversibile

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_A}{T_A} + \frac{Q_B}{T_B} + \frac{Q_C}{T_C} = 0$$

$$Q_C = -\,T_C\left(\frac{Q_A}{T_A} + \frac{Q_B}{T_B}\right) = -\,273\left(\frac{200}{500} + \frac{300}{373}\right) = -\,328 \text{ cal}$$

$$\eta = 1 - \frac{328}{200 + 300} = 34{,}4\% .$$

IV.15. Si trova che $\eta_R = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0{,}40$. Dunque la macchina è irreversibile. L'entropia dell'universo, costituito dal fluido della macchina e dalle sorgenti, dovrà crescere nel processo irreversibile.

$$\Delta S_{un} = \Delta S_{fluido} + \Delta S_c + \Delta S_f$$

$\Delta S_{fluido} = 0$ (il fluido compie dei cicli).
Per le sorgenti si ha:

$$\Delta S_c = -\frac{|Q_c|}{T_c};\ \Delta S_f = +\frac{|Q_f|}{T_f}$$

Calcolo di Q_c e Q_f:

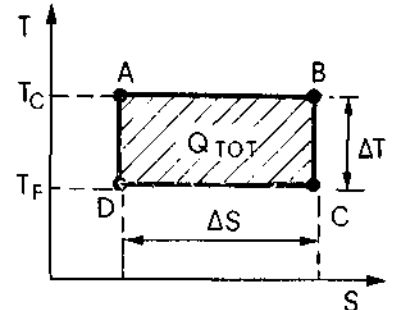
$$\eta = \frac{L}{|Q_c|} \rightarrow |Q_c| = \frac{L}{\eta} = \frac{100}{0{,}20} = 500\ J$$

$$L = |Q_c| - |Q_f| \rightarrow |Q_f| = |Q_c| - L = \left(\frac{1-\eta}{\eta}\right) L = \frac{1-0{,}2}{0{,}2} \cdot 100 = 400\ J$$

$$\Delta S_{un} = -\frac{500}{500} + \frac{400}{300} = +0{,}33\ J/K.$$

IV.16. $Q_{TOT} = |Q_{AB}| - |Q_{CD}| = \Delta T \cdot |\Delta S|$

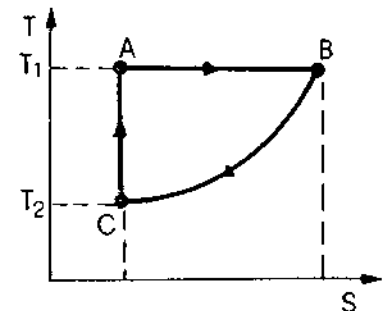
$$\Delta U = 0 \rightarrow Q_{TOT} = L$$

$$L = Q_{TOT} = (200\ K)\left(20\ \frac{cal}{K}\right) = 4000\ cal = 1{,}67 \cdot 10^4\ J$$

IV.17. a) AB: isoterma a temperatura $T = T_1$ (tratto orizzontale)

BC: $S = n\, C_V \ln T +$ cost (isocora reversibile, per cui la costante include il termine $n\, R \ln V$)

$$\ln T = \frac{S}{n\, C_V} + \text{cost}$$

$$T = a\, e^{S/nC_V}$$ (andamento esponenziale)

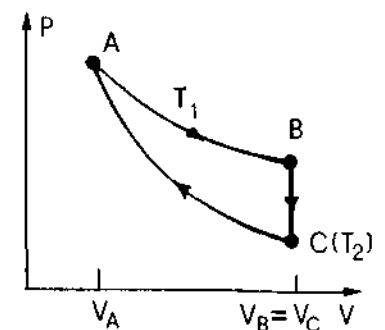
CA: adiabatica reversibile, isoentropica (tratto verticale).

b) Si tratta di un ciclo:

$$\Delta S_{CICLO} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0$$

$$\Delta S_{CA} = 0;\ \Delta S_{AB} = n\, R \ln (V_B/V_A) > 0$$

$$\Delta S_{BC} = n\, C_V \ln (T_2/T_1) < 0$$

$$\Delta S_{AB} = -\Delta S_{BC} = -n\, C_V \ln (T_2/T_1) = n\, C_V \ln (T_1/T_2) =$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{2} R \cdot \ln \frac{300}{200} \cong 3 \ln \frac{3}{2} = 1{,}22\ \text{cal/K}$$

Allo stesso risultato si arriva nel modo seguente:

$$\Delta S_{AB} = n\,R \ln (V_B/V_A)$$

$$T_1\,V_A^{\gamma-1} = T_2\,V_B^{\gamma-1}$$

$$V_B/V_A = (T_1/T_2)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\Delta S_{AB} = n\,R \ln (T_1/T_2)^{\frac{1}{\gamma-1}} = n\frac{R}{\gamma-1}\ln (T_1/T_2) =$$

$$= n\frac{R}{\dfrac{C_P}{C_V}-1}\ln (T_1/T_2) = \frac{n\,R\,C_V}{(C_P-C_V)}\ln (T_1/T_2) = n\,C_V \ln (T_1/T_2).$$

IV.18. a) $L = L_{AB} + L_{BC}$ $(L_{CA} = 0)$

$L_{AB} = -(U_B - U_A)$ (dal 1° principio $\Delta U = Q - L$ con $Q = 0$)

$$L_{AB} = n\,C_V (T_A - T_B) = n\,C_V\,T_B\left[\frac{T_A}{T_B} - 1\right] \text{ con } T_A\,V_A^{\gamma-1} = T_B\,T_B^{\gamma-1}$$

per cui:

$$L_{AB} = n\,C_V\,T_B\left[\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = 1\cdot\frac{3}{2}R\cdot 300\,(3^{0,67} - 1) = 981 \text{ cal}$$

$$L_{BC} = n\,R\,T_B \ln (V_C/V_B) = 1\cdot 2\cdot 300 \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -659 \text{ cal}$$

$$L = L_{AB} + L_{BC} = 981 - 659 = +322 \text{ cal}$$

b) $L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}$.

L_{AB} ed L_{BC} hanno gli stessi valori che nel caso a); invece il lavoro lungo la trasformazione CA non è nullo, pur restando il volume costante. Nella trasformazione irreversibile CA il calore scambiato è nullo e quindi $\Delta U = -L$:

$$L_{CA} = -(U_A - U_C) = -n\,C_V(T_A - T_C) = -n\,C_V(T_A - T_B).$$

È da osservare che L_{CA} è uguale in modulo e di segno contrario rispetto ad L_{AB}. In entrambi i casi si tratta di trasformazioni adiabatiche tra coppie di stati con uguali differenze di temperature, ai quali corrisponde, in modulo, la stessa variazione di energia interna. Dunque:

$$L = L_{BC} = n\,R \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = -659 \text{ cal}.$$

IV.19. $\Delta S_{un} = \Delta S\,(\text{acqua}) + \Delta S\,(\text{sorgenti})$

In tutti e tre i casi a), b) e c) l'acqua passa da 0°C a 100°C. Pertanto si avrà la stessa variazione di entropia:

$$\Delta S_{(a)}\,(\text{acqua}) = \Delta S_{(b)}\,(\text{acqua}) = \Delta S_{(c)}\,(\text{acqua}) =$$

$$= \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = m\,c \ln (T_f/T_i) = (10^3 \text{ g})\left(1\,\frac{\text{cal}}{\text{g K}}\right)\ln\frac{373}{273} = 312{,}1 \text{ cal/K}$$

a) $\Delta S_{(a)}$ (sorgente) $= -\dfrac{m\,c\,(T_f - T_i)}{T_f} = -\dfrac{10^3 \cdot 1 \cdot 100}{373} = -268{,}1$ cal/K

$\Delta S_{un}^{(a)} = 312{,}1 - 268{,}1 = 44{,}0$ cal/K

b) $\Delta S_{(b)}$ (sorgenti) $= \left(-\dfrac{m\,c\,(T_2 - T_i)}{T_2}\right) + \left(-\dfrac{m\,c\,(T_f - T_2)}{T_f}\right) =$

$$= -\frac{10^3 \cdot 1 \cdot 50}{323} - \frac{10^3 \cdot 1 \cdot 50}{373} = -288{,}9 \text{ cal/K}$$

$\Delta S_{un}^{(b)} = 312{,}1 - 288{,}9 = 23{,}2$ cal/K

c) $\Delta S_{(c)}$ (sorgente) $= \left(-\dfrac{m\,c\,(T_2 - T_i)}{T_2}\right) + \left(-\dfrac{m\,c\,(T_3 - T_2)}{T_3}\right) +$

$$+ \left(-\frac{m\,c\,(T_f - T_3)}{T_f}\right) = \left(-\frac{10^3 \cdot 1 \cdot 50}{323}\right) +$$

$$+ \left(-\frac{10^3 \cdot 1 \cdot 25}{348}\right) + \left(-\frac{10^3 \cdot 1 \cdot 25}{373}\right) = -293{,}6 \text{ cal/K}$$

$\Delta S_{un}^{(c)} = 312{,}1 - 293{,}6 = 18{,}5$ cal/K

Osservazione: constatiamo che al crescere del numero delle sorgenti intermedie la variazione dell'entropia dell'universo diminuisce. Ovvero, al diminuire della differenza di temperatura tra l'acqua e la sorgente con cui scambia calore, la variazione totale di entropia diminuisce.
Con una serie di infiniti scambi termici infinitesimi con infinite sorgenti con temperature diverse l'una dall'altra per un infinitesimo dT, e capaci di coprire con continuità l'intervallo da 0°C a 100°C, si troverebbe $\Delta S_{un} = 0$. Cioè per una trasformazione reversibile $\Delta S_{un} = 0$, come del resto sappiamo dalla disequazione di Clausius.

IV.20. a) L'integrale di Clausius, pari all'integrale $\displaystyle\int \frac{\delta Q}{T}$ da calcolarsi lungo la trasformazione reale effettivamente seguita dal sistema (in questo caso irreversibile), è nullo per sistemi isolati. In questo caso l'integrale di Clausius consta di tre contributi:

$$\int \frac{\delta Q\,(Cu)}{T} + \int \frac{\delta Q \text{ (sorgente)}}{T_S} + \int \frac{\delta Q \text{ (lago)}}{T_L} = 0\,.$$

Il primo addendo della somma è l'integrale di Clausius relativo al rame richiesto dal problema:

$$\int \frac{\delta Q\,(Cu)}{T} + \frac{Q_S}{T_S} + \frac{Q_L}{T_L} = 0\,.$$

Nel caso del problema la sorgente cede calore Q_S pari in modulo al calore che riceve il rame; il lago riceve una quantità di calore Q_L pari in modulo a quello che cede il rame. Poiché la temperatura del lago è uguale a quella iniziale del rame, si ha:

$$|Q_S| = m\,c\,(T_S - T_i) = |Q_L| = (0 \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ h}) \left(0{,}09 \frac{\text{cal}}{\text{g K}}\right) \cdot (80 \text{ K}) =$$

$$= 3600 \text{ cal}$$

Dunque:

$$\int \frac{\delta Q\,(Cu)}{T} - \frac{|Q_S|}{T_S} + \frac{|Q_L|}{T_L} = 0$$

$$\int \frac{\delta Q\,(Cu)}{T} = + \frac{|Q_S|}{T_S} - \frac{|Q_L|}{T_L} = + \frac{3600}{373} - \frac{3600}{293} =$$

$$= 9{,}65 - 12{,}29 = - \;\; 2{,}64 \text{ cal/K}.$$

È da osservare che, poiché il rame compie una trasformazione che lo riporta alla stessa temperatura che aveva all'inizio, la sua variazione di entropia è nulla. In questo caso la disequazione di Clausius $\Delta S \geq \int \frac{\delta Q}{T}$ diventa: $0 \geq -2{,}64$ cal/K.

b) $\Delta S_{\text{TOT}} = \Delta S_{Cu} + \Delta S_S + \Delta S_L = 0 + \frac{Q_S}{T_S} + \frac{Q_L}{T_L} =$

$$= - \frac{|Q_S|}{T_S} + \frac{|Q_L|}{T_L} = - \frac{3600}{373} + \frac{3600}{293} = + 2{,}64 \text{ cal/K}.$$

IV.21. $dL = dP \cdot (V_G - V_L)$ area del ciclo nel piano (P, V)

$dL = \eta |Q_{ASS}|$; $\qquad\qquad Q_{ASS} = m\,\lambda_{ev}$

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{T - dT}{T} = \frac{dT}{T}$$

$$dL = \frac{dT}{T} \cdot m\,\lambda_{ev} = dP\,(V_G - V_L)$$

$$dP = dT \frac{m\,\lambda_{ev}}{T\,(V_G - V_L)}$$

ovvero

$$\frac{dP}{dT} = \frac{m\,\lambda_{ev}}{T\,(V_G - V_L)}$$ (equazione di Clausius-Clapeyron. Vedi Cap. V).

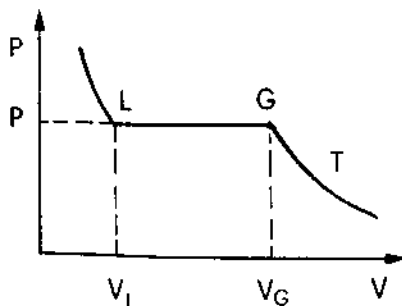
Capitolo quinto

V.1. $\Delta H = \Delta U + P\,\Delta V$

$\Delta U = Q - L = Q - P\,\Delta V$

$$\Delta H = Q - P\,\Delta V + P\,\Delta V = Q = m\,\lambda_{ev} = 18 \text{ g} \cdot 540 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 9{,}72 \cdot 10^3 \text{ cal}$$

$\Delta U = Q - P\,\Delta V = Q - P\,(V_g - V_l) \simeq Q - P\,V_g$ (essendo $V_g >> V_l$)

$P\,V_g \simeq R\,T$ (come se il vapore fosse un gas perfetto)

$$\Delta U = Q - R\,T = 9{,}772 \cdot 10^{-3}\,\text{cal} - 1{,}98\,\frac{\text{cal}}{\text{K}} \cdot 363\ \text{K} =$$

$$= (9{,}72 - 0{,}72)\,10^{3}\,\text{cal} \simeq 9 \cdot 10^{3}\,\text{cal}$$

V.2. Per un gas perfetto si ha

$$dH = dU + P\,dV + V\,dP = n\,C_V\,dT + n\,R\,dT = n\,C_P\,dT\,.$$

Per 2 n moli di gas perfetto che passano dalla temperatura T_i alla temperatura T_f si ha:

$$\Delta H = 2\,n\,C_P(T_f - T_i) = 20{,}5\ \text{moli} \cdot \frac{5}{2} \cdot 1{,}98\,\frac{\text{cal}}{\text{mole K}} \cdot (320 - 280)\ \text{K} =$$

$$\simeq 200\ \text{cal}\,.$$

V.3. Per un gas perfetto

$$\Delta H = n\,C_P\,\Delta T = n\,C_P(T_f - T_i) = n\,C_P\left(\frac{P_f\,V}{n\,R} - \frac{P_i\,V}{n\,R}\right) = \frac{C_P}{R}\,V\,\Delta P$$

$$\Delta H = \frac{5}{2} \cdot \frac{R}{R} \cdot 10\ l \cdot 4\ \text{atm} = 100\ l \cdot \text{atm}\,.$$

V.4. Ricordando la [V.40] $\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P$ si ha:

$$-P = b\,T\,\frac{V\,T^2}{c}\,\frac{c}{T^2}\left(-\frac{1}{V^2}\right) = -\frac{b\,T}{V} \rightarrow P\,V = b\,T$$

L'equazione trovata indica che il fluido si comporta come un gas perfetto.

V.5. $S = S(V, T) \rightarrow dS = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$ (essendo $T = \text{cost}$).

$$\Delta S = \int dS = \int_i^f \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$$

L'equazione di Maxwell [V.41] $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ permette di scrivere

$$\Delta S = \int_i^f \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV$$

Usando l'equazione di Van der Waals troviamo, per una mole

$$P = \frac{R\,T}{V - b} - \frac{a}{V^2}\ ; \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V - b}$$

e dunque

$$\Delta S = \int_i^f \frac{R}{(V - b)} \, dV = R \ln \left(\frac{V_f - b}{V_i - b} \right)$$

ed essendo l'entropia additiva per n moli abbiamo

$$\Delta S = n \, R \ln \frac{(V_f - b)}{(V_i - b)}$$

V.6. $$\Delta S = \int_P^{P+\Delta P} \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP$$

Dalle derivate parziali della funzione di Gibbs si ha

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_P = -S \, ; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_T = V$$

da cui si ricava l'equazione di Maxwell utile in questo caso

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

Perciò:

$$\Delta S = \int_P^{P+\Delta P} \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP = - \int_P^{P+\Delta P} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP \simeq (-\Delta P) \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P .$$

V.7. $$H = U + p \, V = U + n \, R \, T$$

$$dH = dU + n \, R \, dT = n \, C_V \, dT + n \, R \, dT = n \, C_P \, dT$$

$$\Delta H = n \, C_P \, (T_f - T_i) = n \, C_P \left(\frac{P_f \, V_f}{n \, R} - \frac{P_i \, V_i}{n \, R} \right) = \frac{C_P}{R} \, (P_f \, V_f - P_i \, V_i)$$

La pressione finale P_f si trova tenendo conto che si tratta di una adiabatica reversibile

$$P_f = P_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma}$$

$$\Delta H = \frac{C_P}{R} \left(P_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma} V_f - P_i \, V_i \right) = \frac{C_P}{R} \, P_i \, V_i \left[\left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right] =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 3 \text{ atm} \cdot 2 \, l \left[\left(\frac{2}{4} \right)^{0,67} - 1 \right] = -5{,}577 \, l \cdot \text{atm} .$$

V.8. $$F = U - T \, S$$

$$G = U - T \, S + P \, V$$

$dF = dU - T \, dS - S \, dT$. Per un gas perfetto e $T = \text{cost}$

$(dT = 0;\ dU = 0):\ dF = -T\,dS$

$dG = dU - T\,dS - S\,dT + d(PV)$. Per un gas perfetto e $T = \text{cost}$

$(dT = 0;\ dU = 0;\ d(PV) = d(nRT) = 0)$:

$dG = -T\,dS = dF$

$\Delta G = \Delta F = 200\ \text{cal}$.

V.9. Per una isoterma di gas perfetto si ha (vedi soluzione esercizio V.8):

$dG = -T\,dS$

Essendo la trasformazione reversibile:

$$dS = \frac{\delta Q}{T};\quad T\,dS = \delta Q$$

da cui $dG = -\delta Q$

$\Delta G = -Q = -100\ \text{cal}$.

V.10. Dall'equazione di Clapeyron [V.55]:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\lambda_{\text{fus}}}{T(\bar{V}_l - \bar{V}_s)} = -134\ \text{atm/K}$$

$\Big($abbiamo usato $\lambda_{\text{fus}} = 80\ \text{cal/g}$; $T = 273\ \text{K}$; $\bar{V}_l = 1{,}000\ \dfrac{\text{cm}^3}{\text{g}}$;

$\bar{V}_s = 1{,}091\ \dfrac{\text{cm}^3}{\text{g}}\Big)$. Si ha dunque:

$$dT = \frac{-dP}{134\ \dfrac{\text{atm}}{\text{K}}}$$

La variazione di pressione dP è esercitata dalle gambe del treppiede, e vale $dP = \dfrac{Mg}{3S}$ dove $S = \pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$ è la sezione di ogni gamba di diametro d. Si ha $dP = 213\ \text{atm}$, e dunque $dT = \dfrac{213\ \text{atm}}{-134\ \text{atm}}\ \text{K} \simeq -1{,}6\ \text{K}$.

Parte terza

Richiami di matematica

Richiami di matematica

1. Formule ed approssimazioni

1.1. *Equazioni algebriche*

Equazioni algebriche di secondo grado:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

1.2. *Potenza del binomio*

Per n intero positivo si ha:

$$(x+y)^n = x^n + n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} x^{n-3} y^3 + \ldots + n x y^{n-1} + y^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

con i coefficienti binomiali

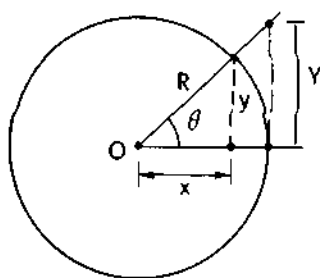
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!}$$

In particolare, nel caso in cui uno dei due addendi del binomio sia l'unità, si ha:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \ldots + x^n .$$

1.3. *Successioni geometriche*

Data una successione del tipo α, αr, αr^2, αr^3, ..., la somma dei primi $(N+1)$ termini per $r \neq 1$ vale:

$$\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \ldots + \alpha r^N = \alpha \sum_{k=0}^{N} r^k = \alpha \left(\frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}\right).$$

2. **Funzioni trigonometriche**

$$y = R \operatorname{sen}\theta \qquad \mathit{cotg}\,\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$

$$x = R\cos\theta$$

$$Y = R \operatorname{tg}\theta \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$y = x \operatorname{tg}\theta$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

2.1. *Relazioni trigonometriche*

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \operatorname{sen}\theta = (1 - \cos^2\theta)^{1/2}$$

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}(\beta-\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\mathrm{tg}\,(2\theta) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\theta}{1 - \mathrm{tg}^2\theta}$$

$$\mathrm{sen}\,x = \frac{1}{2i}\,(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\,(e^{ix} + e^{-ix})$$

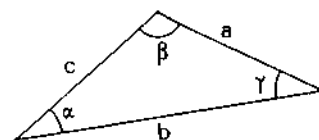
$$e^{ix} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x$$

$$e^{y+ix} = e^{y}\,(\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x)$$

2.2. *Relazioni per triangoli*

Per un triangolo qualsiasi valgono le relazioni:

$$\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\mathrm{sen}\,\beta}{b} = \frac{\mathrm{sen}\,\gamma}{c} \quad \text{(legge dei seni)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{(relazione di Carnot)}$$

2.3. *Alcuni valori delle funzioni trigonometriche*

Ricordando la relazione tra gradi e radianti $\theta(\mathrm{rad}):\theta(\mathrm{gradi}) = 2\pi:360°$

$$\theta(\mathrm{rad}) = \frac{\pi}{180}\,\theta(\mathrm{gradi})$$

riportiamo alcuni valori delle funzioni trigonometriche:

GRADI	RAD	SENO	TANGENTE	COSENO
0	0	0	0	1,0000
10	0,1745	0,1736	0,1763	0,9848
20	0,3491	0,3420	0,3640	0,9397
30	0,5236	0,5000	0,5774	0,8660
40	0,6981	0,6428	0,8391	0,7660
45	0,7854	0,7071	1,0000	0,7071
50	0,8727	0,7660	1,1918	0,6428
60	1,0472	0,8660	1,7321	0,5000
70	1,2217	0,9397	2,7475	0,3420
80	1,3963	0,9848	5,6713	0,1736
90	1,5708	1,0000	∞	0

3. Derivata delle funzioni più comuni

Nella tabella che segue raccogliamo le derivate $f'(x)$ di alcune fra le più semplici funzioni $f(x)$

$f(x)$	$f'(x) = \frac{df}{dx}$
$y = x^\alpha$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$ α reale qualunque; in particolare:
$y = x^n$	$y' = n x^{n-1}$ n intero qualunque
$y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n} x^{1/n-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ n intero > 0
$y = x^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$y' = -\frac{1}{n} x^{-1/n-1} = -\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n+1}}}$ n intero > 0
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$ $x > 0$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{artg} x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$
$y = \operatorname{arcotg} x$	$y' = \frac{-1}{1 + x^2}$
$y = [f(x)]^n$	$y' = n [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = [f(x)]^{\varphi(x)}$	$y' = [f(x)]^{\varphi(x)} \left[\frac{\varphi(x) \cdot f'(x)}{f(x)} + \varphi'(x) \ln f(x)\right]$ da cui:
$y = x^x$	$y' = x^x (1 + \ln x)$

4. Serie

Esiste una vasta classe di funzioni, dette *analitiche*, per le quali si verifica la seguente proprietà: se $y = f(x)$ è una tale funzione (che è anche dotata delle derivate di qualsiasi ordine), x_0 un punto dell'intervallo di definizione e Δx un incremento opportuno, vale *la serie di Taylor*:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} \cdot (\Delta x)^n$$

Diamo alcuni esempi di sviluppo in serie di Taylor con $x_0 = 0$, $\Delta x = x$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = 2{,}7182\ldots$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots \qquad (0 < x \leq 2)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \text{ in radianti})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \text{ in radianti})$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \ldots \qquad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{(x \ln a)}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \ldots$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

5. Integrali

5.1. *Integrali indefiniti*

Ricordiamo che l'integrale indefinito (o primitiva) $F(x)$ di una funzione continua $f(x)$:

$$F(x) = \int f(x)\, dx + c \qquad (\text{con } c \text{ costante arbitraria})$$

è definito come la funzione che soddisfa l'equazione

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \qquad \text{ovvero} \qquad dF = f(x)\, dx$$

In base a questa definizione, dalla tabella delle derivate presentate in A.3, è possibile ricavare degli integrali immediati.

5.2. *Integrali per sostituzione*

Se $F(y)$ è primitiva di $f(y)$, cioè se

$$F(y) = \int f(y)\, dy$$

allora, operando la sostituzione $y \to y(x)$, si ha

$$F[y(x)] = \int f[y(x)]\, y'(x)\, dx$$

dal momento che

$$dy = d\,[(y(x)] = \frac{dy}{dx}\, dx = y'\, dx\,.$$

La precedente relazione fornisce un metodo immediato per trovare la primitiva della funzione

$$g(x) = f[y(x)] \cdot y'(x)$$

se è nota la primitiva $F(y)$ della funzione $f(y)$.

Ad esempio, consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos x dx\,.$$

Ponendo $y(x) = \operatorname{sen} x$ si ha $y'(x) = \cos x$ e l'integrale considerato si può scrivere nella forma:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos x\, dx = \int y^n y'\, dx = \int y^n\, dy\,,$$

che è risolto dalla funzione

$$F(y) = \frac{1}{(n+1)}\, y^{(n+1)} = \frac{1}{n+1} \operatorname{sen}^{(n+1)} x\,.$$

Come altro esempio, consideriamo l'integrale

$$\int \operatorname{tg} x\, dx\,.$$

Operando la sostituzione $y = \cos x$ si ha $y'(x) = -\operatorname{sen} x$ e l'integrale considerato si può scrivere nella forma:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = \int -\frac{dy}{y} = -\ln y = -\ln|\cos x|\,.$$

5.3. *Integrali per parti*

Questa tecnica di integrazione si basa sulla seguente formula:

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = \int f\, dg = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx\,,$$

in cui il fattore $f(x)$ si dice fattore finito e la quantità $g'(x)\, dx$ fattore differenziale. Nella pratica questa tecnica si basa sulla capacità di individuare, in un'espressione

integranda, un fattore finito ed uno differenziale, in modo tale da ricondursi ad integrali noti.

Per esempio, calcoliamo l'integrale:

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

in cui $\ln x$ può essere considerato fattore finito e $x^2 dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right)$ fattore differenziale. Integrando per parti si ha:

$$\int x^2 \ln x \, dx = \int \ln x \, d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} d(\ln x) =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3}\right).$$

Come altro esempio, consideriamo l'integrale

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx ,$$

in cui x può essere considerato fattore finito e $\operatorname{sen} x \, dx = - d(\cos x)$ fattore differenziale. Integrando per parti si ha:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = - \int x \, d(\cos x) = - x \cos x - \int - \cos x \, dx = - x \cos x + \operatorname{sen} x .$$

5.4. *Tabella di integrali indefiniti*

Funzione presente nell'integrando	Integrali indefiniti
x^n	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad [n \neq -1]$
	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$
	$\int \frac{dx}{x^n} = - \frac{1}{(n-1) \, x^{n-1}} \qquad [n \neq 1]$
	$\int x^{p/2} \, dx = \frac{2}{p+2} \, x^{(p+2)/2}$
$A = \alpha + \beta x$	$\int A^n \, dx = \frac{1}{\beta} \int A^n \, dA = \frac{A^{n+1}}{\beta(n+1)} \qquad [n \neq -1]$
	$\int \frac{dx}{A^n} = - \frac{1}{(n-1) \, \beta \, A^{n-1}} \qquad [n \neq 1]$
	$\int \frac{dx}{A} = \frac{1}{\beta} \ln\lvert A\rvert$

Funzione presente nell'integrando	Integrali indefiniti
	$\int \frac{x\,dx}{A^n} = \frac{1}{\beta^2}\left[-\frac{1}{(n-2)\,A^{n-2}} + \frac{\alpha}{(n-1)\,A^{n-1}}\right]$
	$\int \frac{x\,dx}{A} = \frac{1}{\beta^2}\,[A - \alpha \ln\|A\|]$
	$\int \frac{x^2\,dx}{A^n} = \frac{1}{\beta^3}\left[-\frac{1}{(n-3)\,A^{n-3}} + \frac{2\alpha}{(n-2)\,A^{n-2}} - \frac{\alpha^2}{(n-1)\,A^{n-1}}\right]$
	$\int \frac{x^2\,dx}{A} = \frac{1}{\beta^3}\left[\frac{A^2}{2} - 2\alpha A + \alpha^2 \ln\|A\|\right]$
	$\int \frac{x^3\,dx}{A^n} = \frac{1}{\beta^4}\left[-\frac{1}{(n-4)\,A^{n-4}} + \frac{3a}{(n-3)\,A^{n-3}} - \frac{3\alpha^2}{(n-2)\,A^{n-2}} + \frac{\alpha^3}{(n-1)\,A^{n-1}}\right]$
	$\int \frac{x^3\,dx}{A} = \frac{1}{\beta^4}\left[\frac{A^3}{3} - \frac{3\alpha A^2}{2} + 3\alpha^2 A - \alpha^3 \ln\|A\|\right]$
	$\int \frac{dx}{xA} = -\frac{1}{\alpha} \ln\left\|\frac{A}{x}\right\|$
	$\int \frac{dx}{xA^2} = -\frac{1}{\alpha^2}\left[\ln\left\|\frac{A}{x}\right\| + \frac{\beta x}{A}\right]$
	$\int \frac{dx}{xA^3} = -\frac{1}{\alpha^3}\left[\ln\left\|\frac{A}{x}\right\| + \frac{2\beta x}{A} - \frac{\beta^2 x^2}{2A^2}\right]$
	$\int \frac{dx}{x^2 A} = -\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{A}{x} - \beta \ln\left\|\frac{A}{x}\right\|\right]$
	$\int \frac{dx}{x^2 A^2} = -\frac{1}{\alpha^3}\left[\frac{A}{x} - 2\beta \ln\left\|\frac{A}{x}\right\| - \frac{\beta^2 x}{A}\right]$
	$\int \frac{dx}{x^2 A^3} = -\frac{1}{\alpha^4}\left[\frac{A}{x} - 3\beta \ln\left\|\frac{A}{x}\right\| - \frac{3\beta^2 x}{A} + \frac{\beta^3 x^2}{2A^2}\right]$
Binomi del tipo $(a+x)$, $(b+x)$	$\int \frac{(a+x)}{(b+x)}\,dx = x + (a-b)\ln\|b+x\|$
	$\int \frac{dx}{(a+x)(b+x)} = \frac{1}{(a-b)} \ln\left\|\frac{b+x}{a+x}\right\| \quad [a \neq b]$
	$\int \frac{x\,dx}{(a+x)(b+x)} = \frac{1}{(a-b)}\,[a\ln\|a+x\| - b\ln\|b+x\|]$

Funzione presente nell'integrando	Integrali indefiniti
	$\int \frac{dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{1}{(b-a)(b+x)} + \frac{1}{(b-a)^2} \ln \left\lvert \frac{a+x}{b+x} \right\rvert$
	$\int \frac{dx}{(a+x)^2(c+x)^2} = -\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x}\right) + \frac{2}{(a-b)^3} \ln \left\lvert \frac{a+x}{b+x} \right\rvert$
$A = \alpha^2 + x^2$	$\int \frac{dx}{A} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{artg} \frac{x}{\alpha}$
	$\int \frac{dx}{A^2} = \frac{x}{2\alpha^2 A} + \frac{1}{2\alpha^3} \operatorname{artg} \frac{x}{\alpha}$
	$\int \frac{dx}{A^3} = \frac{x}{4\alpha^2 A^2} + \frac{3x}{8\alpha^4 A} + \frac{3}{8\alpha^5} \operatorname{artg} \frac{x}{\alpha}$
	$\int \frac{x\,dx}{A} = \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + x^2)$
	$\int \frac{x\,dx}{A^2} = -\frac{1}{2A}$
	$\int \frac{x\,dx}{A^3} = -\frac{1}{4A^2}$
	$\int \frac{x^2\,dx}{A} = x - \alpha \operatorname{artg} \frac{x}{\alpha}$
	$\int \frac{x^2\,dx}{A^2} = -\frac{x}{2A} + \frac{1}{2\alpha} \operatorname{artg} \frac{x}{\alpha}$
	$\int \frac{x^3\,dx}{A} = \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} \ln A$
	$\int \frac{x^3\,dx}{A^2} = \frac{\alpha^2}{2A} + \frac{1}{2} \ln A$
	$\int \frac{dx}{xA} = \frac{1}{2\alpha^2} \ln\left(\frac{x^2}{\alpha^2 + x^2}\right)$
	$\int \frac{dx}{xA^2} = \frac{1}{2\alpha^2 A} + \frac{1}{2\alpha^4} \ln \frac{x^2}{A}$

Funzione presente nell'integrando	Integrali indefiniti
	$\int \frac{dx}{x^2 A} = -\frac{1}{\alpha^2 x} - \frac{1}{\alpha^3} \operatorname{artg} \frac{x}{\alpha}$
	$\int \frac{dx}{x^2 A^2} = -\frac{1}{\alpha^4 x} - \frac{x}{2\alpha^4 A} - \frac{3}{2\alpha^5} \operatorname{artg} \frac{x}{\alpha}$
$A = \alpha^2 - x^2$	$\int \frac{dx}{A} = \frac{1}{2\alpha} \ln \left\| \frac{\alpha + x}{\alpha - x} \right\|$
	$\int \frac{dx}{A^2} = \frac{x}{2\alpha^2 A} + \frac{1}{4\alpha^3} \ln \left\| \frac{\alpha + x}{\alpha - x} \right\|$
	$\int \frac{dx}{A^3} = \frac{x}{4\alpha^2 A^2} + \frac{3x}{8\alpha^4 A} + \frac{3}{16\alpha^5} \ln \left\| \frac{\alpha + x}{\alpha - x} \right\|$
	$\int \frac{x\,dx}{A} = -\frac{1}{2} \ln \|\alpha^2 - x^2\|$
	$\int \frac{x\,dx}{A^2} = \frac{1}{2A}$
	$\int \frac{x\,dx}{A^3} = \frac{1}{4A^2}$
	$\int \frac{x^2\,dx}{A} = -x + \frac{\alpha}{2} \ln \left\| \frac{\alpha + x}{\alpha - x} \right\|$
	$\int \frac{x^2\,dx}{A^2} = \frac{x}{2A} - \frac{1}{4\alpha} \ln \left\| \frac{\alpha + x}{\alpha - x} \right\|$
	$\int \frac{x^3\,dx}{A} = -\frac{x^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} \ln \|A\|$
	$\int \frac{x^3\,dx}{A^2} = \frac{\alpha^2}{2A} + \frac{1}{2} \ln \|A\|$
	$\int \frac{dx}{xA} = \frac{1}{2\alpha^2} \ln \left\| \frac{x^2}{\alpha^2 - x^2} \right\|$
	$\int \frac{dx}{xA^2} = \frac{1}{2\alpha^2 A} + \frac{1}{2\alpha^4} \ln \left\| \frac{x^2}{A} \right\|$
	$\int \frac{dx}{x^2 A} = -\frac{1}{\alpha^2 x} + \frac{1}{2\alpha^3} \ln \left\| \frac{\alpha + x}{\alpha - x} \right\|$
	$\int \frac{dx}{x^2 A^2} = -\frac{1}{\alpha^4 x} + \frac{x}{2\alpha^4 A} + \frac{3}{4\alpha^5} \ln \left\| \frac{\alpha + x}{\alpha - x} \right\|$

Funzione presente nell'integrando	Integrali indefiniti
$A = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$	$\int \frac{dx}{A} = \frac{2}{(4\alpha\gamma - \beta^2)^{1/2}} \operatorname{artg} \frac{2\alpha x + \beta}{(4\alpha\gamma - \beta^2)^{1/2}} \quad [4\alpha\gamma > \beta^2]$
	$= \frac{1}{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}} \ln \left\| \frac{2\alpha x + \beta - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}}{2\alpha x + \beta + (\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}} \right\| \quad [\beta^2 > 4\alpha\gamma]$
	$= -\frac{2}{2\alpha x + \beta} \quad [\beta^2 = 4\alpha\gamma]$
	$\int \frac{dx}{A^2} = \frac{2\alpha x + \beta}{(4\alpha\gamma - \beta^2)A} + \frac{2\alpha}{4\alpha\gamma - \beta^2} \int \frac{dx}{A}$
	$\int \frac{x\,dx}{A} = \frac{1}{2\alpha} \ln\|A\| - \frac{\beta}{2\alpha} \int \frac{dx}{A}$
	$\int \frac{x\,dx}{A^2} = -\frac{\beta x + 2\gamma}{(4\alpha\gamma - \beta^2)A} - \frac{\beta}{4\alpha\gamma - \beta^2} \int \frac{dx}{A}$
	$\int \frac{dx}{xA} = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{x^2}{A} - \frac{\beta}{2\gamma} \int \frac{dx}{A}$
$r = \sqrt{a^2 + x^2}$	$\int \frac{dx}{r^3} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{r}$
	$\int \frac{dx}{r^5} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{x}{r} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{r^3} \right]$
	$\int \frac{x\,dx}{r} = r$
	$\int \frac{x\,dx}{r^3} = -\frac{1}{r}$
	$\int \frac{x^2\,dx}{r} = \frac{xr}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + r)$
	$\int \frac{x^3\,dx}{r} = \frac{r^3}{3} - a^2 r$
	$\int \frac{dx}{xr} = -\frac{1}{a} \ln \left\| \frac{a + r}{x} \right\| = -\frac{1}{2a} \ln \left(\frac{r + a}{r - a} \right) \quad a > 0,\ r > 0$
	$\int \frac{dx}{xr^3} = \frac{1}{a^2 r} - \frac{1}{a^3} \ln \left\| \frac{a + r}{x} \right\|$
	$\int r\,dx = \frac{xr}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + r)$

Funzione presente nell'integrando	Integrali indefiniti
	$\int r^3 dx = \frac{1}{4} x r^3 + \frac{3}{8} a^2 x r + \frac{3}{8} a^4 \ln(x+r)$
	$\int x r dx = \frac{r^3}{3}$
	$\int x r^3 dx = \frac{r^5}{5}$
	$\int \frac{r dx}{x} = r - a \ln \left\| \frac{a+r}{x} \right\|$
	$\int \frac{r^3 dx}{x} = \frac{r^3}{3} + a^2 r - a^3 \ln \left\| \frac{a+r}{x} \right\|$
	$\int \frac{r dx}{x^2} = -\frac{r}{x} + \ln(x+r)$
$p = \sqrt{x^2 - a^2}$ $a > 0$	$\int \frac{dx}{p} = \ln\|x+p\| \qquad [x^2 > a^2]$
	$\int \frac{dx}{p^3} = -\frac{1}{a^2} \frac{x}{p}$
	$\int \frac{x dx}{p} = p$
	$\int \frac{x dx}{p^3} = -\frac{1}{p}$
	$\int \frac{x^2 dx}{p} = \frac{xp}{2} + \frac{a^2}{2} \ln\|x+p\|$
	$\int \frac{dx}{xp} = \frac{1}{a} \arccos \left\| \frac{a}{x} \right\| \qquad [x^2 > a^2]$
	$\int \frac{dx}{xp^3} = -\frac{1}{a^2 p} - \frac{1}{a^3} \arccos \left\| \frac{a}{x} \right\|$
	$\int p dx = \frac{xp}{2} - \frac{a^2}{2} \ln\|x+p\|$
	$\int p^3 dx = \frac{1}{4} x p^3 - \frac{3}{8} a^2 x p + \frac{3}{8} a^4 \ln\|x+p\|$
	$\int x p dx = \frac{p^3}{3}$
	$\int x p^3 dx = \frac{p^5}{5}$

Funzione presente nell'integrando	Integrali indefiniti
	$\int \frac{p\,dx}{x} = p - a \arccos \left\| \frac{a}{x} \right\|$
	$\int \frac{p^3\,dx}{x} = \frac{p^3}{3} - a^2 p + a^3 \arccos \left\| \frac{a}{x} \right\|$
	$\int \frac{p\,dx}{x^2} = -\frac{p}{x} + \ln\|x + p\|$
$m = \sqrt{a^2 - x^2}$ $a > 0$	$\int \frac{dx}{m} = \text{arsen} \frac{x}{a}$ $[x^2 < a^2]$
	$\int \frac{dx}{m^3} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{m}$
	$\int \frac{x\,dx}{m} = -m$
	$\int \frac{x\,dx}{m^3} = \frac{1}{m}$
	$\int \frac{x^2\,dx}{m} = -\frac{xm}{2} + \frac{a^2}{2} \text{arsen} \frac{x}{a}$
	$\int \frac{dx}{xm} = -\frac{1}{a} \ln \left\| \frac{a+m}{x} \right\|$ $[x^2 < a^2]$
	$\int \frac{dx}{x^2 m} = -\frac{m}{a^2 x}$
	$\int m\,dx = \frac{xm}{2} + \frac{a^2}{2} \text{arsen} \frac{x}{a}$
	$\int m^3\,dx = \frac{xm^3}{4} + \frac{3}{8} a^2 xm + \frac{3}{8} a^4 \text{arsen} \frac{x}{a}$
	$\int xm\,dx = -\frac{m^3}{3}$
	$\int xm^3\,dx = -\frac{m^5}{5}$
	$\int x^2 m\,dx = -\frac{xm^3}{4} + \frac{a^2 xm}{8} + \frac{a^4}{8} \text{arsen} \frac{x}{a}$
	$\int \frac{m\,dx}{x} = m - a \ln \left\| \frac{a+m}{x} \right\|$

Funzione presente nell'integrando	Integrali indefiniti
	$\int \frac{m^3\,dx}{x} = \frac{m^3}{3} + a^2 m - a^3 \ln \left| \frac{a+m}{x} \right|$
	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$
	$\int \operatorname{sen} \frac{x}{a}\,dx = -a \cos \frac{x}{a}$
	$\int x \operatorname{sen} x\,dx = \operatorname{sen} x - x \cos x$
	$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = 2x \operatorname{sen} x - (x^2 - 2)\cos x$
	$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$
	$\int x \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}$
	$\int x^2 \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\right)\operatorname{sen} 2x - \frac{x \cos 2x}{4}$
	$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$
	$\int x \operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{x \cos 3x}{12} - \frac{\operatorname{sen} 3x}{36} - \frac{3}{4} x \cos x + \frac{3}{4} \operatorname{sen} x$
	$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$
	$\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$
	$\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1 + \operatorname{sen} x} = x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$
	$\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1 - \operatorname{sen} x} = -x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$
$\cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
	$\int \cos \frac{x}{a}\,dx = a \operatorname{sen} \frac{x}{a}$
	$\int x \cos x\,dx = \cos x + x \operatorname{sen} x$

Funzione presente nell'integrando	Integrali indefiniti
	$\int x^2 \cos x\, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \operatorname{sen} x$
	$\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$
	$\int x \cos^2 x\, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8}$
	$\int x^2 \cos^2 x\, dx = \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\right) \operatorname{sen} 2x + \frac{x \cos 2x}{4}$
	$\int \cos^3 x\, dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}$
	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
	$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
	$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$
	$\int \frac{\cos x\, dx}{1 + \cos x} = x - \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
	$\int \frac{\cos x\, dx}{1 - \cos x} = - x - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$
$\operatorname{sen} x$ e $\cos x$	$\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$
	$\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx = - \frac{\cos^3 x}{3}$
	$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{3}$
	$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right)$
	$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \ln \lvert \operatorname{tg} x \rvert$
	$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln \left\lvert \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\rvert$

Funzione presente nell'integrando	Integrali indefiniti
	$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \ln \left\lvert \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right\rvert$
	$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = -2 \operatorname{ctg} 2x$
	$\int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{\cos x} = -\ln \lvert \cos x \rvert$
	$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \, dx}{\cos x} = -\operatorname{sen} x + \ln \left\lvert \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right\rvert$
	$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \, dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x - x$
	$\int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen} x} = \ln \lvert \operatorname{sen} x \rvert$
	$\int \frac{\cos^2 x \, dx}{\operatorname{sen} x} = \cos x + \ln \left\lvert \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\rvert$
	$\int \frac{\cos^2 x \, dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x - x$
	$\int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{1 \pm \cos x} = \mp \ln (1 \pm \cos x)$
	$\int \frac{\cos x \, dx}{1 \pm \operatorname{sen} x} = \pm \ln (1 \pm \operatorname{sen} x)$
$\operatorname{tg} x$	$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \lvert \cos x \rvert$
	$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \operatorname{tg} x - x$
	$\int \frac{1}{\operatorname{tg} x} \, dx = \ln \lvert \operatorname{sen} x \rvert$
	$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \pm 1} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \lvert \operatorname{sen} x \pm \cos x \rvert$
arsen x arcos x artg x	$\int \operatorname{arsen} \frac{x}{a} \, dx = x \operatorname{arsen} \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}$
	$\int \left(\operatorname{arsen} \frac{x}{a}\right)^2 dx = x \left(\operatorname{arsen} \frac{x}{a}\right)^2 - 2x + 2\sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{arsen} \frac{x}{a}$

Funzione presente nell'integrando	Integrali indefiniti
	$\int x \operatorname{arsen} x \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \operatorname{arsen} \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}$
	$\int \arccos \frac{x}{a} \, dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$
	$\int x \arccos \frac{x}{a} \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}$
	$\int \operatorname{artg} \frac{x}{a} \, dx = x \operatorname{artg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2)$
	$\int x \operatorname{artg} \frac{x}{a} \, dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \operatorname{artg} \frac{x}{a} - \frac{a x}{2}$
e^x	$\int e^x dx = e^x$
	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
	$\int e^{-x} dx = - e^{-x}$
	$\int x \, e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right]$
	$\int x^2 \, e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right]$
	$\int \frac{dx}{1 + e^x} = x - \ln (1 + e^x)$
	$\int \frac{x \, e^x dx}{(1 + x)^2} = \frac{e^x}{1 + x}$
	$\int e^{ax} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} (a \operatorname{sen} x - \cos x)$
	$\int e^{ax} \cos x \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} (a \cos x + \operatorname{sen} x)$
$\ln x$	$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$
	$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$

Funzione presente nell'integrando	Integrali indefiniti
	$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$
	$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^2}{2}$
	$\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$
	$\int (\ln x)^2 \, dx = x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$
	$\int \ln (a + bx) \, dx = \frac{a + bx}{b} \ln (a + bx) - x$
	$\int \ln (x^2 + a^2) \, dx = x \ln (x^2 + a^2) - 2x + 2a \operatorname{artg} \frac{x}{a}$

5.5. *Integrali definiti*

Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ ed $F(x) = \int f(x) \, dx$ è la sua primitiva, risulta:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) \equiv [F(x)]_a^b .$$

Nell'integrazione per sostituzione, laddove si operi la sostituzione $x = \varphi(t)$ per cui:

$$\int f(x) \, dx = \int f[\varphi(t)] \, \varphi'(t) \, dt$$

e si voglia l'integrale definito nell'intervallo $[a, b]$ della variabile x, occorre procedere come segue:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\varphi(t)] \, \varphi'(t) \, dt$$

dove la funzione $\psi(x)$ è l'inversa della $\varphi(t)$, cioè $t = \psi(x)$.

Riportiamo alcuni integrali definiti notevoli:

$$\int_0^\pi \sin^2 nx \, dx = \int_0^\pi \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \pi \qquad \text{con } n \text{ intero}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot \quad n} & n \text{ dispari} \\[2ex] \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot \quad (n)} & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin ax \sin bx \, dx = \int_0^{\pi} \cos ax \cos bx \, dx = 0 \qquad \text{con } a \neq b$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a > 0 \quad \text{ove} \quad \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \lim_{h \to \infty} \int_0^{h} e^{-ax^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a > 0;\ n \text{ intero}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2 a^{n+1}} \qquad a > 0;\ n \text{ intero}$$

6. Numeri complessi

Un numero complesso A è una coppia ordinata di numeri reali che di solito si scrive nella forma

$$A \equiv a + ib$$

Se $a = 0$ e $b = 0$ si ha il numero complesso nullo $N \equiv 0$.

Se $b = 0$ e $a \neq 0$ il numero complesso si riduce al *numero reale* $A = a$; in particolare se $b = 0$ e $a = 1$ il numero complesso si riduce all'*unità reale* $U_R = 1$.

Se $a = 0$ e $b \neq 0$ il numero complesso $A = ib$ si dice *immaginario puro*; in particolare se $a = 0$ e $b = 1$ il numero complesso si riduce all'*unità immaginaria* $U_I = i$.

Il numero complesso $A^* = a - ib$ viene detto *complesso coniugato* di $A = a + ib$.

6.1. *Definizioni dell'algoritmo complesso*

Dati due numeri complessi $A \equiv a + ib$ e $B \equiv c + id$ si definiscono le operazioni:

– *Somma algebrica* di due numeri complessi: $A \pm B = (a \pm c) + i(b \pm d)$

– *Prodotto* di due numeri complessi: $A \cdot B = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Casi particolari notevoli:

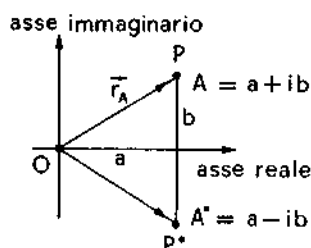
$A^2 = a^2 - b^2 + i\,2ab$	quadrato di un generico numero complesso
$(\pm U_R)^2 = (\pm 1)^2 = 1$	quadrato dell'unità reale
$(\pm U_I)^2 = (\pm i)^2 = -1$	quadrato dell'unità immaginaria.

Il quadrato dell'unità immaginaria vale -1; e il quadrato di un qualunque numero ib immaginario puro è negativo: $(\pm ib)^2 = -b^2$. In effetti i numeri complessi sono stati introdotti per dar significato all'operazione di radice quadrata dei numeri reali negativi.

– *Reciproco* di un numero complesso: $\dfrac{1}{A} = \dfrac{1}{a + ib} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$. Questa definizione comporta che $\dfrac{1}{A} \cdot A = 1$

– Modulo di un numero complesso:

$$|A| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Si verifica facilmente che $A \cdot A^* = |A|^2$: il modulo quadrato di un numero complesso è pari al prodotto di esso per il suo complesso coniugato.

6.2. *Interpretazione geometrica dei numeri complessi*

Così come i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca coi punti di una retta (asse reale), così i numeri complessi sono in corrispondenza biunivoca coi punti di un piano (piano complesso). Il punto P corrispondente al numero $A \equiv a + ib$ è quello di coordinate cartesiane a e b rispettivamente.

L'asse delle ascisse di questo piano è detto *asse reale* e quello delle ordinate *asse immaginario*.

Il modulo $|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$ di A rappresenta il modulo r_A del vettore posizione $\vec{r}_A$ del suo punto rappresentativo P. Il complesso coniugato A^* di A è rappresentato dal punto P^* simmetrico a P rispetto all'asse reale.

È immediato verificare che la somma $S = A + B$ dei numeri complessi A e B è rappresentato dal punto il cui vettore posizione $\vec{r}_S$ è somma vettoriale dei vettori posizione $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$ di A e B rispettivamente.

L'interpretazione geometrica del prodotto $A \cdot B$ è più immediata nella rappresentazione polare che introduciamo qui di seguito.

6.3. *Rappresentazione polare dei numeri complessi*

Il numero complesso $A \equiv a + ib$ può essere espresso, oltre che tramite le componenti cartesiane a e b del suo vettore posizione $\vec{r}_A$ nel piano complesso, anche tramite le sue coordinate polari r_A, θ tali che:

$$\begin{cases} a = r_A \cos\theta \\ b = r_A \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \text{ovvero:} \qquad \begin{cases} r_A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

per cui

$$A \equiv (a + ib) \equiv r_A(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

L'anomalia θ è definita a meno di multipli interi di 2π.

Dati due numeri complessi

$$A \equiv (a + ib) = r_A(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad B \equiv (c + id) = r_B(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

si verifica immediatamente che il prodotto

$$P = A \cdot B = (ac - bd) + i(ad + bc) \equiv r_P(\cos\gamma + i\operatorname{sen}\gamma)$$

ha come coordinate polari r_P, γ rispettivamente il prodotto dei raggi r_A e r_B e la somma degli angoli θ e φ dei fattori:

$$r_P = r_A \cdot r_B$$

$$\gamma = \theta + \varphi$$

per cui

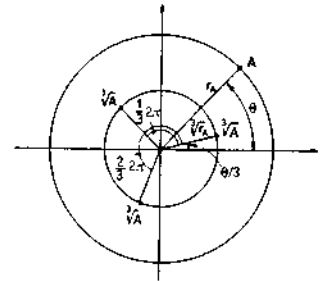
$$A \cdot B \equiv r_A \cdot r_B(\cos(\theta + \varphi) + i\operatorname{sen}(\theta + \varphi))$$

Ciò considerato, la rappresentazione polare consente di calcolare e di esprimere in termini compatti le potenze n-sime e le radici n-sime dei numeri complessi.

Se $A \equiv (a + ib) = r_A(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ si ha infatti

$$A^n = r_A^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta))$$

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{r_A}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right)\right] \quad (k \text{ intero}).$$

Questa espressione ci mostra che ogni numero complesso A ammette n radici n-esime fra di loro distinte (corrispondenti a $k = 0, 1, ..., n-1$), la cui interpretazione geometrica risulta immediata dalla figura.

6.4. *Rappresentazione esponenziale dei numeri complessi*

L'esponenziale $e^{i\theta}$ ad esponente immaginario $i\theta$ (θ reale) è definito dalla relazione:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Per conseguenza, il numero complesso $A \equiv (a + ib) = r_A(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ può essere scritto nella forma compatta

$$A = r_A e^{i\theta}$$

Si verifica immediatamente che tutto l'algoritmo relativo all'esponenziale $e^{i\theta}$ ad esponente immaginario mantiene le stesse proprietà rispetto al caso di esponente reale. Ad esempio, poiché si può trattare i come una costante, si ha:

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

$$\frac{d}{dx}e^{ix} = i\,e^{ix}$$

Sono inoltre di immediata verifica le seguenti relazioni (dette *formule di Eulero*) già anticipate in A.2.1:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

7. **Equazioni differenziali**

Un'equazione differenziale è una relazione tra una variabile indipendente t, una variabile dipendente y ed una o più derivate di y rispetto a t.

L'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine della più alta derivata che vi compare.

Risolvere un'equazione differenziale significa trovare tutte le possibili funzioni $y = y(t)$ che soddisfano l'equazione data.

Considereremo nel seguito soltanto alcune semplici equazioni differenziali di frequente uso in meccanica elementare.

7.1. *Equazioni del primo ordine a quadratura immediata*

$$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

$$y = \int f(t)\, dt + c$$

dove c è una costante arbitraria.

7.2. *Equazioni del primo ordine a variabili separabili*

$$\frac{dy}{dt} = f(t)\, g(y)$$

da cui:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t)\, dt$$

che può essere risolta per quadratura, cioè integrando entrambi i membri

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)\, dt + c$$

Per esempio, l'equazione:

$$y\frac{dy}{dt} = a - by^2$$

si risolve separando la variabile y al primo membro e la variabile indipendente t al secondo:

$$\frac{y\, dy}{a - by^2} = dt$$

da cui:

$$-\frac{1}{2b}\,\frac{d(a - by^2)}{(a - by^2)} = dt\,,$$

ed integrando

$$-\frac{1}{2b}\ln(a - by^2) = t + c$$

7.3. *Equazioni lineari del primo ordine*

$$\frac{dy}{dt} + fy = g$$

dove f e g sono funzioni di t o costanti.

Si moltiplicano ambo i membri dell'equazione per l'esponenziale $e^{\int f dt}$ e si integra.

Si verifica immediatamente che

$$\frac{d}{dt}[y e^{\int f dt}] = \frac{dy}{dt} e^{\int f dt} + y f e^{\int f dt} = e^{\int f dt}\left[\frac{dy}{dt} + f y\right]$$

e quindi

$$y e^{\int f dt} = \int e^{\int f dt} g \, dt + c$$

Per esempio, consideriamo l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dt} + a y = b t \qquad \text{con } a \text{ e } b \text{ costanti.}$$

Si può integrare moltiplicando ambo i membri per $e^{at} dt$ ed integrando:

$$y e^{at} = b \int e^{at} t \, dt + c =$$

$$= b e^{at} \left(\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\right) + c$$

da cui

$$y = \frac{b}{a}\left(t - \frac{1}{a}\right) + c e^{-at}$$

7.4. *Equazioni lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2a \frac{dy}{dt} + b y = 0 \qquad \text{con } a \text{ e } b \text{ costanti reali.}$$

Si dimostra facilmente che la funzione $y = e^{mt}$ è soluzione dell'equazione differenziale purché:

$$m^2 + 2 a m + b = 0 \qquad \text{(equazione algebrica associata)}$$

Dette m_1 ed m_2 le soluzioni dell'equazione algebrica la soluzione completa dell'equazione differenziale è:

$$y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie (tante quanto è l'ordine dell'equazione differenziale).

Poiché:

$$m_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

si possono avere tre possibilità:

i) $a^2 > b$, e quindi due radici reali dell'equazione algebrica

ii) $a^2 = b$, e quindi una sola radice reale; la soluzione è in questo caso

$$y(t) = e^{-at}(c_1 + c_2 t)$$

iii) $a^2 < b$, e quindi radici complesse. Detto $a^2 - b = -n^2$ si ha

$$y(t) = e^{-at}(c_1 e^{int} + c_2 e^{-int})$$

ovvero

$$y(t) = e^{-at}(A\cos nt + B\,\mathrm{sen}\, nt)$$

dove A e B sono due costanti arbitrarie.

Se manca il termine contenente la derivata prima ($a = 0$) l'equazione si riduce alla forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + by = 0 .$$

Se $b > 0$, si pone, di solito $b = \omega^2$, e quindi:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 ,$$

la cui soluzione è:

$$y(t) = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t = C\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

dove C e φ sono costanti arbitrarie.

7.5. *Equazioni del secondo ordine di tipo particolare*

Salvo il caso in cui l'equazione sia esprimibile solo in forma implicita, la più generale equazione differenziale del secondo ordine è del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

dove f è una qualunque funzione. Non esistono tecniche elementari di tipo generale per risolvere questa equazione; tuttavia possono essere trattate semplicemente alcune sue forme particolari:

i) Equazione del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t) .$$

Questa equazione si risolve quadrando due volte:

$$\frac{dy}{dt} = F(t) + c_1 \qquad \text{dove} \quad F(t) = \int f(t)\,dt$$

$$y = \int [F(t) + c_1]\,dt + c_2 .$$

ii) Equazioni del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, \frac{dy}{dt}\right)$$

Si pone

$$\frac{dy}{dt} = x(t) ;$$

e dunque

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} .$$

L'equazione differenziale diviene:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

ed è così ricondotta a una equazione differenziale del primo ordine.

iii) equazioni del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(y)$$

Ponendo

$$\frac{dy}{dt} = x(t)\,,$$

si ha

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot x\,.$$

Sostituendo nella nostra equazione, questa diviene

$$\frac{dx}{dy} \cdot x = f(y)$$

che rappresenta una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Separando e integrando, si ha

$$\frac{1}{2}\,x^2 = F(y) + c_1 \qquad \text{dove} \quad F(y) = \int f(y)\,dy$$

da cui

$$x = \frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{2\,F(y) + 2\,c_1}$$

che rappresenta anch'essa un'equazione del primo ordine a variabili separabili, ed è dunque immediatamente ricondotta alla quadratura.

iv) Equazioni del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(y, \frac{dy}{dt}\right).$$

Mediante la sostituzione

$$\frac{dy}{dt} = x(t)\,,$$

si ha

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot x\,;$$

e dunque

$$\frac{dx}{dy} \cdot x = f(y, x)$$

L'equazione del secondo ordine è così ricondotta a una del primo ordine.

Indice analitico